This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

**Usage guidelines**

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

**About Google Book Search**

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

**Über dieses Buch**

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

**Nutzungsrichtlinien**

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

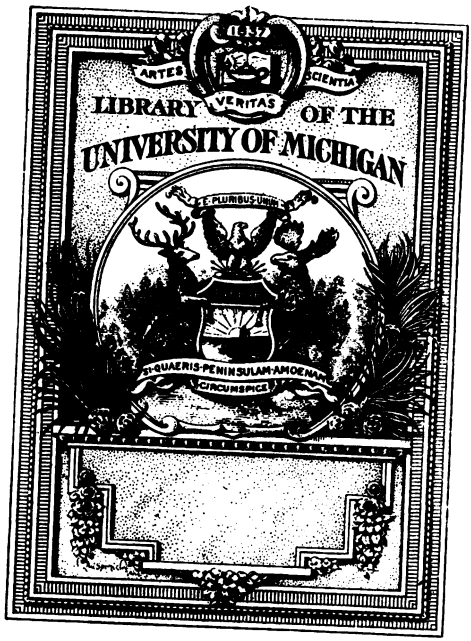
+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

**Über Google Buchsuche**

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

G. WESTERMANN & CO.
NEW YORK
290 Broadway

A 546807



Q
8
C

3 vols. 3392.

# Lehrbuch

der

# Mechanik,

zugleich

mit den dazu nöthigen Lehren

der

**höhern Analysis und der höhern Geometrie.**

Elementar vorgetragen

und mit sehr vielen Beispielen der Anwendung versehen

vom

Professor Dr. **Martin Ohm,**

an der Königl. Fr. W. Universität, an der Königl. Allgemeinen Krieges-Schule und an der Königl. vereinigten Artillerie- und Ingenieur-Schule zu Berlin; der Kais. Russ. Akademie der Wiss. zu St. Petersburg, der Königl. Bayerischen Akademie d. Wiss. zu München, so wie mehrerer andern gelehrten Gesellschaften korrespond. Mitglied.

---

Erster Band.

**Mechanik des Atoms.**

---

Mit einer Figuren-Tafel.

---

**Berlin, 1836.**

Bei Theod. Chr. Friedr. Enslin.

# Vorrede.

Der Verfasser übergiebt hiermit dem mathematischen Publiko ein „Lehrbuch der Mechanik“ in drei Bänden, welches er zunächst für seine Zuhörer, dann aber in's Besondere auch für Selbstlernende ausgearbeitet hat. Der erste Band enthält neben den nöthigsten Lehren der „Differenzial- und Integral-Rechnung“ und der „höhern Geometrie“ noch die gesammte „Mechanik des Atoms;“ der zweite Band die gesammte „Statik fester Körper,“ und der dritte die gesammte „Dynamik fester Körper“ und das Wissenswürdigste aus der „Hydrostatik“ und „Hydraulik.“ Das Ganze schließt sich an die ebenfalls in drei Bänden erschienene „Elementar-Mathematik“ an.

In so ferne der Verfasser im Vortrage oft das Wort „Atom“ gebraucht, muß er hier in der Vorrede die atomistische Ansicht der Natur ausdrücklich als eine solche

bezeichnen, der er selbst nicht zugethan ist. Es hat den Verfasser bloß bequem geschienen: 1) das, was man häufig einen angegriffenen oder bewegten Punkt nennt mit dem Namen „Atom" zu belegen, und 2) in der Anwendungen der Mathematik auf Physik (also auch auf Technik) die Materie als ein Aggregat solcher Atome sich zu denken. Diese Einrichtung wird dem Atomisten genügen und findet hoffentlich auch bei dem Dynamiker keinen Anstoß, da sie nicht daran hindert, die Materie als stetig und den Atom noch beliebig sich zu denken. Ueberdies wird von Zeit zu Zeit (wie z. B. in der vorliegenden Abtheilung „Mechanik des Atoms" im vierten Kapitel) noch besonders nachgewiesen, wie dieselben Resultate, welche durch anscheinend atomistische Betrachtungen erhalten worden sind, auch auf anderen Wegen erhalten werden, bei denen selbst nicht die entfernteste Spur von Atomistik zu bemerken ist.

Derselbe Zweck, nämlich die größte Bequemlichkeit im Vortrage zu erreichen ohne die Gründlichkeit fahren lassen zu müssen, ist auch die Ursache gewesen, daß der Verfasser zugleich mit dem Worte „Atom" das Wort „Unendlich-kleiner Zuwachs" gebraucht, und sogar im zweiten Kapitel der Abtheilung „Analysis" die „Lehre von den unendlich-kleinen Zuwachsen" besonders vorgetragen hat. So viele Leser er vielleicht dadurch befriedigen mag, eben so viele, und darunter der Verfasser selber, würden über diese (scheinbare) „Rückkehr zur Barbarei einer veralteten Philosophie, die am Erstarrten und Leblosen ihre Freude hatte," mit einigem Rechte sich erei-

fern, — wenn es eben nicht bloß so schiene, sondern wirklich so wäre.

Der zweite Band wird zur nächsten Ostermesse die Presse verlassen. Der Verfasser hat in ihm den Lehren der gesammten Statik fester Körper Poinsot's schöne „théorie des couples" zu Grunde gelegt, dadurch aber gewissermaaßen sich mit Poisson in Gegensatz gestellt, welcher auch in der neuen Auflage seiner „Mécanique" diese einfache Lehre keines Blikkes würdigt, sondern den ältern schleppendern Gang beibehält. Poinsot's Lehre wird in Deutschland bald allgemeinern Eingang finden, während sie in Frankreich seit dreißig Jahren fast nur durch ihren Urheber allein gehalten zu werden scheint.

Unter den übrigen Gegenständen, welche dem Leser gefallen oder mißfallen werden, hebt der Verfasser nur noch den Beweis des „Prinzips der virtuellen Geschwindigkeiten" hervor, der dem Verfasser eben so einfach als allgemein zu seyn scheint, und sich über feste, lose, flüssige und luftförmige Körper gleichmäßig bündig erstrekkt. Der ganze Vortrag stützt sich dabei auf die drei Axiome (I. Th. Mech. §. 10.), wo man zwei Kräfte 1) in einer und derselben Richtung, 2) in genau entgegengesetzter, und 3) in Richtungen, welche auf einander senkrecht stehen, gleichzeitig wirken läßt, und dabei die Resultate postulirt. — Daß die Natur-Kräfte diesen Postulaten genügen, muß physikalisch bewiesen werden, nämlich so:

In einem mathematischen Vortrage ist es erlaubt, Definitionen festzustellen, welche, genau genommen,

abstrahirte Natur-Gesetze sind. Der Verfasser hat es unter andern auch mit dem Begriff der „Masse" so gemacht. In den Anwendungen der daraus gefolgerten Lehren auf die Natur, muß die Uebereinstimmung aller Resultate mit den Beobachtungen und Erfahrungen, den physikalischen Beweis liefern, daß die Natur dieser Definition folgt, d. h. daß die Definition wirklich ein richtiges Natur-Gesetz ausspricht. Gerade durch dieses Verfahren leistet die Mathematik der Physik und der Natur-Philosophie (wenn letztere so bescheiden werden will, um davon Gebrauch zu machen), die wichtigsten Dienste, deren Unentbehrlichkeit nachgerade, in der Physik wenigstens, immer mehr und allgemeiner anerkannt wird.

Wenn der Verfasser bei manchen Anwendungen länger verweilt, so möge der geneigte Leser, dem dieses mißfallen sollte, bedenken, daß ein solches „Lehrbuch" so manche Pflichten auf sich hat, an die der Verfasser als Lehrer mehr erinnert wird, als vielleicht gerade der Leser. Das Lehrbuch soll Vielen nützlich seyn, dem im Kalkul weniger Geübten, wie dem Geübtern, dem Architekten wie dem Soldaten, dem Physiker wie dem Astronomen; ja es soll dem Ungeübtern Gelegenheit geben, sich in den frühern Lehren zu erkräftigen und zu stärken; es soll das augenblickliche Bedürfniß befriedigen, und zu den tiefern und tiefsten Studien vorbereiten. Jeder Anfänger kann zunächst unter den verschiedenen Anwendungen eine Auswahl treffen; Viele werden sich vielleicht an allen versuchen und ergötzen.

Bei den Anwendungen auf Rollen, Rollen-Züge und Flaschen-Züge, u. dgl. wird man hie und da einen von dem gewöhnlichen etwas abweichenden Gang und vielleicht auch etwas abweichende Resultate finden. Der Unterschied in Ziffern-Rechnungen ist meist sehr gering; die Formeln selbst aber hat der Verfasser so stellen müssen, um nicht mit Vorhergegangenem in Widerspruch zu gerathen.

Endlich entschuldigt sich der Verfasser im Voraus, wenn der Eine oder der Andere seiner geneigten Leser das besondere Fach, welches für ihn gerade Interesse hat, nicht erschöpfend genug behandelt findet, namentlich wenn der Artillerist keine Ballistik, sondern nur ballistische Aufgaben, der Astronom keine Mechanik des Himmels, sondern nur die wichtigsten und einfachsten Aufgaben daraus, der Physiker keine vollständige mathematische Theorie der Wärme und des Lichts, auch keine speziellen Untersuchungen über die Existenz oder Nicht-Existenz einer spezifischen Schwere, sondern nur dahin einschlagende allgemeine Lehren, z. B. die allgemeine Bewegungs-Lehre, wonach sich auch Licht und Wärme richten, oder eine vollständigere allgemeine Theorie des Pendels u. dgl. m. vorfindet. — Wer bloß nach allgemeiner Bildung strebt, der wird, so hofft der Verfasser mit einiger Zuversicht, hier seine Befriedigung finden; wer aber mehr will, der muß sich an Monographien halten, welche dann ihrerseits wieder den größten Theil der hier entwikkelten Lehren voraussetzen, daher unser „Lehrbuch der Mechanik“ nicht überflüssig machen.

Die Mängel endlich überhaupt, welche jedes solche Werk auch bei der größten Gewissenhaftigkeit und Sorgfalt immer haben wird, werden wenigstens diejenigen Leser freundlich und gerne entschuldigen, welche die entgegenstehenden Schwierigkeiten mehr oder weniger aus eigener Erfahrung kennen gelernt haben.

Berlin, im April 1836.

M. Ohm.

# Inhalts-Verzeichniß des ersten Bandes.

## A. Höhere Analysis.


Erstes Kapitel. Gesetze und allgemeiner Zweck des Differenziirens (§. 1. — §. 19.).

§. 1. Veränderliche. Konstante.

§. 2. Explicite, implicite Funktion.

§. 3. Entwikkelt, verwikkelt gegebene Funktion.

§. 4. Hat man $\mu$ Gleichungen zwischen m Buchstaben, so sind je $\mu$ der m Buchstaben Funktionen der $m-\mu$ übrigen.

§§. 5. 6. Bezeichnung der Funktionen, und dessen, was aus ihnen wird, wenn statt der Veränderlichen andere Werthe gesetzt werden.

§. 7. (⊙) Der Taylor'sche Lehrsatz. Differenzial-Koeffizienten. Differenziiren.

§. 8. Die Differenzial-Koeffizienten der einfachsten Funktionen ausgewerthet.

§. 9. Formeln, durch welche die Differenzial-Koeffizienten der aus $\varphi_x$, $\psi_x$ und (nach x) konstanten A, B durch die 4 ersteren (elementaren) Operationen zusammengesetzten Funktionen, auf die der einfachern Funktionen $\varphi_x$, $\psi_x$ selbst zurückgeführt werden.

§. 10. Der Taylor'sche Lehrsatz für 2 Veränderliche (☾), für 3 Veränderliche (♂) und für mehr Veränderliche. Bezeichnung der dazu nöthigen Differenzial-Koeffizienten, welche auch Parzial-Differenzial-Koeffizienten genannt werden.

§. 11. Allgemeinere Formeln, in welchen die des (§. 9.) als besondere Fälle stekken, durch welche die Differenzial-Koeffizienten der beliebig zusammengesetzteren Funktionen auf die Differenzial-Koeffizienten ihrer (einfachern) Bestandtheile zurückgebracht werden.

§. 12. Neue, neben (§. 9.) existirende spezielle Fälle.

§. 13. Einige Relationen aus der Analysis des Endlichen. Darunter die Definitionen von $\frac{1}{cos}x$, $\frac{1}{sin}x$, $\frac{1}{tg}x$, ꝛc. ꝛc.

§. 14. Die Differenzial-Koeffizienten der trigonometrischen Funktionen.

§. 15. Auffindung der Differenzial-Koeffizienten verwikkelt gegebener Funktionen. Differenzial-Gleichungen. Totale, parziale Gleichungen.

§. 16. Das Uebertragen der Unabhängigkeit von einem Veränderlichen auf einen andern, in gegebenen Differenzial-Ausdrücken.
§. 17. Elimination eines Veränderlichen, nebst seinen Differenzial-Koeffizienten.
§. 18. Dieselbe, wenn von dem zu eliminirenden Veränderlichen keine Differenzial-Koeffizienten vorkommen, sondern alle vorkommenden Differenzial-Koeffizienten nach ihm genommen sind.
§. 19. Der Maclaurin'sche Lehrsatz.

Zweites Kapitel. Vom Unendlich-Kleinen und von den Verhältnissen der unendlich-kleinen Zuwachse zweier oder mehrerer von einander abhängigen Veränderlichen (§. 20. — §. 26.).

§. 20. Begriffe des Größern und Kleinern, des Unendlich-Kleinen, und Folgerungen daraus.
§. 21. Bestimmung des Verhältnisses der Zuwachse dx und df.
§. 22. Bestimmung des Verhältnisses der Zuwachse dx, dy, df; Partial-Zuwachse; Partial-Differenzial-Koeffizienten.
§. 23. Wenn f eine Funktion dreier Veränderlichen ist.
§. 24. Erste, zweite, dritte Differenzialien; I. wenn dx konstant ist; II. wenn dx selbst wieder veränderlich ist; III. Erklärung dieser Redensarten.
§. 25. Dasselbe, wenn f Funktion zweier Veränderlichen ist.
§. 26. Vergleichung der verschiedenen Zeichen. Der Taylor'sche Lehrsatz in den Zeichen der Infinitesimal-Rechnung.

Drittes Kapitel. Integral-Rechnung. Quadraturen oder Integration der entwikkelt gegebenen Funktionen (§. 27. — §. 33.).

§. 27. Begriff des Integrals. I. $\delta(\int y_x \cdot dx)_x = y_x$; II. $\int(\delta y_x)\cdot dx = y_x$.
§. 28. Allgemeine Integral-Formel durch die Taylor'sche oder Maclaurin'sche Reihe.
§. 29. Besonderes, allgemeines Integral.
§. 30. Allgemeine Integral-Formeln für I. $A\cdot\varphi_x$; II. $\varphi_x \pm \psi_x$; III. $\varphi_x\cdot\psi_x$ und IV. $\int\varphi_x\cdot dx = \int\varphi_x\cdot\delta x_z\cdot dz$.
§. 31. Drei und zwanzig spezielle Integral-Formeln.
§. 32. Integration I. der ganzen, II. der gebrochenen rationalen, III. der irrationalen Funktionen, A) wenn $\sqrt{a+bx+cx^2}$ vorkommt; B) wenn $\sqrt[n]{a+bx}$ vorkommt; C) wenn $\sqrt[n]{\left(\frac{a+bx}{p+qx}\right)}$ vorkommt; D) wenn zwei solche Wurzeln $\sqrt{a+bx+cx^2}$ und $\sqrt{p+qx+rx^2}$ vorkommen. Elliptische Transcendenten.
IV. Leichte Zurückführungen auf die Form $\int f_x\cdot\delta\varphi_x\cdot dx = \int f_\varphi\cdot d\varphi$.
V. Integration der trigonometrischen Funktionen durch Zerlegung.
VI. Theilweise Integration gegebener Funktionen $f_x$, indem man sie als ein Produkt $1\cdot f_x$ sich denkt.

VII. Reduktions-Formeln, welche man durch theilweise Integration erhält.

§. 33. Integration durch unendliche Reihen.

Anhang. Zerlegung der ächt gebrochenen Funktionen in ihre Partial-Brüche.

Viertes Kapitel. Fortsetzung der Integral-Rechnung. Von den bestimmten Integralen (§. 34. — §. 41.).

§. 34. Wann fängt das Integral mit $x = a$ an, wann hört es mit $x = b$ auf? Bestimmtes Integral.

§. 35. Jedes bestimmte Integral von $y_x$ nach $x$, ist eine Summe von unendlich vielen, unendlich-kleinen Produkten von der Form $y \cdot dx$, oder $y \cdot \frac{b-a}{n}$.

§. 36. Näherungs-Berechnung bestimmter Integrale.

§. 37. Theilweise Integration, und Integration durch Substitution unter der Voraussetzung, daß die Werthe der Veränderlichen, mit denen die Integrale anfangen sollen, gegeben sind.

§. 38. Differenziiren unter dem Integral-Zeichen.

§. 39. Werthe von dreißig bestimmten Integralen.

§. 40. Einige allgemeine Sätze von bestimmten Integralen.

§. 41. Der Taylor'sche und der Maclaurin'sche Lehrsatz mit den Ergänzungs-Gliedern.

Fünftes Kapitel. Fortsetzung der Integral-Rechnung. Integration der Differenzial-Funktionen und der Differenzial-Gleichungen (§. 42. — §. 53.).

§. 42. Begriff der Differenzial-Funktion.

§. 43. Integration einer Differenzial-Funktion.

§. 44. Bedingungs-Gleichungen der Integrabilität.

§. 45. Integrirender Faktor.

§. 46. Definition des allgemeinen Integrals einer Differenzial-Gleichung. Partikuläres (besonderes) Integral.

§. 47. Was ein singulärer Werth ist.

§. 48. Allgemeine Integrations-Formeln für Differenzial-Gleichungen von beliebiger Ordnung.

§. 49. A. Direkte Integration einer Differenzial-Gleichung. B. Wenn die Veränderlichen getrennt sind. C. Integration mittelst des integrirenden Faktors.

§. 50. Integration der lineären Gleichungen.

§. 51. Einführung neuer Veränderlichen, um verwikkeltere Gleichungen in einfachere und solche zu verwandeln, deren Integration man durchsetzen kann.

§. 52. Einführung neuer Veränderlicher in der Absicht, die gegebene Differenzial-Gleichung in zwei Gleichungen zu zerfällen, deren jede für sich integrirt werden kann.

§. 53. Integration mehrerer Differenzial-Gleichungen zwischen mehreren unbekannten Funktionen.

Sechstes Kapitel. Variations-Rechnung (§. 54. — §. 56.).

§. 54. Bezeichnung und Benennung.

§. 55. Bestimmung der ersten und zweiten Variations-Koeffizienten $\delta f$, $\delta^2 f$ für gegebene Fälle.

§. 56. Vom Größten und Kleinsten.

## B. Höhere Geometrie.

Erstes Kapitel. Von den Projektionen, Koordinaten und von der Verwandlung dieser letztern (§. 1. — §. 3.).

§. 1. Von den Projektionen eines Punktes, oder einer Linie auf eine Linie und Ebene (I. — III.); von den Koordinaten-Werthen in der Ebene und im Raume; Ausdruck der Winkel, welche eine gerade Linie mit den Axen macht, in die Koordinaten-Werthe zweier Punkte dieser Geraden (IV. — V.); Ausdruck der Entfernung zweier Punkte, und des Winkels $\delta$, welchen zwei Linien unter sich machen, in die Winkel, welche diese beiden Linien mit den Axen machen (VI. — VII.).

§. 2. Projektionen einer Figur auf eine Ebene (I. II.); Sätze dieser Projektionen ebener Figuren (III. — IV.).

§. 3. Verwandlung der Koordinaten in andere rechtwinkliche (III. — IV.) und in Polar-Koordinaten, in der Ebene und im Raume (V. — VII.).

Zweites Kapitel. Wie Linien in einer Ebene durch Gleichungen zwischen den Koordinaten-Werthen eines beliebigen ihrer Punkte ausgedrückt werden (§. 4. — §. 9.)

§. 4. Von den geraden Linien (I. II.); Parallele, senkrechte Linien (III.); Durchschnitts-Punkt, Winkel zweier Geraden (IV.); Länge eines Lothes (V.); Gleichung der Geraden in Polar-Koordinaten (VI.).

§. 5. Von den krummen Linien im Allgemeinen.

§. 6. Rektifikation und Quadratur der ebenen Kurven.

§. 7. Berührungen und Osculationen der ebenen Kurven (I.). Geradlinige Tangenten und Normale (II.); Krümmungs-Kreis (III.); berührende Kreise (IV.).

§. 8. Von den Kegelschnitten in's Besondere.

§. 9. Von den Cycloiden.

Anhang. Von den Evolventen und den Evoluten.

Drittes Kapitel. Wie Flächen und Linien im Raume durch Gleichungen ausgedrückt werden (§. 10. — §. 17.).

§. 10. Eintheilung der Flächen; Grundschnitte derselben.

§. 11. Gleichung der Ebene; parallele Ebenen.

§. 12. Gleichungen der geraden Linie im Raume; wenn sie senkrecht steht auf einer Ebene; parallele Linien; Bestimmung der Winkel, unter denen sie sich schneiden.

§. 13. Gleichung der Kugel, des Kreises im Raume.
§. 14. Gleichungen der berührenden Ebene, der berührenden Kugel, der Normale.
§. 15. Inhalt der krummen Fläche; des durch sie begrenzten Körpers.
§. 16. Von den Linien doppelter Krümmung.
§. 17. Von den Flächen der zweiten Ordnung.

## C. Mechanik, oder Statik und Dynamik.

### Erster Theil.

### Von der Bewegung und dem Gleichgewicht eines Atoms.

Erstes Kapitel. Von der Bewegung eines Atoms in ihrer Erscheinung (§. 1. — §. 5.).

§. 1. Bewegung. Ruhe. Zeit. Bahn, Weg oder Raum. Gleichförmige oder konstante Bewegung. Veränderliche Bewegung.
§. 2. Zeit t, dt, Raum s, ds sind unbenannte Zahlen, welche sich bezüglich auf die Sekunde und den Fuß als Einheiten beziehen; dt, ds sind unendlich-klein und fangen an, unmittelbar wenn t und s aufhören.
§. 3. Der in der Zeit dt beschriebene Raum ds, in einer Bewegung, deren Gesetz durch eine Gleichung zwischen s und t gegeben ist, wird aus der Gleichung $ds = \delta s_t \cdot dt$ gefunden, wo $\delta s_t$ der Differenzial-Koefizient von s nach t ist, und nach bestehenden Regeln gefunden wird.
§. 4. Dieser Koefizient $\delta s_t$, oder der Werth von $\frac{ds}{dt}$ bestimmt die Geschwindigkeit.
Anmerk. Die Geschwindigkeit = 0 zeigt Ruhe an.
§. 5. Wenn eine Gleichung zwischen der Zeit t, der Geschwindigkeit v und dem Raume s gegeben ist, oder eine Gleichung zwischen zweien dieser 3 Größen, so ist dadurch das Gesetz der Bewegung gegeben, indem man statt v seinen Werth $\delta s_t$ in s setzt, und die gegebene Gleichung (zwischen s, $\delta s_t$ und t) integrirt, zuletzt aber die Konstante dem zu irgend einer bestimmten Zeit t gehörigen bestimmten und bekannten Werth von s gemäß bestimmt. Spezielle Fälle: A. konstante Bewegung, B. gleichförmig beschleunigte oder gleichförmig verzögerte Bewegung.
Anmerk. 1. Alles in diesem Kapitel (§. 3. — §. 9.) entwikkelte gilt, die Bewegung mag geradlinig oder krummlinig seyn.
Anmerk. 2. Die Räume s müssen nicht mit t zugleich anfangen.

Zweites Kapitel. Von den Ursachen der Bewegung eines Atoms. Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte (§. 6. — §. 17. b.).

§. 6. Kraft definirt.
§. 7. Richtung, Größe der Kraft definirt.
§. 8. Wenn mehrere Kräfte in entferntern Zeiträumen nach einander auf

den Atom wirken, so entsteht ein Aggregat einzelner geradliniger Bewegungen, deren Gesammtbahn eine einzige gerade Linie, auch eine gebrochene Linie seyn kann, und wo die einzelnen Bewegungen nothwendig konstant sind.

§. 9. Wenn Kräfte stetig (ohne merkliche Zwischenzeit) hinter einander auf den Atom wirken, so entsteht geradlinige veränderliche, oder krummlinige konstante, oder krummlinige veränderliche Bewegung. — Diese stetig wirkenden Kräfte heißen beschleunigende Kräfte zum Unterschied von den nur augenblicklich wirkenden.

§. 10. Von den Kräften wird postulirt:

I. Wirken a und b gleichzeitig in derselben Richtung, so ist ihre Wirkung identisch mit der Wirkung der Kraft a+b.

II. Wirken dieselben gleichzeitig in gerade entgegengesetzter Richtung, so ist ihre Wirkung identisch mit der Kraft a−b.

III. Wirken dieselben a und b gleichzeitig in Richtungen, die auf einander senkrecht stehen, so ist ihre Wirkung in Bezug auf Entfernung des Atoms von diesen Richtungen dieselbe, wie wenn jede einzeln wirkte, ohne Mitwirkung der andern.

§. 11. I. II. Einführung der Begriffe von negativer Geschwindigkeit und negativer Kraft, um die Fälle (I. und II. des §. 10.) unter eine und dieselbe Form der Rechnung zu bringen. III. Die Bewegung in (III. des §. 10.) ist konstant und geradlinig, wie wenn eine einzige Kraft gewirkt hätte, der Größe und Richtung nach die Diagonale des Rechtecks, von welchem a und b die Seiten sind. IV. Zerlegung einer Kraft in diese (rechtwinklicht auf einander stehenden) Seiten-Kräfte.

§. 12. Zwei unter beliebigem Winkel gleichzeitig auf einen Atom wirkende Kräfte in eine einzige vereinigt.

§. 13. Kräften-Parallelogramm. Zusammensetzung, Zerlegung der Kräfte.

§. 14. Eine beliebige Zahl n von Kräften, deren Richtungen in einer und derselben Ebene liegen und die einen Atom O gleichzeitig angreifen, in eine einzige Kraft vereinigt.

§. 15. I. Drei Kräfte, welche im Raume in drei auf einander senkrechten Richtungen einen Atom O gleichzeitig angreifen, in eine einzige vereinigt. II. Die umgekehrte Aufgabe.

§. 16. Drei auf einander senkrecht wirkende Kräfte in drei andere umgewandelt, die wieder auf einander senkrecht stehen.

§. 17. Beliebig viel Kräfte im Raume, welche einen Atom O gleichzeitig angreifen, in eine einzige Kraft vereinigt.

§. 17. b. Kräften-Parallelepipedum.

Drittes Kapitel. Vom Gleichgewicht der Kräfte, welche einen Atom angreifen.

Erste Abtheilung. Bedingungs-Gleichungen des Gleichgewichts eines Atoms (§. 18. — §. 24.).

§. 18. Begriff des Gleichgewichts.

§. 19. Gleichgewicht: I. zwischen 2, II. zwischen 3; III. zwischen n Kräften im Allgemeinen.

§. 20. Gleichgewicht ist zwischen n Kräften, wenn 1) $\Sigma(P \cdot \cos\alpha) = 0$; 2) $\Sigma(P \cdot \cos\beta) = 0$; 3) $\Sigma(P \cdot \cos\gamma) = 0$.

§. 21. Diese Gleichungen reduziren sich auf 1) $\Sigma(P \cdot \cos\alpha) = 0$, 2) $\Sigma(P \cdot \cos\beta) = 0$, wenn die Kräfte alle in einer Ebene liegen, und in dieser Ebene die Axen OX, OY.

§. 22. Gleichgewicht zwischen n Kräften und einer Fläche $L = 0$, auf welcher der Atom zu bleiben gezwungen ist.

§. 23. Gleichgewicht eines Atoms, der auf der durch $L = 0$ und $L' = 0$ gegebenen Linie zu bleiben gezwungen ist.

§. 24. Recapitulation der (§§. 20. — 23.).

Zweite Abtheilung. Von den Umformungen der Bedingungs-Gleichungen des Gleichgewichts eines Atoms (§. 25. — §. 30.).

§. 25. Es ist zum Gleichgewicht eines Atoms nothwendig und ausreichend, wenn $\Sigma(P \cdot \cos\alpha) = 0$, $\Sigma(P \cdot \cos\alpha') = 0$ und $\Sigma(P \cdot \cos\alpha'') = 0$, wo $\alpha$, $\alpha'$, $\alpha''$ auf 3 beliebige (nicht gerade auf einander senkrechte) Linien sich beziehen.

§. 26. Dasselbe, wenn die Kräfte alle in einer und derselben Ebene liegen.

§. 27. Princip der virtuellen Geschwindigkeiten für einen angegriffenen Atom, geometrisch.

§. 28. Dasselbe in Differenzial-Rechnungsform.

§. 29. Dasselbe durch Variations-Rechnung, ohne Zuziehung des Unendlich-Kleinen.

§. 30. Statisches Moment. Momenten-Gleichungen für das Gleichgewicht.

Viertes Kapitel. Theorie der freien geradlinigen Bewegung eines Atoms (§. 31. — §. 34.).

§. 31. Jede stetig wirkende Kraft, wenn sie in einer endlichen Zeit eine endliche Geschwindigkeit hervorbringt, ist unendlich-klein und mit dt proportional; und wenn solche durch $\varphi \cdot dt$ ausgedrückt wird, so ist $\varphi$ die Geschwindigkeit, welche in einer Sekunde durch stetig wiederholte Wirkung derselben Kraft erzeugt wird.

§. 32. Eine Kraft $\varphi \cdot dt$, wenn $\varphi$ eine Funktion von t oder konstant ist, bringt nach t Sekunden fortgesetzter stetiger Wirkung, die Geschwindigkeit $v = \int \varphi \cdot dt$ hervor.

§. 33. Die beiden Gleichungen der geradlinigen Bewegungen sind daher I. $\partial s_t = v$; II. $\partial v_t = \varphi$, und sie bilden die vollständige Theorie der geradlinigen Bewegung.

Beispiel. Anmerk. Freier Fall. Zur Fallhöhe h gehörige Geschwindigkeit.

§. 34. Klassifikation der Beispiele nach den anzuwendenden Integrations-Methoden.

Anhang. Dieselbe Theorie der freien geradlinigen Bewegung ohne Zuziehung des Unendlich-Kleinen (NN. I. — V.).

Fünftes Kapitel. Krummlinige Bewegung eines Atoms.

Erster Abschnitt. Allgemeine Gesetze für die drei Haupt-Arten der krummlinigen Bewegung (§. 35. — §. 39.).

§. 35. I. Bezeichnungen. II. Seiten-Geschwindigkeiten. III. Die stetig wirkenden Kräfte sind $X \cdot dt$, $Y \cdot dt$, $Z \cdot dt$.

§. 36. $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$ sind die Seiten-Geschwindigkeiten; $\delta s = v$; analytische Formeln für Kurven.

§. 37. Die drei Gleichungen der krummlinigen Bewegung (I.); im Falle der freien Bewegung (II.); der Bewegung auf einer Fläche (III.); der Bewegung in einer gegebenen Kurve (IV.); Gemeinschaftliches in allen 3 Fällen (V.).

§. 38. Gemeinschaftliches Integral in allen 3 Fällen: $v^2 - a^2 = 2\int_{t \div 0} (X \cdot \delta x + Y \cdot \delta y + Z \cdot \delta z) \cdot dt$. Gemeinschaftliche Differenzial-Gleichung $\delta^2 s = \varphi = X \cdot \cos\alpha + Y \cdot \cos\beta + Z \cdot \cos\gamma$.

§. 39. Folgerungen aus diesem gemeinschaftlichen Integral.

Zweiter Abschnitt. Freie krumml. Beweg. in's Besondere (§. 40.—§. 44.).

§. 40. Die drei Integrale $y \cdot \delta x - x \cdot \delta y = \int (X \cdot y - Y \cdot x) \cdot dt$, ꝛc. ꝛc.

§. 41. Der einfachere Fall in einer Ebene. Integrale. Umformung dieser letztern mittelst Polar-Koordinaten. Winkel-Geschwindigkeit (IV). Das eine dieser Integrale giebt den zu dt gehörigen Bogen; das andere den Sektor.

§. 42. Central-Bewegung in der Ebene (I.); im körperlichen Raume betrachtet (II.).

§. 43. Spezielle Central-Bewegung, wo die Kraft eine Funktion bloß der Entfernung r vom Centro der Bewegung ist.

§. 44. Gleichungen der freien Bewegung, wenn der Anfangs-Punkt der Koordinaten selber in Bewegung ist.

Dritter Abschnitt. Bewegung auf einer gegebenen Fläche und in bestimmt vorgeschriebener Bahn (§. 45. — §. 48.).

§. 45. Bewegung in einer Fläche. Bestimmung des Druckes der Fläche. Bewegung auf einer Ebene.

§. 46. Bewegung in einer Linie. Bestimmung des Druckes der Größe und Richtung nach.

§. 47. Bewegung in einer ebenen Kurve.

§. 48. Von der Centrifugal-Kraft.

Vierter Abschnitt. Verschiedene Uebungs-Aufgaben zur Lehre der krummlinigen Bewegung (§. 49. — §. 51.).

§. 49. Zur Bewegung der Himmelskörper.

§. 50. Zur Ballistik.

§. 51. Pendel-Bewegung.

# A. Höhere Analysis.

# Höhere Analysis.

## Erstes Kapitel.

### Gesetze und allgemeinster Zweck des Differenziirens.

§. 1.

Wenn Ausdrücke a,x,b,y,ꝛc. noch keine bestimmten Ziffern-Werthe angenommen haben, sondern noch ganz unbestimmt (allgemein) gedacht sind, so werden sie veränderliche (variable) genannt. — Beständige, unveränderliche (konstante) heißen sie, so lange man sich bei ihnen einen völlig bestimmten Werth denkt, der unverändert derselbe bleiben soll.

§. 2.

Wenn der Werth eines Ausdrucks f von den veränderlichen Werthen der Ausdrücke a,x,b,y,ꝛc. abhängig ist, so wird f eine Funktion dieser letztern Veränderlichen genannt, und dieser Ausdruck f ist (in der Regel) dann selbst ein Veränderlicher. — Besteht diese Abhängigkeit des Ausdrucks f von a,x,b,y,ꝛc. darin, daß f unmittelbar aus a,x,b,y,ꝛc. zusammengesetzt ist, so sagt man: „diese letztern Veränderlichen a,x,b,y,ꝛc. kommen in dem Ausdruck f explicit (unmittelbar) vor," und f selbst wird dann eine explicite (unmittelbare) Funktion von a,x,b,y,ꝛc. genannt. — Ist aber f bloß eine unmittelbare Zusammensetzung, z. B. aus b,y,z,ꝛc. allein, ohne a oder x zu enthalten, während jedoch z. B. y,z,ꝛc. selber wieder Funktionen

von a und x vorstellen, so sagt man: „a und x kommen in f implicit (mittelbar)*) vor," und f heißt dann zwar immer noch eine explicite Funktion von b,y,z,&c., aber eine implicite (mittelbare) Funktion von a und x.

Eben so kann f die Veränderlichen a und x explicit und implicit zugleich enthalten, wenn nämlich f eine explicite Funktion von a,x,b,y,z,&c. ist, und b,y,z,&c. selber wieder Funktionen von a und x vorstellen.

Enthält aber f einen Veränderlichen x gar nicht, weder explicit noch implicit, so sagt man: „f sey nach x konstant."

## §. 3.

Eine explicite Funktion f der Veränderlichen a,x,b,y,z,&c. kann entwikkelt, d. h. schon völlig hergestellt, oder verwikkelt, d. h. mittelst einer Gleichung zwischen f,a,x,b,y,z,&c. gegeben seyn, welche letztere erst noch nach f aufgelöst werden muß, um zuletzt f entwikkelt gegeben zu haben. — Im erstern Falle schreibt man

1) $$f = f_{a,x,b,y,z,\&c.}$$

wo das Zeichen zur Rechten den, aus a,x,b,y,z,&c. zusammengesetzten Ausdruck vorstellt, der (selber nicht f enthält, sondern) durch den einzigen Buchstaben f (wie solcher zur Linken zu sehen ist) bloß bezeichnet wird. — Im andern Falle schreibt man, indem man sich die Gleichung auf 0 gebracht denkt, z. B.

2) $$\Pi_{f,a,x,b,y,z,\&c.} = 0,$$

wo das Zeichen zur Linken einen durch $\Pi$ bezeichneten Ausdruck vorstellt, der aus f,a,x,b,y,z,&c. auf eine gegebene Weise explicit zusammengesetzt ist (und der natürlich nicht noch $\Pi$ enthält).

In beiden Fällen aber kann man die Gleichung (1.) oder (2.) zwischen den Veränderlichen f,a,x,b,y,z,&c., nach jedem dieser Veränderlichen aufgelöst sich denken, und aus diesem Ge-

*) Wir gebrauchen hier das Wort implicit in einer andern Bedeutung als die gewöhnliche. — Gewöhnlich sagt man: eine Funktion f wäre implicit gegeben, wenn hier, wie im (§. 3.), gesagt wird, sie wäre verwikkelt gegeben. Eben so wird oft explicit gebraucht, wo wir hier entwikkelt sagen.

ſichtspunkte erſcheint dann jeder dieſer Veränderlichen als eine (verwikkelt gegebene, aber) explicite Funktion der übrigen.

§. 4.

Sind aber zwiſchen m ſolchen Veränderlichen, $\mu$ ſolche Gleichungen gegeben, ſo erſcheinen je $\mu$ von dieſen m Veränderlichen als (in der Regel verwikkelt gegebene, aber) explicite Funktionen der $m-\mu$ übrigen Veränderlichen.

§. 5.

Iſt f eine explicite Funktion mehrerer Veränderlichen a,x,b,y,z, ꝛc., und iſt ſie deshalb durch $f_{a,x,b,y,z,\,\text{ꝛc.}}$ bezeichnet, ſo iſt ſie natürlich auch eine explicite Funktion eines einzigen a, oder x, oder ꝛc. dieſer Veränderlichen, und in ſo ferne wird dieſelbe dann auch bloß ſo:

$f_a$, oder $f_x$, oder ꝛc.

geſchrieben. — Sie iſt aber dann auch zugleich eine explicite Funktion von je zweien dieſer Veränderlichen, und in ſo ferne wird ſie dann auch durch

$f_{a,x}$, $f_{a,b}$, $f_{x,y}$, $f_{a,y}$, $f_{b,y}$, ꝛc.

bezeichnet. U. ſ. w. f. — Dieſelbe Funktion f kann a oder x, implicit oder explicit und implicit zugleich enthalten, und dann wird ſie, um dies anzudeuten, ſo geſchrieben:

$f_{(a)}$, oder $f_{(x)}$.

Und enthält ſie a und x zugleich bloß implicit, oder explicit und auch implicit, ſo wird ſie, will man dies ſichtbar machen, ſo geſchrieben:

$f_{(a,x)}$, oder auch ſo: $f_{(a),(x)}$.

U. ſ. w. f.

§. 6.

Wird in einer Funktion $f_x$ ſtatt x irgend etwas anderes geſetzt, z. B. $\alpha$ oder $x+h$, ſo wird das, was herauskommt, durch

$[f_x]_\alpha$ oder $[f_x]_{x+h}$

bezeichnet; ſo oft aber keine Zweideutigkeit zu befürchten iſt, bloß durch

$f_\alpha$ oder $f_{x+h}$.

Desgleichen: Wird in einer Funktion $f_{x,y}$ statt x etwas anderes, z. B. $\alpha$, oder $x+h$, und zu gleicher Zeit auch statt y etwas anderes, z. B. $\beta$, oder $y+h$ gesetzt, so bezeichnen wir das, was nun herauskommt, durch

$$[f_{x,y}]_{\alpha,\beta} \quad \text{oder durch} \quad [f_{x,y}]_{x+h,y+k}.$$

So oft aber keine Zweideutigkeit zu befürchten ist, schreiben wir auch bloß dafür:

$$f_{\alpha,\beta} \quad \text{oder} \quad f_{x+h,y+k}.$$

U. s. w. f.

## §. 7.

I. Verstehen wir unter $f_x$ etwa bloß die Potenz $x^m$, so wird $f_{x+h}$ die Potenz $(x+h)^m$ vorstellen. Man hat also unter dieser Voraussetzung nicht bloß

1) $f_x = x^m$, sondern auch $f_{x+h} = (x+h)^m$,

also nach dem binomischen Lehrsatze:

$$2) \quad f_{x+h} = x^m + m \cdot x^{m-1} \cdot h + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \cdot x^{m-2} \cdot h^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot x^{m-3} h^3 + \cdots$$

oder, wenn wir anders schreiben *):

$$3) \quad f_{x+h} = x^m + m \cdot x^{m-1} \cdot \frac{h}{1!} + m(m-1) x^{m-2} \cdot \frac{h^2}{2!} + m(m-1)(m-2) x^{m-3} \cdot \frac{h^3}{3!} + \cdots$$

Beobachten wir diesen Ausdruck zur Rechten aufmerksamer, so finden wir: „jeder folgende Koeffizient der verschiedenen Potenzen von h (mit denen wir ihre Nenner innigst verbunden ansehen) wird gefunden, wenn wir den nächstvorhergehenden Koeffizienten mit dem Exponenten der Potenz von x multipliziren und dann 1 vom Exponenten subtrahiren, während das allererste Glied $x^m$ die Funktion $f_x$ selbst ist."

*) Wir schreiben allemal n! statt des Produkts $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$, so daß 4! das Produkt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$, eben so 2! das Produkt $1 \cdot 2$ bedeutet, während man, der Gleichförmigkeit wegen, unter 1! bloß 1 versteht.

Bezeichnen wir nun das, was mit jedem dieser Koeffizienten (nach vorstehender Regel) vorgenommen werden soll, um den nächstfolgenden Koeffizienten zu geben, dadurch, daß wir diesem vorhergehenden Koeffizienten ein (rundes) ∂ vorsetzen, so wird derselbe binomische Lehrsatz (3.) auch noch diese Form

4) $f_{x+h} = f_x + \partial f_x \cdot \frac{h}{1!} + \partial^2 f_x \cdot \frac{h^2}{2!} + \partial^3 f_x \cdot \frac{h^3}{3!} + \cdots$

annehmen, wenn wir, der Bequemlichkeit wegen, noch

5) $\partial^2 f_x$ statt $\partial(\partial f_x)$

6) $\partial^3 f_x$ statt $\partial(\partial^2 f_x)$

u. s. w. f. schreiben.

II. Verstehen wir unter $f_x$ die Summe solcher Potenz-Ausdrücke $A \cdot x^m + B \cdot x^n + C \cdot x^p + \cdots$,
so finden wir $f_{x+h}$ durch denselben binomischen Lehrsatz. Und mittelst der analogen Betrachtung finden wir noch, daß die Gleichung (I. 4.) auch jetzt noch gilt, wenn wir nur mit dem (runden) ∂ (dem $f_x$ oder irgend einem der übrigen Koeffizienten vorgesetzt) das Verfahren bezeichnen, welches mit dem allerersten Gliede $f_x$ vorgenommen werden muß, um den Koeffizienten von $h^1$ (der für $f_{x+h}$ gefundenen Entwikkelung) zu geben; welches Verfahren *jetzt* darin besteht, daß man *jedes* Potenzglied mit seinem Exponenten multiplizirt, und dann 1 vom Exponenten subtrahirt.

III. Man kommt, diesen Betrachtungen zu Folge, auf die Vermuthung, daß wohl immer, welche Funktion von x auch unter $f_x$ verstanden werden möge, die Gleichung (I. 4.) gelten werde, wo das dem allerersten Glied $f_x$ (und dann jedem folgenden Koeffizienten) vorgesetzte ∂ eine und dieselbe praktische Regel andeutet, und zwar jedesmal diejenige, vermöge welcher aus $f_x$ der Koeffizient von $h^1$ (der für $f_{x+h}$ zu entwikkelnden Reihe) abgeleitet wird.

Um diese Vermuthung zur Gewißheit zu erheben, giebt man sich die allgemeine Aufgabe: „Man soll, wie auch die Funktion „$f_x$ gedacht seyn mag, $f_{x+h}$ in eine nach ganzen Potenzen von „h fortlaufende Reihe verwandeln."

Man sucht diese Aufgabe mittelst der Methode der unbestimmten Koeffizienten zu lösen, setzt daher

$$1)\quad f_{x+h} = A_x + A'_x \cdot \frac{h}{1!} + A''_x \cdot \frac{h^2}{2!} + A'''_x \cdot \frac{h^3}{3!} + A^{IV}_x \cdot \frac{h^4}{4!} + \cdots$$

und sucht nun diese unbestimmten Koeffizienten $A_x$, $A'_x$, $A''_x$, $A'''_x$, $A^{IV}_x$, $\cdots$ (welche offenbar Funktionen von x seyn werden) zu bestimmen.

Setzt man aber 0 statt h, so erhält man aus (1.) sogleich

$$2)\quad f_x = A_x.$$

Subtrahirt man diese Gleichung (2.) von der (1.), und dividirt man die entstehende Gleichung durch h, so findet man

$$3)\quad \frac{f_{x+h} - f_x}{h} = A'_x + A''_x \cdot \frac{h}{2!} + A'''_x \cdot \frac{h^2}{3!} + A^{IV}_x \cdot \frac{h^3}{4!} + \cdots.$$

Setzt man hier, nachdem links wirklich durch h wegdividirt ist, damit nicht 0 im Nenner erscheine, 0 statt h, so findet sich

$$4)\quad \frac{f_{x+h} - f_x}{h} \text{ (für } h = 0) = A'_x.$$

Bezeichnet man nun das hier in der Gleichung (4.) links vorzunehmende Geschäft dadurch, daß man dem $f_x$ (woraus $f_{x+h}$, dann $f_{x+h} - f_x$, endlich $\frac{f_{x+h} - f_x}{h}$ gebildet wird, um zuletzt, nachdem vorher mit h wirklich wegdividirt ist, 0 statt h zu setzen) ein (rundes) $\partial$ vorsetzt, so kann man die Gleichung (4.) so schreiben:

$$5)\quad \partial f_x = A'_x.$$

Versteht man also, wenn $\varphi_x$ irgend eine beliebige Funktion von x ist, unter $\partial\varphi_x$ das, was aus $\frac{\varphi_{x+h} - \varphi_x}{h}$ wird, wenn man zuvor durch h wirklich wegdividirt, und dann 0 statt h setzt, — so hat man bis jetzt gefunden nach (1. 4. und 5.)

$$6)\quad f_{x+h} = f_x + \partial f_x \cdot \frac{h}{1!} + \left\{ \begin{array}{l} \text{die noch unbekannten übrigen} \\ \text{Glieder mit den höheren Po-} \\ \text{tenzen von h;} \end{array} \right\}$$

aber deshalb auch, weil dies für jede Funktion von x gilt,

$$7)\quad A'_{x+k} = A'_x + \partial A'_x \cdot \frac{k}{1!} + \left\{\begin{array}{l}\text{die noch unbekannten übri-}\\ \text{gen Glieder mit den hö-}\\ \text{hern Potenzen von k;}\end{array}\right\}$$

$$8)\quad A''_{x+k} = A''_x + \partial A''_x \cdot \frac{k}{1!} + \left\{\begin{array}{l}\text{die noch unbekannten übri-}\\ \text{gen Glieder mit den hö-}\\ \text{hern Potenzen von k;}\end{array}\right\}$$

u. s. w. f.

Setzt man aber in die Gleichung (1.) zuerst überall $x+k$ statt x, während man statt $A'_{x+k}$, $A''_{x+k}$, ꝛc. sogleich die Ausdrücke rechts in (7. 8.) substituirt; setzt man ferner in (1.) überall $h+k$ statt h, während man rechts statt $(h+k)^2$, $(h+k)^3$, ꝛc. sogleich die Glieder der Binomial-Entwikkelung substituirt; und vergleicht man diese letztern beiden Resultate (welche beide ein und dasselbe, nämlich $f_{x+h+k}$ vorstellen) mit einander —, vergleicht man namentlich die in beiden vorkommenden mit $k^1$ affizirten Glieder, so ergiebt sich sogleich als Resultat dieser Vergleichung

$$A''_x = \partial A'_x, \quad A'''_x = \partial A''_x, \quad A^{IV}_x = \partial A'''_x, \text{ ꝛc.}$$

Also ist nach unserer Bezeichnung in (I. 5. 6.), und weil oben in (5.) $A'_x = \partial f_x$ ist, auch noch

$$A''_x = \partial^2 f_x, \quad A'''_x = \partial^3 f_x, \quad A^{IV}_x = \partial^4 f_x, \text{ ꝛc.}$$

Folglich gilt die Gleichung (I. 4.), nämlich

$$(\odot)\cdots\quad f_{x+h} = f_x + \partial f_x \cdot h + \partial^2 f_x \cdot \frac{h^2}{2!} + \partial^3 f_x \cdot \frac{h^3}{3!} + \cdots$$

für jede beliebige Funktion $f_x$, sobald man nur unter $\partial\varphi_x$ für jede Funktion $\varphi_x$ das versteht, was aus $\frac{\varphi_{x+h} - \varphi_x}{h}$ wird, wenn man zuerst durch h wirklich wegdividirt, und dann 0 statt h setzt; oder mit andern Worten, sobald man $\partial\varphi_x$ (wie auch $\varphi_x$ gedacht seyn mag) dadurch findet, daß man $\varphi_{x+h}$ in eine nach ganzen Potenzen von h fortlaufende Reihe entwikkelt, und den

Koeffizienten von $h^1$ dieser Reihe nimmt, während hier unter $\varphi_x$ zuerst $f_x$, dann $\partial f_x$, dann $\partial^2 f_x$, dann $\partial^3 f_x$, ꝛc. gedacht wird.

Dieser Satz (I. 4. oder III. ⊙) in der jetzigen Allgemeinheit aufgefaßt, wird der Taylor'sche Lehrsatz genannt. Die Koeffizienten $\partial f_x$, $\partial^2 f_x$, $\partial^3 f_x$, ꝛc. heißen der 1ste, 2te, 3te, ꝛc. Differenzial-Koeffizient von $f_x$, auch die Ableitungen von $f_x$ nach x; und das Geschäft: aus jedem derselben den folgenden zu finden, welches immer und unverändert ein und dasselbe bleibt und durch ein vorgesetztes (rundes) ∂ bezeichnet wird, kann man das Differenziiren der Funktion $f_x$ nach x nennen. — Das (runde) ∂ ist demnach ein Operations-Zeichen für eine völlig bestimmt vorgeschriebene Operation, oder für eine Reihe von Operationen.

## §. 8.

Denkt man sich nun nach und nach unter $f_x$ die einfachsten Funktionen

$$A \cdot x^m, \qquad a^x, \qquad \log x,$$

wo $\log x$ den natürlichen Logarithmen bedeutet, dessen Basis

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \text{in inf.}$$
$$= 2{,}71828128\cdots \qquad \text{ist;}$$

und entwikkelt man in jedem der 3 Fälle $f_{x+h}$ direkt (nach den Elementen der Analysis des Endlichen *)) in Reihen (ohne jedoch mehr als das mit $h^1$ affizirte Glied herzustellen), so findet

---

*) Als Definition der allgemeinen Potenz $a^x$ hat man die Reihe

1) $$a^x = 1 + x \cdot \log a + \frac{x^2 (\log a)^2}{2!} + \frac{x^3 (\log a)^3}{3!} + \cdots$$

Aus ihr folgt (für $a = e$)

2) $$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

Und daraus findet sich

3) $$\log(1+x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \cdots$$

Diese 3 Resultate werden hier als bekannt vorausgesetzt.

man augenblicklich die Differenzial-Koeffizienten dieser 3 einfachsten Funktionen von x, nämlich:

$$1)\quad \partial(A\cdot x^m) = m\cdot A\cdot x^{m-1},$$
$$2)\quad \partial(a^x) = a^x\cdot \log a,$$
$$3)\quad \partial(\log x) = \frac{1}{x}.$$

Und setzt man in (1.) $A=1$ und $m=1$, so erhält man noch $4)\quad \partial x = 1$,
so wie aus (2.) für $a=e$, weil $\log e=1$ ist,
$$5)\quad \partial(e^x) = e^x.$$

## §. 9.

Nimmt man die beiden Gleichungen

$$\varphi_{x+h} = \varphi_x + \partial\varphi_x\cdot\frac{h}{1!} + \partial^2\varphi_x\cdot\frac{h^2}{2!} + \partial^3\varphi_x\cdot\frac{h^3}{3!} + \cdots$$
$$\psi_{x+h} = \psi_x + \partial\psi_x\cdot\frac{h}{1!} + \partial^2\psi_x\cdot\frac{h^2}{2!} + \partial^3\psi_x\cdot\frac{h^3}{3!} + \cdots,$$

und addirt man sie beide zu einander, subtrahirt man sie beide von einander, multiplizirt und dividirt man sie endlich mit oder durch einander, so erhält man zur Rechten Reihen, die nach Potenzen von h fortlaufen, und welche bezüglich den Resultaten zur Linken, nämlich

$$[\varphi_x+\psi_x]_{x+h},\ [\varphi_x-\psi_x]_{x+h},\ [\varphi_x\cdot\psi_x]_{x+h} \text{ und } \left[\frac{\varphi_x}{\psi_x}\right]_{x+h},$$

gleich sind. Nimmt man nun in jeder der erhaltenen Reihen rechts, den Koeffizienten des mit $h^1$ affizirten Gliedes, so hat man die Differenzial-Koeffizienten dieser 4 vorstehenden Funktionen $\varphi+\psi$, $\varphi-\psi$, $\varphi\cdot\psi$ und $\frac{\varphi}{\psi}$; und so findet man

$$1)\quad \partial(\varphi_x\pm\psi_x) = \partial\varphi_x\pm\partial\psi_x;$$
$$2)\quad \partial(\varphi_x\cdot\psi_x) = \varphi_x\cdot\partial\psi_x + \psi_x\cdot\partial\varphi_x;$$
$$3)\quad \partial\left(\frac{\varphi_x}{\psi_x}\right) = \frac{\psi_x\cdot\partial\varphi_x - \varphi_x\cdot\partial\psi_x}{\psi_x^2} = \frac{\partial\varphi_x}{\psi_x} - \frac{\varphi_x\cdot\partial\psi_x}{\psi_x^2}.$$

Dieser Resultate bedient man sich aber, um die Differenzial-Koeffizienten der aus $\varphi_x$ und $\psi_x$ zusammengesetzten Funktionen links, auf die Differenzial-Koeffizienten der einfachern Bestandtheile $\varphi_x$ und $\psi_x$ selbst zurückzuführen.

Ganz auf demselben Wege aber noch leichter, findet man

5) $\vartheta(A\cdot\varphi_x) = A\cdot\vartheta\varphi_x$;

6) $\vartheta(A\varphi_x+B) = A\cdot\vartheta\varphi_x$;

also, wenn B gar kein x enthält (nach x konstant ist),

7) $\vartheta(B) = 0$.

Anmerkung. Mittelst dieser Formeln des (§. 9.) in Verbindung mit denen des (§. 8.) kann man die Differenzial-Koeffizienten finden von allen Funktionen von x, welche aus den einfachsten Funktionen irgendwie zusammengesetzt sind, wenn nur in ihnen nicht zwei Funktionen von x mit einander potenzirt, oder eine Funktion von x mit einem (nach x) konstanten Ausdruck potenzirt, radizirt oder logarithmirt, und auch nicht ein solcher konstanter Ausdruck mit einer Funktion von x potenzirt erscheint, in welchen letztern Fällen diese Formeln nicht ausreichen würden. — Um daher die Differenzial-Koeffizienten aller Funktionen von x finden zu können, muß man noch neue Betrachtungen anstellen.

Beispiele. Nach dem bis jetzt Angegebenen findet man aber bereits

$\vartheta(a\cdot x^m) = ma\cdot x^{m-1}$; $\quad\vartheta(ma\cdot x^{m-1}) = m(m-1)a\cdot x^{m-2}$;

$\vartheta(a\cdot x^{\frac{1}{3}}+b\cdot x^4-c\cdot x^5) = \frac{1}{3}a\cdot x^{-\frac{2}{3}}+4b\cdot x^3-5c\cdot x^4$;

$\vartheta\left(\frac{b}{x}\right) = b\cdot\vartheta\left(\frac{1}{x}\right) = b\cdot\vartheta(x^{-1}) = -b\cdot x^{-2} = -\frac{b}{x^2}$;

$\vartheta\left(-\frac{b}{x^2}\right) = -b\cdot\vartheta(x^{-2}) = 2b\cdot x^{-3} = \frac{2b}{x^3}$;

$\vartheta(b\sqrt[3]{x}) = b\cdot\vartheta(x^{\frac{1}{3}}) = \frac{1}{3}b\cdot x^{-\frac{2}{3}} = \frac{b}{3\sqrt[3]{x^2}}$;

$\vartheta\left(\frac{b}{3\sqrt[3]{x^2}}\right) = \frac{b}{3}\cdot\vartheta(x^{-\frac{2}{3}}) = -\frac{2b}{9}\cdot x^{-\frac{5}{3}} = -\frac{2b}{9x\cdot\sqrt[3]{x^2}}$;

$\vartheta\left(-\frac{2b}{9x\cdot\sqrt[3]{x^2}}\right) = -\frac{2b}{9}\cdot\vartheta(x^{-\frac{5}{3}}) = \frac{10b}{27}\cdot x^{-\frac{8}{3}} = \frac{10b}{27x^2\cdot\sqrt[3]{x^2}}$;

$$\partial\left(\frac{3x^2-1}{4x}\right)=\frac{4x\cdot\partial(3x^2-1)-(3x^2-1)\cdot\partial(4x)}{16x^2},$$

aber $\partial(3x^2-1)=6x;\qquad \partial(4x)=4;$

also

$$\alpha)\quad \partial\left(\frac{3x^2-1}{4x}\right)=\frac{12x^2+4}{16x^2}=\frac{3x^2+1}{4x^2};$$

$$\partial\left(\frac{3x^2+1}{4x^2}\right)=\partial\left(\tfrac{1}{4}(3x^2+1)\cdot x^{-2}\right)=\tfrac{1}{4}\partial\left((3x^2+1)\cdot x^{-2}\right),$$

aber $\partial\left((3x^2+1)\cdot x^{-2}\right)=x^{-2}\cdot\partial(3x^2+1)+(3x^2+1)\cdot\partial(x^{-2})$

und $\partial(3x^2+1)=6x,\qquad \partial(x^{-2})=-2x^{-3}=-\frac{2}{x^3},$

also

$$\beta)\quad \partial\left(\frac{3x^2+1}{4x^2}\right)=-\frac{1}{2x^3}.$$

Weil man übrigens statt $\frac{3x^2-1}{4x}$ auch $\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}x^{-1}$ schreiben konnte, und auch $\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cdot x^{-2}$ statt $\frac{3x^2+1}{4x^2}$, so hätte man die beiden letztern Resultate ($\alpha$. und $\beta$.) noch viel leichter gefunden.

## §. 10.

Derselbe Ausdruck f, der als eine Funktion von x gedacht wird, kann zugleich auch eine Funktion von y seyn, und dann kann man den Differenzial-Koeffizienten von f nach x, aber auch den von f nach y finden wollen, und man muß beide, die sehr von einander verschieden sind, auch durch die Bezeichnung

$$\partial f_x,\qquad \partial f_y$$

sorgfältig von einander unterscheiden. — Und weil $\partial f_x$ und $\partial f_y$ selber wieder Funktionen von x und y seyn werden, so kann man von jeder derselben noch einmal den Differenzial-Koeffizienten nehmen; dies giebt außer den schon bekannten Zeichen $\partial^2 f_x$ und $\partial^2 f_y$, auch noch die Zeichen $\partial(\partial f_x)_y$ und $\partial(\partial f_y)_x$, wo $\partial(\partial f_x)_y$ den Differenzial-Koeffizienten nach y bedeutet von der Funktion $\partial f_x$, in so ferne letztere y enthält und daher eine Funktion von y ist. Gerade so bedeutet $\partial(\partial f_y)_x$ den Differenzial-Koeffizienten nach x, von der Funktion $\partial f_y$, in so ferne letztere auch noch x enthält, demnach auch eine Funktion von x ist.

Ist aber f eine solche explicite Funktion von x und y, und

Dieser Resultate bedient man sich aber, um die Differenzial-Koeffizienten der aus $\varphi_x$ und $\psi_x$ zusammengesetzten Funktionen links, auf die Differenzial-Koeffizienten der einfachern Bestandtheile $\varphi_x$ und $\psi_x$ selbst zurückzuführen.

Ganz auf demselben Wege aber noch leichter, findet man

5) $\partial(A \cdot \varphi_x) = A \cdot \partial\varphi_x$;

6) $\partial(A\varphi_x + B) = A \cdot \partial\varphi_x$;

also, wenn B gar kein x enthält (nach x konstant ist),

7) $\partial(B) = 0$.

Anmerkung. Mittelst dieser Formeln des (§. 9.) in Verbindung mit denen des (§. 8.) kann man die Differenzial-Koeffizienten finden von allen Funktionen von x, welche aus den einfachsten Funktionen irgendwie zusammengesetzt sind, wenn nur in ihnen nicht zwei Funktionen von x mit einander potenzirt, oder eine Funktion von x mit einem (nach x) konstanten Ausdruck potenzirt, radizirt oder logarithmirt, und auch nicht ein solcher konstanter Ausdruck mit einer Funktion von x potenzirt erscheint, in welchen letztern Fällen diese Formeln nicht ausreichen würden. — Um daher die Differenzial-Koeffizienten aller Funktionen von x finden zu können, muß man noch neue Betrachtungen anstellen.

Beispiele. Nach dem bis jetzt Angegebenen findet man aber bereits

$\partial(a \cdot x^m) = ma \cdot x^{m-1}$; $\quad \partial(ma \cdot x^{m-1}) = m(m-1)a \cdot x^{m-2}$;

$\partial(a \cdot x^{\frac{3}{2}} + b \cdot x^4 - c \cdot x^5) = \frac{3}{2}a \cdot x^{-\frac{1}{2}} + 4b \cdot x^3 - 5c \cdot x^4$;

$\partial\left(\frac{b}{x}\right) = b \cdot \partial\left(\frac{1}{x}\right) = b \cdot \partial(x^{-1}) = -b \cdot x^{-2} = -\frac{b}{x^2}$;

$\partial\left(-\frac{b}{x^2}\right) = -b \cdot \partial(x^{-2}) = 2b \cdot x^{-3} = \frac{2b}{x^3}$;

$\partial(b\sqrt[3]{x}) = b \cdot \partial(x^{\frac{1}{3}}) = \frac{1}{3}b \cdot x^{-\frac{2}{3}} = \frac{b}{3\sqrt[3]{x^2}}$;

$\partial\left(\frac{b}{3\sqrt[3]{x^2}}\right) = \frac{b}{3} \cdot \partial(x^{-\frac{2}{3}}) = -\frac{2b}{9} \cdot x^{-\frac{5}{3}} = -\frac{2b}{9x \cdot \sqrt[3]{x^2}}$;

$\partial\left(-\frac{2b}{9x \cdot \sqrt[3]{x^2}}\right) = -\frac{2b}{9} \cdot \partial(x^{-\frac{5}{3}}) = \frac{10b}{27} \cdot x^{-\frac{8}{3}} = \frac{10b}{27x^2 \cdot \sqrt[3]{x^2}}$;

$$\partial\left(\frac{3x^2-1}{4x}\right)=\frac{4x\cdot\partial(3x^2-1)-(3x^2-1)\cdot\partial(4x)}{16x^2},$$

aber $\partial(3x^2-1)=6x; \qquad \partial(4x)=4;$

also

α) $$\partial\left(\frac{3x^2-1}{4x}\right)=\frac{12x^2+4}{16x^2}=\frac{3x^2+1}{4x^2};$$

$$\partial\left(\frac{3x^2+1}{4x^2}\right)=\partial\left(\tfrac{1}{4}(3x^2+1)\cdot x^{-2}\right)=\tfrac{1}{4}\partial\left((3x^2+1)\cdot x^{-2}\right),$$

aber $$\partial\left((3x^2+1)\cdot x^{-2}\right)=x^{-2}\cdot\partial(3x^2+1)+(3x^2+1)\cdot\partial(x^{-2})$$

und $$\partial(3x^2+1)=6x, \qquad \partial(x^{-2})=-2x^{-3}=-\frac{2}{x^3},$$

also

β) $$\partial\left(\frac{3x^2+1}{4x^2}\right)=-\frac{1}{2x^3}.$$

Weil man übrigens statt $\frac{3x^2-1}{4x}$ auch $\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}x^{-1}$ schreiben konnte, und auch $\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cdot x^{-2}$ statt $\frac{3x^2+1}{4x^2}$, so hätte man die beiden letztern Resultate (α. und β.) noch viel leichter gefunden.

## §. 10.

Derselbe Ausdruck f, der als eine Funktion von x gedacht wird, kann zugleich auch eine Funktion von y seyn, und dann kann man den Differenzial-Koeffizienten von f nach x, aber auch den von f nach y finden wollen, und man muß beide, die sehr von einander verschieden sind, auch durch die Bezeichnung

$$\partial f_x, \qquad \partial f_y$$

sorgfältig von einander unterscheiden. — Und weil $\partial f_x$ und $\partial f_y$ selber wieder Funktionen von x und y seyn werden, so kann man von jeder derselben noch einmal den Differenzial-Koeffizienten nehmen; dies giebt außer den schon bekannten Zeichen $\partial^2 f_x$ und $\partial^2 f_y$, auch noch die Zeichen $\partial(\partial f_x)_y$ und $\partial(\partial f_y)_x$, wo $\partial(\partial f_x)_y$ den Differenzial-Koeffizienten nach y bedeutet von der Funktion $\partial f_x$, in so ferne letztere y enthält und daher eine Funktion von y ist. Gerade so bedeutet $\partial(\partial f_y)_x$ den Differenzial-Koeffizienten nach x, von der Funktion $\partial f_y$, in so ferne letztere auch noch x enthält, demnach auch eine Funktion von x ist.

Ist aber f eine solche explicite Funktion von x und y, und

setzt man in ihr zuerst $x+h$ statt $x$, so daß man hat, nach dem Taylor'schen Lehrsatze,

$$f_{x+h} = f_x + \partial f_x \cdot h + \partial^2 f_x \cdot \frac{h^2}{2!} + \partial^3 f_x \cdot \frac{h^3}{3!} + \cdots,$$

so kann man jetzt links und rechts überall statt $y$ wiederum $y+k$ setzen, und man erhält dann, wenn man das, was aus $f_x$, $\partial f_x$, $\partial^2 f_x$, $\partial^3 f_x$, $\cdots$ wird (in so ferne sie Funktionen von $y$ sind), wenn $y+k$ statt $y$ gesetzt wird, nach demselben Taylor'schen Lehrsatze in Reihen verwandelt, die nach Potenzen von $k$ fortlaufen, das Resultat

$$\begin{aligned} f_{x+h,y+k} = f_{x,y} &+ \partial f_x \cdot h + \partial^2 f_x \cdot \frac{h^2}{2!} + \partial^3 f_x \cdot \frac{h^3}{3!} + \cdots \\ &+ \partial f_y \cdot k + \partial(\partial f_x)_y \cdot \frac{hk}{2!} + \partial(\partial^2 f_x)_y \cdot \frac{h^2 k}{2!\,1!} + \cdots \\ &+ \partial^2 f_y \cdot \frac{k^2}{2!} + \partial^2(\partial f_x)_y \cdot \frac{hk^2}{1!\,2!} + \cdots \\ &+ \partial^3 f_y \cdot \frac{k^3}{3!} + \cdots \end{aligned}$$

Nimmt man aber den umgekehrten Gang, und setzt man in $f$ zuerst $y+k$ statt $y$, so daß man zuerst hat

$$f_{y+k} = f_y + \partial f_y \cdot k + \partial^2 f_y \cdot \frac{k^2}{2!} + \partial^3 f_y \cdot \frac{k^3}{3!} + \cdots;$$

und setzt man dann erst hier $x+h$ statt $x$, so erhält man für $f_{x+h,y+k}$ ganz dieselbe Doppelreihe von kurz vorher, nur daß der Koeffizient von $hk$ jetzt $\partial(\partial f_y)_x$, die Koeffizienten von $h^2k$ und $hk^2$ jetzt bezüglich $\partial^2(\partial f_y)_x$ und $\partial(\partial^2 f_y)_x$ werden; u. s. w. f.

Daraus folgt aber, weil beide Resultate identisch seyn müssen,

1) $\partial(\partial f_x)_y = \partial(\partial f_y)_x$;

2) $\partial(\partial^2 f_x)_y = \partial^2(\partial f_y)_x$;

u. s. w. f.; d. h. man bekommt immer ein und dasselbe Resultat, im Falle von $f_{x,y}$ hinter einander Differenzial-Koeffizienten bald nach $x$, bald nach $y$, gefunden werden sollen, wenn man diese Operationen in beliebiger Ordnung auf einander folgen läßt.

wird, und nun bedenkt, daß im Falle der (I.):

$$f_{(x+g)} = f_{\varphi+h},$$

im Falle der (II.) dagegen:

$$f_{(x+g)} = f_{\varphi+h,\psi+k},$$

und im Falle der (III.):

$$f_{(x+g)} = f_{\varphi+h,\psi+k,\chi+l}$$

wird. — Entwikkelt man nun nach den Taylor'ſchen Lehrſätzen ($\odot$) des (§. 7.) oder ($\mathbb{C}$ und $\sigma^{\prime}$) des (§. 10.) $f_{\varphi+h}$, oder $f_{\varphi+h,\psi+k}$, oder $f_{\varphi+h,\psi+k,\chi+l}$ in die Reihen nach h, oder nach h und k, oder nach h, k und l; — und ſubſtituirt man zuletzt ſtatt h,k,l ihre Werthe (welche Reihen nach g ſind), ſo bekommt man in allen 3 Fällen $f_{(x+g)}$ in eine Reihe nach g geordnet; und nimmt man dann jedesmal den Koefficienten von $g^1$, welcher durch $\partial f_{(x)}$ bezeichnet wird, ſo wird man für ihn in jedem Falle genau den Ausdruck finden, wie ſolcher in den Formeln (I. II. oder III.) zur Rechten hingeſchrieben worden iſt.

Weil aber in der Formel (II.) $\psi$ jede beliebige Funktion von x ſeyn kann, ſo kann man auch $\psi = 1 \cdot x^1 = x$ ſetzen; dann wird $\partial\psi_x = \partial x_x = 1$, und die Formel (II.) geht in die (IV.) über.

Und nimmt man in der Formel (III.) $\chi = x$, ſo geht ſolche in die (V.) über.

Anmerkung. Setzt man in der Formel (II.) $f = \varphi \pm \psi$, oder $f = \varphi \cdot \psi$, oder $f = \frac{\varphi}{\psi}$, ſo erhält man ſogleich wieder die Formeln (1.—3.) des (§. 9.) — Setzt man aber in (I.) $f = A \cdot \varphi$ oder $f = A \cdot \varphi + B$, ſo ergeben ſich ſogleich die Formeln (5. 6.) des (§. 9.).

## §. 12.

Setzt man in (§. 11. I.) ſtatt f nach und nach $\varphi^m$, $a^\varphi$, $e^\varphi$, $log\,\varphi$, ſo erhält man augenblicklich

1) $\partial(\varphi^m)_{(x)} = m \cdot \varphi^{m-1} \cdot \partial\varphi_x$;

2) $\partial(a^\varphi)_{(x)} = a^\varphi \cdot log\,a \cdot \partial\varphi_x$;

3) $\partial(e^\varphi)_{(x)} = e^\varphi \cdot \partial\varphi_x$;

4) $\partial(log\,\varphi)_{(x)} = \frac{1}{\varphi} \cdot \partial\varphi_x = \frac{\partial\varphi_x}{\varphi}$.

## §. 11.

Ist f eine explicite Funktion von $\varphi$, ohne noch x explicit zu enthalten, und ist $\varphi$ wieder eine Funktion von x, also f eine implicite Funktion von x, die jedoch x nicht noch explicit enthält, so ist allemal

I. $\partial f_{(x)} = \partial f_\varphi \cdot \partial \varphi_x$, also $\partial f_\varphi = \frac{\partial f_{(x)}}{\partial \varphi_x}$, oder auch $\partial f_\varphi = \frac{\partial f_x}{\partial \varphi_x}$.

Ist aber f eine explicite Funktion von $\varphi$ und $\psi$, ohne x explicit zu enthalten; sind jedoch $\varphi$ und $\psi$ selber wieder Funktionen von x, so daß f den Veränderlichen x implicit in $\varphi$ und in $\psi$, aber explicit gar nicht enthält, so ist noch

II. $$\partial f_{(x)} = \partial f_\varphi \cdot \partial \varphi_x + \partial f_\psi \cdot \partial \psi_x.$$

Ist ferner f eine explicite Funktion von $\varphi$, $\psi$, $\chi$, ohne x, und sind $\varphi$, $\psi$, $\chi$ selber wieder Funktionen von x, so ist noch

III. $$\partial f_{(x)} = \partial f_\varphi \cdot \partial \varphi_x + \partial f_\psi \cdot \partial \psi_x + \partial f_\chi \cdot \partial \chi_x.$$

Und diese Sätze lassen sich beliebig erweitern.

Sollte aber f den Veränderlichen x nicht bloß implicit in $\varphi$, sondern auch noch explicit enthalten, so hätte man

IV. $$\partial f_{(x)} = \partial f_x + \partial f_\varphi \cdot \partial \varphi_x.$$

Enthielte ferner die Funktion f den Veränderlichen x implicit in $\varphi$ und $\psi$, und außerdem noch explicit, so wäre

V. $$\partial f_{(x)} = \partial f_x + \partial f_\varphi \cdot \partial \varphi_x + \partial f_\psi \cdot \partial \psi_x.$$

U. s. w. f.

Diese Sätze (I. II. III.) ergeben sich, wenn man in den Reihen zur Rechten der Gleichungen

$$\varphi_{x+g} = \varphi_x + \partial \varphi_x \cdot g + \partial^2 \varphi_x \cdot \frac{g^2}{2!} + \cdots$$

$$\psi_{x+g} = \psi_x + \partial \psi_x \cdot g + \partial^2 \psi_x \cdot \frac{g^2}{2!} + \cdots$$

$$\chi_{x+g} = \chi_x + \partial \chi_x \cdot g + \partial^2 \chi_x \cdot \frac{g^2}{2!} + \cdots$$

die Summe aller mit g, $g^2$, $g^3$, &c. affizirten Glieder bezüglich durch h, k, l bezeichnet, so daß

$$\varphi_{x+g} = \varphi + h,$$

$$\psi_{x+g} = \psi + k,$$

$$\chi_{x+g} = \chi + l$$

wird,

wird, und nun bedenkt, daß im Falle der (I.):

$$f_{(x+g)} = f_{\varphi+h},$$

im Falle der (II.) dagegen:

$$f_{(x+g)} = f_{\varphi+h,\psi+k},$$

und im Falle der (III.):

$$f_{(x+g)} = f_{\varphi+h,\psi+k,\chi+l}$$

wird. — Entwikkelt man nun nach den Taylor'schen Lehrsätzen (⊙) des (§. 7.) oder (☾ und ♂) des (§. 10.) $f_{\varphi+h}$, oder $f_{\varphi+h,\psi+k}$, oder $f_{\varphi+h,\psi+k,\chi+l}$ in die Reihen nach h, oder nach h und k, oder nach h, k und l; — und substituirt man zuletzt statt h,k,l ihre Werthe (welche Reihen nach g sind), so bekommt man in allen 3 Fällen $f_{(x+g)}$ in eine Reihe nach g geordnet; und nimmt man dann jedesmal den Koefizienten von $g^1$, welcher durch $\partial f_{(x)}$ bezeichnet wird, so wird man für ihn in jedem Falle genau den Ausdruck finden, wie solcher in den Formeln (I. II. oder III.) zur Rechten hingeschrieben worden ist.

Weil aber in der Formel (II.) $\psi$ jede beliebige Funktion von x seyn kann, so kann man auch $\psi = 1 \cdot x^1 = x$ setzen; dann wird $\partial\psi_x = \partial x_x = 1$, und die Formel (II.) geht in die (IV.) über.

Und nimmt man in der Formel (III.) $\chi = x$, so geht solche in die (V.) über.

Anmerkung. Setzt man in der Formel (II.) $f = \varphi \pm \psi$, oder $f = \varphi \cdot \psi$, oder $f = \frac{\varphi}{\psi}$, so erhält man sogleich wieder die Formeln (1.—3.) des (§. 9.) — Setzt man aber in (I.) $f = A \cdot \varphi$ oder $f = A \cdot \varphi + B$, so ergeben sich sogleich die Formeln (5. 6.) des (§. 9.).

## §. 12.

Setzt man in (§. 11. I.) statt f nach und nach $\varphi^m$, $a^\varphi$, $e^\varphi$, $log\,\varphi$, so erhält man augenblicklich

1) $\partial(\varphi^m)_{(x)} = m \cdot \varphi^{m-1} \cdot \partial\varphi_x$;

2) $\partial(a^\varphi)_{(x)} = a^\varphi \cdot log\,a \cdot \partial\varphi_x$;

3) $\partial(e^\varphi)_{(x)} = e^\varphi \cdot \partial\varphi_x$;

4) $\partial(log\,\varphi)_{(x)} = \frac{1}{\varphi} \cdot \partial\varphi_x = \frac{\partial\varphi_x}{\varphi}$.

Beispiele. Demnach findet sich:

$$\partial\left(\sqrt[3]{x^2-1}\right) = \partial(x^2-1)^{\frac{1}{3}} = \tfrac{1}{3}(x^2-1)^{-\frac{2}{3}}\cdot\partial(x^2-1) = \tfrac{2}{3}\frac{x}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}};$$

$$\partial\left(\tfrac{2}{3}\frac{x}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}\right) = -\frac{2}{9}\cdot\frac{x^2+3}{(x^2-1)\cdot\sqrt[3]{(x^2-1)^2}};$$

$$\partial(a^{px+q})_x = p\cdot log\, a\cdot a^{px+q};$$

$$\partial(e^{-bx^2})_x = -2bx\cdot e^{-bx^2};$$

$$\partial(e^{-bx^2})_b = -x^2\cdot e^{-bx^2};$$

$$\partial\left(log(1+x^2)\right) = \frac{2x}{1+x^2};$$

$$\partial\left(\frac{e^{xi}-e^{-xi}}{2i}\right) = \frac{e^{xi}+e^{-xi}}{2};$$

$$\partial\left(\frac{e^{xi}+e^{-xi}}{2}\right) = -\frac{e^{xi}-e^{-xi}}{2i};$$

$$\partial\left(log(x+\sqrt{1+x^2})\right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$\partial\left(log(x-\sqrt{1+x^2})\right) = -\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

## §. 13.

I. Aus der Definition der allgemeinen Potenz und der Logarithmen steht fest:

1) $a^x = 1+\frac{x\cdot log\, a}{1}+\frac{x^2\cdot(log\, a)^2}{2!}+\frac{x^3\cdot(log\, a)^3}{3!}+\cdots;$

2) $e^x = 1+\frac{x}{1}+\frac{x}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots;$

3) $log(1+x) = x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{5}x^5-\cdots,$

wo unter *log* ein für allemal der natürliche Logarithme verstanden wird, dessen Basis e aus (2.) hervorgeht, wenn daselbst 1 statt x gesetzt wird.

Ferner ist durch Definitionen festgestellt, wenn der Kürze wegen $\sqrt{-1}$ durch i bezeichnet wird.

4) $sin\, x = \frac{e^{xi}-e^{-xi}}{2i} = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots;$

5) $cos\, x = \frac{e^{xi}+e^{-xi}}{2} = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots;$

6) $tg\,x = \frac{sin\,x}{cos\,x}$; 7) $cotg\,x = \frac{cos\,x}{sin\,x}$;

8) $sec\,x = \frac{1}{cos\,x}$; 9) $cosec\,x = \frac{1}{sin\,x}$;

10) $sinvers\,x = 1 - cos\,x$; 11) $cosvers\,x = 1 - sin\,x$;

und wir setzen dabei als schon bewiesen voraus, daß man allemal aus diesen Formeln die Länge der in der Elementar-Trigonometrie unter denselben Namen im Kreise (für den Radius 1) bekannten Linien erhält, so oft statt x die Länge des, dem Winkel zugehörigen Bogens gesetzt wird, letzterer in demselben Kreise, also ebenfalls für den Radius 1 genommen.

II. Von den Gleichungen

$$sin\,x = z, \quad x = \frac{1}{sin}\,z \quad \text{oder} \quad x = arc\,sin\,z$$

drückt jede ein und dasselbe aus, nur in verschiedenen Zeichen.

Desgleichen sind gleichbedeutend die Gleichungen

$$cos\,x = z, \quad x = \frac{1}{cos}\,z \quad \text{oder} \quad x = arc\,cos\,z;$$

$$tg\,x = z, \quad x = \frac{1}{tg}\,z \quad \text{oder} \quad x = arc\,tg\,z;$$

$$cotg\,x = z, \quad x = \frac{1}{cotg}\,z \quad \text{oder} \quad x = arc\,cotg\,z;$$

$$sec\,x = z, \quad x = \frac{1}{sec}\,z \quad \text{oder} \quad x = arc\,sec\,z;$$

$$cosec\,x = z, \quad x = \frac{1}{cosec}\,z \quad \text{oder} \quad x = arc\,cosec\,z\ *).$$

III. Ist von einem Bogen x, der Sinus durch z aus-

*) Genau genommen ist doch zwischen den 2 Gleichungen in jeder dieser Zeilen noch ein kleiner Unterschied. Es hat nämlich $sin\,x$ für jeden bestimmten Werth von x nur einen einzigen Werth; dagegen hat $\frac{1}{sin}\,z$, oder wie man auch schreibt $arc\,sin\,z$, allemal unendlich viele Werthe, weil unendlich viele Bogen einen und denselben Sinus haben können.

gedrückt, so ist sein Kosinus $= \sqrt{1-z^2}$, seine Tangente $= \frac{z}{\sqrt{1-z^2}}$, seine Kotangente $= \frac{\sqrt{1-z^2}}{z}$. Diese Betrachtung rechtfertiget die Gleichungen

1) $arc\,sin\,z = arc\,cos\,\sqrt{1-z^2} = arc\,tg\,\frac{z}{\sqrt{1-z^2}} = arc\,cotg\,\frac{\sqrt{1-z^2}}{z}$.

Und ähnliche Betrachtungen rechtfertigen die Gleichungen

2) $arc\,cos\,z = arc\,sin\,\sqrt{1-z^2} = arc\,tg\,\frac{\sqrt{1-z^2}}{z} = arc\,cotg\,\frac{z}{\sqrt{1-z^2}}$;

3) $arc\,tg\,z = arc\,cotg\,\frac{1}{z} = arc\,sin\,\frac{z}{\sqrt{1+z^2}} = arc\,cos\,\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$;

4) $arc\,cotg\,z = arc\,tg\,\frac{1}{z} = arc\,sin\,\frac{1}{\sqrt{1+z^2}} = arc\,cos\,\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}$*).

IV. Löst man die beiden Gleichungen (I. 4. und 5.) nach $e^{xi}$ und $e^{-xi}$ algebraisch auf, so erhält man

1) $e^{xi} = cos\,x + i\cdot sin\,x = \sqrt{1-sin\,x^2} + i\cdot sin\,x$
$= cos\,x + i\cdot\sqrt{1-cos\,x^2}$;

2) $e^{-xi} = cos\,x - i\cdot sin\,x = \sqrt{1-sin\,x^2} - i\cdot sin\,x$
$= cos\,x - i\cdot\sqrt{1-cos\,x^2}$.

Dividirt man diese beiden Gleichungen durch einander, so ergiebt sich

3) $e^{2xi} = \frac{cos\,x + i\cdot sin\,x}{cos\,x - i\cdot sin\,x} = \frac{1+i\cdot tg\,x}{1+i\cdot tg\,x}$.

Nimmt man nun die Logarithmen, so findet sich aus (1.) oder (2.)

---

*) Wir werden in der Folge von nun an allemal

$\frac{1}{sin}x$, $\frac{1}{cos}x$, $\frac{1}{tg}x$, $\frac{1}{cotg}x$,

statt bezüglich

$arc\,sin\,x$, $arc\,cos\,x$, $arc\,tg\,x$, $arc\,cotg\,x$ schreiben.

1) $f_{x,y,z} = 0$

machen, so ist dieser Voraussetzung zu Folge

2) $f_{(x)} = 0$, demnach auch 3) $f_{(x+h)} = 0$,

also auch nach dem Taylor'schen Lehrsatze,

4) $f_{(x)} + \partial f_{(x)} \cdot h + \partial^2 f_{(x)} \cdot \frac{h^2}{2!} + \partial^3 f_{(x)} \cdot \frac{h^3}{3!} + \cdots = 0$

für jeden Werth von h; mithin noch

5) $\partial f_{(x)} = 0$; $\partial^2 f_{(x)} = 0$; $\partial^3 f_{(x)} = 0$; u. s. f.

Dies läßt sich aber noch beliebig ausdehnen auf Fälle, wo f noch mehrere solcher Veränderlichen x, y, z, v, &c. explicit enthält.

II. Hat man also zwischen x und y die Gleichung

1) $f_{x,y} = 0$

gegeben, so ist sowohl y eine solche Funktion von x, welche $f_{x,y}$ zu Null macht, aber auch x eine solche Funktion von y, welche $f_{x,y}$ zu Null macht; und es ist daher noch, wenn y als Funktion von x angesehen wird,

2) $\partial f_{(x)} = 0$, d. h. $\partial f_x + \partial f_y \cdot \partial y_x = 0$;

aber auch noch, wenn x als Funktion von y gedacht wird,

3) $\partial f_{(y)} = 0$, d. h. $\partial f_y + \partial f_x \cdot \partial x_y = 0$.

Die Gleichung (2.) giebt nun in Verbindung mit der (1.) y und $\partial y_x$ als die durch $f = 0$ gegebenen Funktionen von x. Die Gleichung (3.) giebt dagegen in Verbindung mit der (1.) die Funktionen x und $\partial x_y$ als die durch die Gleichung $f = 0$ gegebenen Funktionen von y *).

---

Anwendungen der Formel (§. 11. I.) und der hier zur Linken zunächst stehenden Formeln.

*) Hat man z. B.

$$\sin x = y \quad \text{oder} \quad y - \sin x = 0,$$

und denkt man sich x als eine durch diese Gleichung gegebene Funktion von y, so erhält man, wenn man diese Gleichung nach allem y differenzirt (wie in (3.) geschehen ist),

$$\partial y_y - \partial(\sin x)_y = 0,$$

thung der Ausdrücke in Ziffern wünschenswerth und nothwendig ist.

## §. 14.

Wendet man aber die vorgetragenen Lehren des Differenziirens auf diese sogenannten trigonometrischen Funktionen an, so erhält man sogleich *)

1) $\partial(\sin x)_x = \cos x$; 2) $\partial(\sin\varphi)_{(x)} = \cos\varphi \cdot \partial\varphi_x$;

3) $\partial(\cos x)_x = -\sin x$; 4) $\partial(\cos\varphi)_{(x)} = -\sin\varphi \cdot \partial\varphi_x$;

5) $\partial(tg\,x)_x = \frac{1}{\cos x^2}$; 6) $\partial(tg\,\varphi)_{(x)} = \frac{\partial\varphi_x}{\cos\varphi^2}$;

7) $\partial(cotg\,x)_x = -\frac{1}{\sin x^2}$; 8) $\partial(cotg\,\varphi)_{(x)} = -\frac{\partial\varphi_x}{\sin\varphi^2}$;

9) $\partial(sec\,x)_x = \frac{\sin x}{\cos x^2}$; 10) $\partial(sec\,\varphi)_{(x)} = \frac{\sin\varphi \cdot \partial\varphi_x}{\cos\varphi^2}$;

11) $\partial(cosec\,x)_x = -\frac{\cos x}{\sin x^2}$; 12) $\partial(cosec\,\varphi)_{(x)} = -\frac{\cos\varphi \cdot \partial\varphi_x}{\sin\varphi^2}$.

Ferner noch

13) $\partial\left(\frac{1}{\sin}x\right)_x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; 14) $\partial\left(\frac{1}{\sin}\varphi\right)_{(x)} = \frac{\partial\varphi_x}{\sqrt{1-\varphi^2}}$;

15) $\partial\left(\frac{1}{\cos}x\right)_x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$; 16) $\partial\left(\frac{1}{\cos}\varphi\right)_{(x)} = \frac{-\partial\varphi_x}{\sqrt{1-\varphi^2}}$;

17) $\partial\left(\frac{1}{tg}x\right)_x = \frac{1}{1+x^2}$; 18) $\partial\left(\frac{1}{tg}\varphi\right)_{(x)} = \frac{\partial\varphi_x}{1+\varphi^2}$;

19) $\partial\left(\frac{1}{cotg}x\right)_x = \frac{-1}{1+x^2}$; 20) $\partial\left(\frac{1}{cotg}\varphi\right)_{(x)} = \frac{-\partial\varphi_x}{1+\varphi^2}$ *).

## §. 15.

I. Denkt man sich in einer Funktion f von den (explicit enthaltenen) Veränderlichen x,y,z, unter y und z selber wieder solche Funktionen von x, welche

*) Die zur Linken stehenden Formeln sind Beispiele zu (§. 12.) und zu (§. 9.). — Die zur Rechten stehenden Gleichungen aber sind alle blos

1) $f_{x,y,z} = 0$

machen, so ist dieser Voraussetzung zu Folge

2) $f_{(x)} = 0$, demnach auch 3) $f_{(x+h)} = 0$,

also auch nach dem Taylor'schen Lehrsatze,

4) $f_{(x)} + \partial f_{(x)} \cdot h + \partial^2 f_{(x)} \cdot \frac{h^2}{2!} + \partial^3 f_{(x)} \cdot \frac{h^3}{3!} + \ldots = 0$

für jeden Werth von h; mithin noch

5) $\partial f_{(x)} = 0$; $\partial^2 f_{(x)} = 0$; $\partial^3 f_{(x)} = 0$; u. s. f.

Dies läßt sich aber noch beliebig ausdehnen auf Fälle, wo f noch mehrere solcher Veränderlichen x, y, z, v, ꝛc. explicit enthält.

II. Hat man also zwischen x und y die Gleichung

1) $f_{x,y} = 0$

gegeben, so ist sowohl y eine solche Funktion von x, welche $f_{x,y}$ zu Null macht, aber auch x eine solche Funktion von y, welche $f_{x,y}$ zu Null macht; und es ist daher noch, wenn y als Funktion von x angesehen wird,

2) $\partial f_{(x)} = 0$, d. h. $\partial f_x + \partial f_y \cdot \partial y_x = 0$;

aber auch noch, wenn x als Funktion von y gedacht wird,

3) $\partial f_{(y)} = 0$, d. h. $\partial f_y + \partial f_x \cdot \partial x_y = 0$.

Die Gleichung (2.) giebt nun in Verbindung mit der (1.) y und $\partial y_x$ als die durch $f = 0$ gegebenen Funktionen von x. Die Gleichung (3.) giebt dagegen in Verbindung mit der (1.) die Funktionen x und $\partial x_y$ als die durch die Gleichung $f = 0$ gegebenen Funktionen von y *).

---

Anwendungen der Formel (§. 11. 1.) und der hier zur Linken zunächst stehenden Formeln.

*) Hat man z. B.

$$\sin x = y \quad \text{oder} \quad y - \sin x = 0,$$

und denkt man sich x als eine durch diese Gleichung gegebene Funktion von y, so erhält man, wenn man diese Gleichung nach allem y differenziirt (wie in (3.) geschehen ist),

$$\partial y_y - \partial(\sin x)_y = 0,$$

Betrachtet man aber x und y als solche Funktionen von t, welche $f_{x,y}$ der Null gleich machen, so ist $f_{(t+h)}$ mit $f_{(t)}$ zugleich Null, folglich ist auch jeder einzelne Koeffizient von der für $f_{(t+h)}$ nach dem Taylor'schen Lehrsatze erhaltenen, nach Potenzen von h fortlaufenden Reihe, der Null gleich, d. h.

1) $\partial f_{(t)} = 0$; $\partial^2 f_{(t)} = 0$; $\partial^3 f_{(t)} = 0$; &c.;

also namentlich $\partial f_{(t)} = 0$, d. h.

2) $$\partial f_x \cdot \partial x_t + \partial f_y \cdot \partial y_t = 0;$$

und diese Gleichung giebt nach Belieben den Quotienten

$$\frac{\partial x_t}{\partial y_t}, \text{ welcher nach (§. 11. I.)} = \partial x_y \text{ ist*),}$$

oder den Quotienten

$$\frac{\partial y_t}{\partial x_t}, \text{ welcher nach (§. 11. I.)} = \partial y_x \text{ ist.}$$

III. Hat man zwischen x, y, z zwei Gleichungen

1) $L_{x,y,z} = 0$ und 2) $L'_{x,y,z} = 0$,

so sind durch sie z. B. y und z als solche Funktionen von x gegeben, welche L und L' zu Null machen; also hat man nach (I.) noch die Gleichungen

3) $\partial L_{(x)} = 0$, d. h. $\partial L_x + \partial L_y \cdot \partial y_x + \partial L_z \cdot \partial z_x = 0$;

und 4) $\partial L'_{(x)} = 0$, d. h. $\partial L'_x + \partial L'_y \cdot \partial y_x + \partial L'_z \cdot \partial z_x = 0$.

---

d. h. $$1 - \cos x \cdot \partial x_y = 0,$$

folglich $$\partial x_y = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}},$$

während, der Gleichung $\sin x = y$ zu Folge, $x = \frac{1}{\sin} y$ ist. —

So findet sich also die Formel (13.), und natürlich finden sich auch die übrigen (15. — 19.) des (§. 14.) auf diesem Wege noch einfacher.

*) Hat man nämlich x und y in t ausgedrückt, so hat man zwei Gleichungen zwischen x, y und t. Denkt man sich nun aus diesen beiden Gleichungen t eliminirt, so erhält man eine Gleichung zwischen x und y, und diese giebt y als eine Funktion von x, aber auch x als eine Funktion von y.

Denkt man sich aber x, y, z als Funktionen von t, welche den Gleichungen L = 0 und L' = 0 genügen, so hat man noch

5) $\partial L_{(t)} = 0$, d. h. $\partial L_x \cdot \partial x_t + \partial L_y \cdot \partial y_t + \partial L_z \cdot \partial z_t = 0$

und 6) $\partial L'_{(t)} = 0$, d. h. $\partial L'_x \cdot \partial x_t + \partial L'_y \cdot \partial y_t + \partial L'_z \cdot \partial z_t = 0$.

Die Gleichungen (3. u. 4.) geben in Verbindung mit den (1. u. 2.) y, z, $\partial y_x$ und $\partial z_x$ als Funktionen von x; die Gleichungen (5. u. 6.) dagegen geben die Quotienten $\frac{\partial y_t}{\partial x_t}$ und $\frac{\partial z_t}{\partial x_t}$, welche nach (§. 11. I.) nichts anders als $\partial y_x$ und $\partial z_x$ sind.

Dies alles läßt sich aber beliebig noch erweitern.

IV. Endlich heißen alle Gleichungen, in denen ausser x, y, &c. auch noch Differenzial-Koeffizienten vorkommen, Differenzial-Gleichungen, und alle in der Algebra und Analysis des Endlichen vorkommenden Gleichungen (d. h. alle vor den Differenzial-Gleichungen betrachteten Gleichungen) kann man Ur-Gleichungen nennen.

Diese Differenzial-Gleichungen werden noch totale genannt, wenn in ihnen bloß Differenzial-Koeffizienten nach einem einzigen Veränderlichen genommen, erscheinen. — Sie werden aber Parzial-Gleichungen genannt, wenn sie verschiedene Differenzial-Koeffizienten nach verschiedenen Veränderlichen genommen (z. B. $\partial y_x$, $\partial y_t$; $\partial^2 y_x$, $\partial^{1,1} y_{x,t}$, $\partial^2 y_t$, u. dergl.) enthalten.

## §. 16.

Hat man einen Differenzial-Ausdruck, z. B.

I. $$\frac{(1+\partial y_x^2)^{\frac{3}{2}}}{\partial^2 y_x} \cdot \frac{y^2}{x} \text{ oder } A,$$

der beliebig aus x und y (als Funktion von x gedacht) und deren Differenzial-Koeffizienten $\partial y_x$, $\partial^2 y_x$ zusammengesetzt ist, so erscheint es oft als wünschenswerth und nothwendig, diesen Ausdruck dem Werthe nach zwar unverändert, aber der Form nach so verändert zu haben, daß er statt der Differenzial-Koeffi-

zienten von y nach x, lieber die Differenzial-Koeffizienten von x und y nach t genommen, enthalte, im Falle nämlich x selbst wieder, und deshalb dann auch y, als Funktionen von t gedacht seyn sollten. — Und eben so mag man oft auch den gegebenen Ausdruck A in einen andern, ihm gleichen, verwandeln, welcher statt der Ableitungen (Differenzial-Koeffizienten) von y nach x, lieber Ableitungen von x nach y enthält, da in dem Augenblicke, wo y als eine Funktion von x gedacht ist, auch x als eine Funktion von y gedacht werden kann.

Zum Behufe der Lösung dieser Aufgaben hat man die Gleichungen

1) $\partial y_t = \partial y_x \cdot \partial x_t$;

2) $\partial^2 y_t = \partial^2 y_x \cdot \partial x_t^2 + \partial y_x \cdot \partial^2 x_t$;

3) $\partial^3 y_t = \partial^3 y_x \cdot \partial x_t^3 + 3\partial^2 y_x \cdot \partial x_t \cdot \partial^2 x_t + \partial y_x \cdot \partial^3 x_t$;

u. s. w. f.;

von denen die (1.) keine andere ist als die des (§. 11. I.), die übrigen dagegen aus einander hervorgehen, wenn man links und rechts nach allem t differenzirt.

Löst man diese Gleichungen nach $\partial y_x$ und $\partial^2 y_x$ algebraisch auf, so erhält man diese Gleichungen:

3) $\partial y_x = \dfrac{\partial y_t}{\partial x_t}$;

4) $\partial^2 y_x = \dfrac{\partial x_t \cdot \partial^2 y_t - \partial y_t \cdot \partial^2 x_t}{\partial x_t^3}$;

u. s. w. f.

Diese aber gehen, wenn man $t = y$ nimmt, wo dann

$$\partial y_t = \partial y_y = 1, \quad \partial^2 y_t = \partial^2 y_y = 0$$

wird, über in folgende:

5) $\partial y_x = \dfrac{1}{\partial x_y}$;

und 6) $\partial^2 y_x = -\dfrac{\partial^2 x_y}{\partial x_y^3}$;

u. s. w. f.

Differenziirt man aber die Gleichung (1.) links und rechts nach t (um aus ihr die Gleichung (2.) zu erhalten), ſo muß man ſich erinnern, daß nach derſelben (1.) oder (§. 11. I.)

7) $\partial(\partial y_x)_t = \partial(\partial y_x)_x \cdot \partial x_t = \partial^2 y_x \cdot \partial x_t$

iſt. — Aehnliche Rückſichten muß man nehmen, wenn dieſe Gleichung (2.) noch einmal nach t differenziirt wird, um die (3.) zu erhalten; u. ſ. w. f.

Man kann auch die Formel (4.) unmittelbar aus der (3.) erhalten, entweder wenn man dieſe (3.) links und rechts nach t differenziirt, und die (7.) bedenkt, oder indem man dieſe (3.) links und rechts nach x differenziirt, rechts aber $\frac{\partial y_t}{\partial x_t}$ durch $\varphi$ bezeichnet, und nun nicht vergißt, daß nach derſelben Formel (3.) oder (§. 11. I.)

$$\partial\varphi_x = \frac{\partial\varphi_t}{\partial x_t}, \quad \text{alſo} \quad \partial\left(\frac{\partial y_t}{\partial x_t}\right)_x = \frac{\partial\left(\frac{\partial y_t}{\partial x_t}\right)_t}{\partial x_t}$$

iſt.

Subſtituirt man aber dieſe Werthe aus (3. u. 4.) ſtatt $\partial y_x$ und $\partial^2 y_x$ in den Ausdruck A, ſo erhält man:

II. $$A = \frac{(\partial x_t^2 + \partial y_t^2)^{\frac{3}{2}}}{\partial x_t \cdot \partial^2 y_t - \partial y_t \cdot \partial^2 x_t} \cdot \frac{y''}{x}.$$

Subſtituirt man jedoch die Werthe aus (5. u. 6.) ſtatt $\partial y_x$ und $\partial^2 y_x$ in den Ausdruck A, ſo ergiebt ſich

III. $$A = -\frac{(\partial x_y^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}{\partial^2 x_y} \cdot \frac{y^2}{x},$$

wo man im Nothfalle das (—) Zeichen noch weglaſſen kann, weil die Potenz im Zähler doch zweideutig iſt, ſo daß A immer (+) und (—) zugleich vor ſich ſtehen hat.

Subſtituirt man in den Ausdruck (II.) für A, ſtatt $\partial y_t$ und $\partial^2 y_t$ wiederum die Werthe aus (1. u. 2.), ſo heben ſich $\partial x_t$ und $\partial^2 x_t$ von ſelber weg, und man erhält den Ausdruck (I.) wieder. — Hätte man aber einen beliebig gegebenen Ausdruck B, welcher x, y, $\partial x_t$, $\partial y_t$, $\partial^2 x_t$, $\partial^2 y_t$ enthielte; ſubſtituirte man in denſelben ſtatt $\partial y_t$ und $\partial^2 y_t$ die Werthe aus (1. u. 2.), und fiele dann einer der beiden Differenzial-Koeffi-

zienten $\partial x_t$ oder $\partial^2 x_t$ nicht zugleich von selber aus B mit weg, so wäre dies ein Beweis, daß es nicht möglich ist, den Ausdruck B so umzuformen, daß in ihm y bloß als eine Funktion von x angesehen werden könnte, so nämlich, daß in ihm (außer x und y) bloß Differenzial-Koeffizienten von y nach x vorkämen, und von t gar nicht mehr die Rede wäre.

Es versteht sich übrigens wieder von selbst, daß man (wenn die (2.) oder die (4.) noch einmal nach t differenziirt wird, oder die (4.) noch einmal nach x) auch $\partial^2 y_x$ in Differenzial-Koeffizienten von x und y nach t ausdrücken kann; u. s. w. f.

Man nennt aber die Lösung dieser und ähnlicher Aufgaben „das Uebertragen der Unabhängigkeit eines Veränderlichen (x) auf einen andern (y oder t)".

## §. 17.

Hat man zwei Differenzial-Gleichungen zwischen t, x, y und den Differenzial-Koeffizienten von x und y nach t, von irgend einer Ordnung, so kann es wünschenswerth erscheinen, aus diesen beiden Gleichungen einen der Veränderlichen, z. B. x, aber auch alle seine Differenzial-Koeffizienten $\partial x_t$, $\partial^2 x_t$, ꝛc. auf einmal zu eliminiren, so daß eine Gleichung entsteht, welche bloß noch t, y und Ableitungen (Differenzial-Koeffizienten) von y nach t enthält. —

Es seyen z. B. gegeben die beiden Gleichungen:

1) $\partial^2 x_t = -m \cdot \partial y_t$;

2) $\partial^2 y_t = -g \cdot x - m \cdot \partial x_t$;

und x sowohl als auch alle seine Differenzial-Koeffizienten $\partial x_t$, $\partial^2 x_t$, ꝛc. zu eliminiren. — Man hat zu eliminiren x, $\partial x_t$, $\partial^2 x_t$, zu welchem Behufe man 4 Gleichungen braucht. Da man sich aber aus den gegebenen beiden Gleichungen beliebig viel neue Gleichungen verschaffen kann, wenn man die gegebenen beliebig oft (nach t) differenziirt, so differenziiren wir zunächst noch jede der beiden Gleichungen (1. u. 2.) einmal nach t, und erhalten:

3) $\partial^3 x_t = +m \cdot \partial^2 y_t$;

4) $\partial^3 y_t = -g \cdot \partial x_t - m \cdot \partial^3 x_t$.

Wenn wir aber jetzt zwei Gleichungen mehr haben, als vorher, so haben wir doch auch einen Ausdruck ($\partial^3 x_t$) mehr bekommen, der wieder eliminirt werden muß. Differenziirt man nun diese beiden Gleichungen noch einmal nach t, so erhält man

5) $\partial^4 x_t = -m \cdot \partial^3 y_t$;

6) $\partial^4 y_t = -g \cdot \partial^2 x_t - m \cdot \partial^3 x_t$.

Nun haben wir 6 Gleichungen und können die 5 von x abhängigen Ausdrücke x, $\partial x_t$, $\partial^2 x_t$, $\partial^3 x_t$, $\partial^4 x_t$, welche darin vorkommen, ohne weiteres algebraisch eliminiren. Auch ist das mal die Gleichung (5.) ganz überflüssig, da sie wiederum einen neuen zu eliminirenden Ausdruck ($\partial^4 x_t$) einführt. — Man eliminire daher bloß aus den Gleichungen (1. 2. 3. 4. u. 6.) die 4 Ausdrücke x, $\partial x_t$, $\partial^2 x_t$ und $\partial^3 x_t$; und da die Gleichung (2.) allein nur x selbst enthält, so nimmt man bloß die Gleichungen (1. 3. 4. u. 6.) und eliminirt aus ihnen die 3 Ausdrücke $\partial x_t$, $\partial^2 x_t$ und $\partial^3 x_t$; und man erhält zuletzt:

$$\partial^4 y_t = gm \cdot \partial y_t + m^2 \cdot \partial^2 y_t,$$

welche Gleichung weder x noch Differenzial-Koeffizienten von x enthält.

Dieses Beispiel läßt sehen, daß diese Elimination allemal möglich ist, da jede neue Differenziirung nach t allemal zwei neue Gleichungen und nur einen neuen von x abhängigen Ausdruck liefert, so daß, wenn man diese Differenziirungen nach t fortsetzt, zuletzt nothwendig ein Ueberschuß von Gleichungen, gegen die Zahl der zu eliminirenden, von x abhängigen Ausdrücke (Differenzial-Koeffizienten) hervorgehen muß.

Als ein noch zusammengesetzteres Beispiel seyen gegeben die 4 Gleichungen:

1) $\partial^2 x_t = y^2$; 2) $\partial^2 y_t = x^2$;

3) $x = r \cdot \cos v$; 4) $y = r \cdot \sin v$;

und aus diesen 4 Gleichungen sollen x und y, aber auch alle Differenzial-Koeffizienten von x und y (nach t) eliminirt werden, so daß zwei Gleichungen bloß zwischen r, v und t übrig bleiben.

Da die Differenziation der Gleichungen (1. u. 2.) nach t allemal eben so viele neue, wieder zu eliminirende Ausdrücke einführen würde, als man dadurch neue Gleichungen erhielte, so werden wir dasmal bloß die Gleichungen (3. u. 4.) hinter einander nach t differenziiren, und wir erhalten zunächst:

5) $\partial x_t = -r \cdot \sin v \cdot \partial v_t + \partial r_t \cdot \cos v;$

6) $\partial y_t = r \cdot \cos v \cdot \partial v_t + \partial r_t \cdot \sin v;$

und diese, noch einmal nach t differenzirt, geben:

7) $\partial^2 x_t = -r \cdot \cos v \cdot \partial v_t^2 - 2 \sin v \cdot \partial r_t \cdot \partial v_t + \partial^2 r_t \cdot \cos v - r \cdot \sin v \cdot \partial^2 v_t;$

8) $\partial^2 y_t = -r \cdot \sin v \cdot \partial v_t^2 + 2 \cos v \cdot \partial r_t \cdot \partial v_t + \partial^2 r_t \cdot \sin v + r \cdot \cos v \cdot \partial^2 v_t.$

Aus den 6 Gleichungen (1. — 4. u. 7. 8.) kann man nun die 4 Ausdrücke x, y, $\partial^2 x_t$ und $\partial^2 y_t$ eliminiren; und man erhält als Endresultat die beiden Gleichungen:

$$r^2 \cdot \cos v^2 = -r \cdot \cos v \cdot \partial v_t^2 - 2 \sin v \cdot \partial r_t \cdot \partial v_t + \partial^2 r_t \cdot \cos v - r \cdot \sin v \cdot \partial^2 v_t;$$

$$r^2 \cdot \sin v^2 = -r \cdot \sin v \cdot \partial v_t^2 + 2 \cos v \cdot \partial r_t \cdot \partial v_t + \partial^2 r_t \cdot \sin v + r \cdot \cos v \cdot \partial^2 v_t;$$

welche durchaus nichts mehr enthalten, was an das Daseyn von x oder y erinnern könnte *).

*) Wäre vorausgesetzt gewesen, daß r kein t enthält, wäre also r nach t konstant, so wären diese beiden End-Gleichungen viel einfacher geworden, weil jetzt $\partial r_t = 0$ und $\partial^2 r_t = 0$ ist. Man hätte dann bloß erhalten, weil man nun in den Gleichungen (5. — 8.) alle die Glieder nicht bekommen hätte, welche von der Veränderlichkeit des r herrühren,

$$r \cdot \cos v^2 = -\cos v \cdot \partial v_t^2 - \sin v \cdot \partial^2 v_t$$

$$r \cdot \sin v^2 = -\sin v \cdot \partial v_t^2 + \cos v \cdot \partial^2 v_t.$$

Aus diesen beiden Gleichungen könnte man dann leicht noch r algebraisch eliminiren, und so eine Gleichung bloß zwischen v und t übrig behalten.

Dieses Elimininen wird aber allemal nothwendig, so oft man eine oder mehrere Differenzial-Gleichungen hat zwischen den Veränderlichen t, x, y ꝛc., und nun neue Veränderliche r, v, ꝛc. einführen will, statt der alten x, y, ꝛc. — Es sind in diesem Falle allemal Gleichungen gegeben, wie z. B. die vorliegenden Gleichungen (3. u. 4.), wodurch die neuen Veränderlichen r und v eingeführt werden, und es müssen daher nun aus allen vorhandenen Gleichungen alle x, y, ꝛc. und ihre Differenzial-Koeffizienten eliminirt werden.

## §. 18.

Es kann aber die Aufgabe vorkommen: „Aus zweien Differenzial-Gleichungen, z. B. aus

1) $\partial^2 x_t = -m \cdot \partial x_t \cdot \sqrt{\partial x_t^2 + \partial y_t^2}$

2) $\partial^2 y_t = -g - m \cdot \partial y_t \cdot \sqrt{\partial x_t^2 + \partial y_t^2}$

„den Veränderlichen t zu eliminiren, denselben, nach welchem „die Differenzial-Koeffizienten genommen sind," so daß man bloß eine Gleichung zwischen x und y erhält; also entweder zugleich mit den Differenzial-Koeffizienten $\partial y_x$, $\partial^2 y_x$, $\partial^3 y_x$, ꝛc., oder dafür lieber mit den Differenzial-Koeffizienten $\partial x_y$, $\partial^2 x_y$, $\partial^3 x_y$, ꝛc.

Um diese und ähnliche Aufgaben zu lösen, muß man zuerst nach (§. 16.) die Unabhängigkeit des Veränderlichen t auf einen andern der Veränderlichen, z. B. auf x, übertragen. — Man nimmt daher nach (§. 16.)

$$\partial y_t = \partial y_x \cdot \partial x_t,$$
$$\partial^2 y_t = \partial^2 y_x \cdot \partial x_t^2 + \partial y_x \cdot \partial^2 x_t;$$

und substituirt diese Werthe für $\partial y_t$ und $\partial^2 y_t$ in die gegebenen Gleichungen (1. u. 2.); und man erhält

3) $\partial^2 x_t = -m \cdot \partial x_t^2 \cdot \sqrt{1 + \partial y_x^2}$

und $\partial^2 y_x \cdot \partial x_t^2 + \partial y_x \cdot \partial^2 x_t = -g - m \cdot \partial y_x \cdot \partial x_t^2 \cdot \sqrt{1 + \partial y_x^2}$,

welche letztere Gleichung jedoch, wenn man statt $\partial^2 x_t$ sogleich seinen Werth aus (3.) substituirt, viel einfacher so:

4) $\partial^2 y_x \cdot \partial x_t^2 = -g$

geſchrieben werden kann. — Aus dieſen Gleichungen (3. u. 4.) muß man nun alle Differenzial-Koeffizienten von x nach t noch eliminiren.

Zu dem Ende differenziirt man dieſe Gleichungen, dem (§. 17.) gemäß, nach t, beachtet jedoch dabei, daß y, $\partial y_x$, $\partial^2 y_x$, ꝛc. als Funktionen von x, dadurch nach t differenziirt werden, daß man die Formel (§. 11. I.) anwendet, nach welcher

$$\partial \varphi_t = \partial \varphi_x \cdot \partial x_t,$$

alſo $\partial(\partial y_x)_t = \partial^2 y_x \cdot \partial x_t$; $\partial(\partial^2 y_x)_t = \partial^3 y_x \cdot \partial x_t$; ꝛc.

iſt. Geſchieht dies hier zunächſt bloß bei der Gleichung (4.), ſo erhält man

$$\partial^3 y_x \cdot \partial x_t^2 + 2\partial^2 y_x \cdot \partial x_t \cdot \partial^2 x_t = 0$$

oder 5) $\partial^3 y_x \cdot \partial x_t^2 + 2\partial^2 y_x \cdot \partial^2 x_t = 0$;

und dieſe Gleichung reicht dasmal ſchon aus, um aus (3. 4. u. 5.), ſowohl $\partial x_t$ als $\partial^2 x_t$ eliminiren zu können. Man erhält zuletzt als End-Reſultat

6) $\partial^3 y_x - 2m \cdot \partial^2 y_x \cdot \sqrt{1 + \partial y_x^2} = 0$,

welche End-Gleichung nicht mehr t und auch nicht mehr Differenzial-Koeffizienten nach t, alſo vom Veränderlichen t gar keine Spur mehr enthält.

Das Verfahren im Allgemeinen leuchtet aus dieſem Beiſpiel genugſam hervor. Man ſubſtituirt nach (§. 16.) zuerſt die Werthe für $\partial y_t$, $\partial^2 y_t$, $\partial^3 y_t$, ꝛc.; man differenziirt dann die Gleichungen nach allem t, indem man jedoch

$$\partial(\partial y_x)_t = \partial^2 y_x \cdot \partial x_t, \quad \partial(\partial^2 y_x)_t = \partial^3 y_x \cdot \partial x_t, \quad \text{ꝛc.}$$

berückſichtigt; man eliminirt zuletzt, wenn man durch fortgeſetztes Differenziiren genug Gleichungen bekommen hat, ſowohl t ſelbſt (was in dem vorliegenden Beiſpiel gar nicht vorkam), als auch die noch vorhandenen Differenzial-Koeffizienten $\partial x_t$, $\partial^2 x_t$, $\partial^3 x_t$, ꝛc.

Daß

Daß man aber durch fortgesetztes Differenziiren sich allemal genug Gleichungen verschaffen könne, geht daraus hervor, daß jede neue Differenziation zwei Gleichungen liefert, während höchstens ein neuer Ausdruck (nämlich ein neuer Differenzial-Koeffizient von x nach t) eingeht, der wieder eliminirt werden muß.

Endlich begreift man leicht, wie das Verfahren auf die Elimination eines solchen Veränderlichen aus mehr als 2 gegebenen Gleichungen, ausgedehnt werden kann. Die hier gegebenen Prinzipien, durch die hiesigen Beispiele erläutert, werden in jedem Falle das Nöthige an die Hand geben.

## §. 19.

Der Zweck der in den vorstehenden (§§. 1. — 18.) entwikkelten Lehren, ist:

1) $f_{x+h}$ bequem in eine nach ganzen Potenzen von h fortlaufende Reihe entwikkeln zu können, dadurch, daß man Gesetze und Lehren hat, wie die Koeffizienten dieser Reihe bequem aus einander und der erste aus $f_x$ selbst, hergeholt werden. — Das Resultat dieser Entwikkelung nimmt sich in Zeichen so aus:

$$\text{I.} \quad f_{x+h} = f_x + \partial f_x \cdot h + \partial^2 f_x \cdot \frac{h^2}{2!} + \partial^3 f_x \cdot \frac{h^3}{3!} + \cdots$$

und diese Gleichung wurde (§. 7. ⊙.) der Taylor'sche Lehrsatz genannt.

2) Mittelst dieses Satzes kann man aber noch sehr bequem $f_{x+h,y+k}$ oder $f_{x+h,y+k,z+l}$, u. s. w. in Reihen verwandeln, welche nach Potenzen von h und k, oder von h, k und l, u. s. w. fortlaufen, und dieses letztern Umstandes halber, Reihen der 2ten, der 3ten, ꝛc. Ordnung genannt werden.

Diese Sätze nehmen sich in Zeichen geschrieben so aus, wie solche (§. 10. ☾ u. ♂.) zu sehen sind.

3) Man kann aber auch mittelst desselben Taylor'schen Satzes eine bloße Funktion $f_x$ in eine Reihe verwandeln, welche nach Potenzen von $x-\alpha$, oder nach Potenzen von x fortläuft. — Setzt man nämlich in der Formel (I.) $\alpha$ statt x, und in

der dadurch entstehenden Gleichung (welche kein x mehr hat) wieder $x-\alpha$ statt h, so erhält man

$$\text{II.}\quad f_x = [f_x]_\alpha + [\partial f_x]_\alpha \cdot (x-\alpha) + [\partial^2 f_x]_\alpha \cdot \frac{(x-\alpha)^2}{2!} + [\partial^3 f_x]_\alpha \cdot \frac{(x-\alpha)^3}{3!} + \cdots;$$

und wird hier noch o statt $\alpha$ gesetzt, so geht diese Gleichung über in

$$\text{III.}\quad f_x = [f_x]_0 + [\partial f_x]_0 \cdot x + [\partial^2 f_x]_0 \cdot \frac{x^2}{2!} + [\partial^3 f_x]_0 \cdot \frac{x^3}{3!} + \cdots.$$

Der Satz (III.) wird häufig der Maclaurin'sche Lehrsatz genannt; den Satz (II.) dagegen kann man den allgemeinern Maclaurin'schen Lehrsatz nennen. — Die möglichst bequeme Entwikkelung dieser 3 Reihen (I. II. u. III.) betrachten wir aber als den Hauptzweck, ja als den einzigen Zweck der hier bis jetzt entwikkelten Lehren.

Anmerkung 1. Da $f_{x+h}$ auch als eine bloße Funktion von h angesehen werden kann, so folgt von selbst, daß wenn man diese, als solche, nach dem Maclaurin'schen Lehrsatze (III.) in eine nach Potenzen von h fortlaufende Reihe verwandelt, man nothwendig wieder die Taylor'sche Reihe (I.) erhalten müsse.

Daß aus (II.) der Satz (I.) wieder hervorgeht, wenn $x-\alpha = h$, also $x = \alpha + h$ gesetzt wird, und wenn man in der entstehenden neuen Gleichung wiederum x statt $\alpha$ schreibt, versteht sich ohne dies von selbst.

Anmerkung 2. Hat $f_x$ für irgend einen bestimmten Werth $\alpha$ von x, noch einen bestimmten Werth, nimmt aber einer der Differenzial-Koeffizienten $\partial f_x$, $\partial^2 f_x$, &c. für denselben Werth $\alpha$ von x die Form $\frac{1}{0}$ an, so existirt für diesen Werth $\alpha$ von x nicht mehr eine nach bloß ganzen Potenzen von h, fortlaufende Reihe, welche $= f_{x+h}$ (für diesen Werth $\alpha$ von x) wäre; — sondern die nach positiven Potenzen von h fortlaufende Reihe

für $f_{x+h}$ enthält dann auch gebrochene Potenzen von h, und der Taylor'ſche Lehrſatz iſt für dieſen beſondern Werth von $\alpha$ nicht mehr geeignet, dieſe nun exiſtirende Reihe zu geben.

Wenn aber in der dann für $f_{x+h}$ exiſtirenden, nach poſitiven und ſteigenden Potenzen von h geordneten Reihe, $M \cdot h^{\mu}$ die erſte der gebrochenen Potenzen in ihr iſt, und $\mu$ zwiſchen m und $m+1$ liegt, ſo haben die m Differenzial-Koeffizienten

$$\partial f_x,\ \partial^2 f_x,\ \partial^3 f_x,\ \partial^4 f_x,\ \cdots \partial^m f_x$$

für $x = \alpha$ noch völlig beſtimmte Werthe, und die Taylor'ſche Reihe giebt auch jetzt noch die erſten $m+1$ Glieder der nun exiſtirenden Reihe, bis zu dem mit $h^m$ affizirten Gliede einſchließlich. Dagegen nehmen die Differenzial-Koeffizienten

$$\partial^{m+1} f_x,\ \partial^{m+2} f_x,\ \partial^{m+3} f_x,\ \text{ꝛc.}$$

alle für $x = \alpha$ die Form $\frac{1}{0}$ an, und ſowohl der Koeffizient M des Gliedes $M \cdot h^{\mu}$, als auch die übrigen Glieder der Reihe müſſen dann auf andern Wegen vollends dazu gefunden werden.

Der Beweis dieſer Behauptung ergiebt ſich aus der Formel

$$(\mathfrak{Q}) \cdots \qquad \partial(\varphi_{x+h})_x = \partial(\varphi_{x+h})_h = [\partial \varphi_x]_{x+h},$$

welche aus (§. 11. I.) augenblicklich hervorgeht, wenn man $x+h = z$ ſetzt.

Iſt nun für $x = \alpha$, wie wir vorausgeſetzt haben,

$$f_{x+h} = f_x + A_1 \cdot h + A_2 \cdot h^2 + A_3 \cdot h^3 + \cdots + A_m \cdot h^m + M \cdot h^{\mu} + \cdots,$$

ſo findet ſich, wenn man links und rechts nach h differenziirt, links aber die Formel ($\mathfrak{Q}$) anwendet:

$$[\partial f_x]_{x+h} = A_1 + 2A_2 \cdot h + 3A_3 \cdot h^2 + \cdots + mA_m \cdot h^{m-1} + \mu M \cdot h^{\mu-1} + \cdots,$$

und wenn man noch einmal und wiederholt ſo differenziirt,

$$[\partial^2 f_x]_{x+h} = 2A_2 + 3 \cdot 2 \cdot A_3 \cdot h + \cdots + m(m-1)A_m \cdot h^{m-2} + \mu(\mu-1)M \cdot h^{\mu-2} + \cdots,$$

$$[\partial^3 f_x]_{x+h} = 3!A_3 + \cdots + m(m-1)(m-2)A_m \cdot h^{m-3} + \mu(\mu-1)(\mu-2)M \cdot h^{\mu-3} + \cdots,$$

u. ſ. w. f.; zuletzt

$$[\partial^m f_x]_{x+h} = mA_m + \mu(\mu-1)\cdots(\mu-m+1)M\cdot h^{\mu-m} + \ldots,$$

$$[\partial^{m+1} f_x]_{x+h} = \mu(\mu-1)\cdots(\mu-m)M\cdot h^{\mu-(m+1)} + \ldots,$$

u. s. f. — Setzt man aber in diesen Gleichungen überall Null statt h, so erhält man $\partial f_x = A_1$; $\frac{1}{2}\cdot\partial^2 f_x = A_2$; $\frac{1}{3!}\cdot\partial^3 f_x = A_3$, ꝛc. und $\frac{1}{m!}\cdot\partial^m f_x = A_m$. — Weil jedoch die Exponenten $\mu-(m+1)$, $\mu-(m+2)$, $\mu-(m+3)$, ꝛc. negativ werden, so nehmen von jetzt an für $h=0$, die Reihen zur Rechten Glieder von der Form $\frac{1}{0}$ auf; und so beweiset sich jeder Theil der gemachten Behauptung *).

Ist daher $\mu < 1_m$, so hat schon $\partial f_x$ für $x=\alpha$ die Form $\frac{1}{0}$; ist aber $\mu > 1_m$, so existirt noch ein bestimmter Werth von $\partial f_x$ für $x=\alpha$.

*) Stellt man die Formel (Ω) dem (§. 7.) voran (was man wohl durchsetzen kann), so ist das gegenwärtige Verfahren sehr geeignet, um den Taylor'schen Lehrsatz im Allgemeinen zu beweisen und zugleich die hier hinzugefügte spezielle Betrachtung mit anzustellen.

d. h. es wäre dann auch z in Ziffern angebbar, also nicht unendlich-klein; was gegen die Voraussetzung wäre. — Und da offenbar $r \cdot z^2 < r \cdot z$ ist, so ist $r \cdot z^2$ mit $r \cdot z$ zugleich noch unendlich-klein; u. s. w. f.

6) Von zweien Zahlen a und b, die endlich oder unendlich-klein seyn mögen, nennen wir die zweite b **unendlich-klein gegen die erstere** a, und die erstere a dann **unendlich-groß gegen die zweite** b, wenn der Quotient (das Verhältniß)

$$\frac{b}{a}$$

eine solche so eben (in 4.) definirte unendlich-kleine Zahl ist.

7) Sind k, p, q, r, s, ꝛc. irgend welche, ganz beliebige, aber bestimmte Zahlen, und nicht Null, so ist, wenn z unendlich-klein gedacht wird,

$p \cdot z$ unendlich-klein gegen k, also k unendlich-groß gegen $p \cdot z$;
$q \cdot z^2$ unendlich-klein gegen $p \cdot z$, also $p \cdot z$ unendlich-groß gegen $q \cdot z^2$;
$r \cdot z^3$ unendlich-klein gegen $q \cdot z^2$, also $q \cdot z^2$ unendlich-groß gegen $r \cdot z^3$;
u. s. w. f.; und allgemein ist

$s \cdot z^{n+1}$ unendlich-klein gegen $r \cdot z^n$;

alles der in (6.) gegebenen Definition zu Folge.

Man theilt daher die Unendlich-Kleinen in Ordnungen, und **rechnet solche Unendlich-Kleine zu einer und derselben Ordnung**, deren Quotienten (Verhältnisse) irgend endliche Werthe haben, so daß **keine derselben gegen die andere** unendlich-groß oder unendlich-klein ist.

So gehören z, $p \cdot z$, $q \cdot z$, $r \cdot z$, ꝛc. zu den Unendlich-Kleinen der **ersten** Ordnung; und sind z, $z'$, $z''$, ꝛc. solche Unendlich-Kleine der ersten Ordnung, so gehören $z^2$, $z \cdot z'$, $p \cdot z^2$, $p \cdot z \cdot z'$, $q \cdot z^2$, $r \cdot z'^2$, ꝛc. zu den Unendlich-Kleinen der **zweiten** Ordnung, u. s. w. und $z^n$, $p \cdot z^n$, $q \cdot z^n$, $r \cdot z^n$, $p \cdot z'^{\mu} \cdot z''^{n-\mu}$, $q \cdot z'^{\mu} \cdot z''^{\nu} \cdot z'''^{n-\mu-\nu}$, zu den Unendlich-Kleinen der nten Ordnung, wo man sich n (positiv) ganz oder gebrochen denken kann, während diese Ordnung des Unendlich-Kleinen **höher** oder **niedriger** heißt, je nachdem n größer oder kleiner ist.

auch immer gedacht seyn mag, so liegen zwischen ihr und der Null doch immer noch unendlich viele andere Zahlen, der Größe nach alle von einander verschieden, aber alle größer als Null und kleiner doch als diese so sehr kleine Zahl z. —

Denn, wie groß auch die ganze Zahl $\mu$ gedacht seyn mag, so werden doch die $\mu-1$ gebrochenen Zahlen $\frac{z}{\mu}, \frac{2z}{\mu}, \frac{3z}{\mu}, \frac{4z}{\mu}, \ldots \frac{(\mu-1)z}{\mu}$ der Reihe nach immer größer und größer, sind jedoch alle kleiner als $\frac{\mu z}{\mu}$, d. h. kleiner als z; dabei aber größer als Null. — Die Zahl z, so klein sie auch gedacht seyn mag, liegt also um diese beliebig große Anzahl $\mu$ von Gliedern von der Null ab.

4) Eine Zahl nennen wir „unendlich-klein" oder „der Null nächst anliegend", wenn sie gar keinen bestimmten in Ziffern angebbaren Werth hat, sondern immer noch kleiner gedacht wird, oder immer noch kleiner ist, als jede noch so klein schon gedachte Zahl *).

Eben so nennen wir eine Zahl n unendlich-groß, wenn sie nicht mehr in Ziffern angebbar gedacht wird, sondern größer, als jede noch so groß gedachte, aber bestimmte Zahl.

Ist daher z unendlich-klein, so ist $\frac{1}{z}$ unendlich-groß; und ist n unendlich-groß, so ist $\frac{1}{n}$ unendlich-klein.

5) Ist z unendlich-klein, so ist auch $p \cdot z$ unendlich-klein, auch $q \cdot z^2$, auch $r \cdot z^3$, &c., wenn nur p, q, r, &c. nicht Null, sondern beliebig große, aber völlig bestimmte Zahlen sind.

Denn wäre z. B. $p \cdot z$ nicht unendlich-klein, sondern, wenn auch noch so klein, aber in Ziffern angebbar, etwa $= k$, so folgerte, aus

$$p \cdot z = k, \quad \text{sogleich} \quad z = \frac{k}{p},$$

*) Wenn eine (irgend einem Gesetze unterworfene) Linie von bestimmter Länge stetig wächst, so ist z. B. die Differenz zwischen zwei nächst auf einander folgenden Zuständen dieser Linie unendlich-klein. — Eben so ist die Differenz zwischen zwei stetig nächst auf einander folgenden Zeiten unendlich-klein.

d. h. es wäre dann auch s in Ziffern angebbar, also nicht unendlich-klein; was gegen die Voraussetzung wäre. — Und da offenbar $r \cdot z^2 < r \cdot z$ ist, so ist $r \cdot z^2$ mit $r \cdot z$ zugleich noch unendlich-klein; u. s. w. f.

6) Von zweien Zahlen a und b, die endlich oder unendlich-klein seyn mögen, nennen wir die zweite b unendlich-klein gegen die erstere a, und die erstere a dann unendlich-groß gegen die zweite b, wenn der Quotient (das Verhältniß)

$$\frac{b}{a}$$

eine solche so eben (in 4.) definirte unendlich-kleine Zahl ist.

7) Sind k, p, q, r, s, ꝛc. irgend welche, ganz beliebige, aber bestimmte Zahlen, und nicht Null, so ist, wenn z unendlich-klein gedacht wird,

$p \cdot z$ unendlich-klein gegen k, also k unendlich-groß gegen $p \cdot z$;
$q \cdot z^2$ unendlich-klein gegen $p \cdot z$, also $p \cdot z$ unendlich-groß gegen $q \cdot z^2$;
$r \cdot z^3$ unendlich-klein gegen $q \cdot z^2$, also $q \cdot z^2$ unendlich-groß gegen $r \cdot z^3$;
u. s. w. f.; und allgemein ist

$s \cdot z^{n+1}$ unendlich-klein gegen $r \cdot z^n$;

alles der in (6.) gegebenen Definition zu Folge.

Man theilt daher die Unendlich-Kleinen in Ordnungen, und rechnet solche Unendlich-Kleine zu einer und derselben Ordnung, deren Quotienten (Verhältnisse) irgend endliche Werthe haben, so daß keine derselben gegen die andere unendlich-groß oder unendlich-klein ist.

So gehören z, $p \cdot z$, $q \cdot z$, $r \cdot z$, ꝛc. zu den Unendlich-Kleinen der ersten Ordnung; und sind z, $z'$, $z''$, ꝛc. solche Unendlich-Kleine der ersten Ordnung, so gehören $z^2$, $z \cdot z'$, $p \cdot z^2$, $p \cdot z \cdot z'$, $q \cdot z^2$, $r \cdot z'^2$, ꝛc. zu den Unendlich-Kleinen der zweiten Ordnung, u. s. w. und $z^n$, $p \cdot z^n$, $q \cdot z^n$, $r \cdot z^n$, $p \cdot z^\mu \cdot z'^{n-\mu}$, $q \cdot z^\mu \cdot z'^\nu \cdot z''^{n-\mu-\nu}$, zu den Unendlich-Kleinen der nten Ordnung, wo man sich n (positiv) ganz oder gebrochen denken kann, während diese Ordnung des Unendlich-Kleinen höher oder niedriger heißt, je nachdem n größer oder kleiner ist.

8) Ist z beliebig und setzt man die Summe der n+1 Glieder

$$1+z+z^2+z^3+\cdots+z^n = S,$$

so erhält man, wenn man diese Gleichung mit z multiplizirt, und das Resultat selber wieder von ihr subtrahirt, oder (was dasselbe ist) wenn man sie sogleich mit 1—z multiplizirt,

$$1-z^{n+1} = (1-z)\cdot S, \quad \text{also} \quad S = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}.$$

Ist nun $z>1$, so wird $z^{n+1}$ mit n zugleich immer größer und unendlich-groß; ist aber $z<1$, so wird $z^{n+1}$ immer kleiner, je größer n gedacht wird, und unendlich-klein, wenn n unendlich-groß gedacht wird. —

Ist nämlich $z>1$, so ist $z=(1+u)$ und u positiv, also

$$z^{n+1} = (1+u)^{n+1} = 1+(n+1)u+\cdots,$$

und alles positiv, die ganze Summe also mit n zugleich unendlich-groß.

Ist aber $z<1$, so ist $\frac{1}{z}>1$, also $\left(\frac{1}{z}\right)^{n+1}$, d. h. $\frac{1}{z^{n+1}}$ mit n zugleich unendlich-groß, folglich (nach 4.) $1:\frac{1}{z^{n+1}}$, d. h. $z^{n+1}$ zu gleicher Zeit unendlich-klein.

Die Summe aller Glieder der unendlichen Reihe

$$A+A\cdot z+A\cdot z^2+A\cdot z^3+\cdots$$

ist daher allemal von dem Werthe $\frac{A}{1-z}$ nur um ein Unendlich-Kleines verschieden, so oft $z<1$ übrigens beliebig groß ist.

Für $z=\frac{1}{2}$ ist also die unendliche Reihe

$$A+\tfrac{1}{2}A+\tfrac{1}{4}A+\tfrac{1}{8}A+\tfrac{1}{16}A+\cdots$$

allemal von $\frac{A}{1-\frac{1}{2}}$, d. von 2A nur um ein Unendlich-Kleines verschieden. — Ist daher $z<\frac{1}{2}$, so ist der größte Koeffizient A der unendlichen Reihe

$$a+b\cdot z+c\cdot z^2+d\cdot z^3+\cdots, \quad \text{weil sie}$$

kleiner als $A+A\cdot z+A\cdot z^2+A\cdot z^3+\cdots$ ist,

doppelt genommen, allemal größer als die ganze unendliche Reihe

$$a+b\cdot z+c\cdot z^2+d\cdot z^3+\cdots.$$

Ist daher P der grösseste der Koeffizienten in der Reihe

$$p \cdot z^n + q \cdot z^{n+1} + r \cdot z^{n+2} + \cdots,$$

so ist allemal $2P \cdot z^n$ grösser als der Werth dieser Reihe, wenn nur $z < \frac{1}{2}$ gedacht wird, also um so mehr, wenn z noch kleiner oder gar unendlich-klein seyn sollte.

Der Werth einer nach steigenden Potenzen vom unendlich-klein gedachten z, fortlaufenden unendlichen Reihe, in welcher $z^n$ die niedrigste der in ihr vorkommenden Potenzen von z ist, ist daher, obgleich aus unendlich vielen Gliedern bestehend, doch ein Unendlich-Kleines der nten Ordnung (nach Nr. 7.). Dieser Werth ist daher gar nicht unendlich-klein, sondern endlich, wenn $n = o$ seyn, d. h. wenn die Reihe mit einem Gliede k ohne z anfangen sollte.

9) Ist eine Reihe, die nach steigenden Potenzen eines unendlich-kleinen z fortläuft, der Null gleich, so ist der Koeffizient p ihres ersten Gliedes selbst unendlich-klein. — Und da das Unendlich-Kleine der Null nächst anliegt, so ist es der Wahrheit nächst anliegend, wenn man diesen ersten Koeffizienten p der Null gleich nimmt; und jeder andere, wenn auch noch so kleine Werth, den man statt p setzen wollte, würde dagegen vom wahren Werthe von p unendlich weit abliegen.

Ist nämlich

$$p \cdot z^n + q \cdot z^{n+1} + r \cdot z^{n+2} + s \cdot z^{n+3} + \cdots = 0,$$

also auch $$p + q \cdot z + r \cdot z^2 + s \cdot z^3 + \cdots = 0,$$

so ist nach (Nr. 8.) $q \cdot z + r \cdot z^2 + s \cdot z^3 + \cdots$ zum mindesten unendlich-klein von der ersten Ordnung. Also ist auch p unendlich-klein zum mindesten von der ersten Ordnung. Weil aber p, der Voraussetzung zu Folge, als Koeffizient, von dem unendlich-kleinen z unabhängig ist, so wird man, wenn man $p = 0$ setzt, wenn nicht das Wahre, doch dasjenige haben, welches dem Wahren zunächst kommt, weil jeder andre noch so kleine Werth, den man für p setzen wollte vom Unendlich-Kleinen unendlich-weit abliegt. (Vgl. Nr. Nr. 3 u. 4.)

In solchem Falle muß man daher unbedenklich

$$p = 0$$

nehmen, so oft überhaupt p in Ziffern wirklich ausgewerthet werden soll.

10) Wird daher eine Funktion f für 2 nächst auf einander folgende Werthe von x, nämlich für $x = \alpha$ und für $x = \alpha + h$, wo h unendlich-klein gedacht werden muß, der Null gleich, so ist für diesen Werth $x = \alpha$ nicht bloß

$$f_x = 0,$$ sondern auch noch $$\partial f_x = 0.$$

Denn es ist nach der Voraussetzung (für h unendlich-klein und für $x = \alpha$) $f_x = 0$ und $f_{x+h} = 0$, also auch nach dem Taylorschen Lehrsatze

$$\partial f_x \cdot h + \partial^2 f_x \cdot \frac{h^2}{2!} + \partial^3 f_x \cdot \frac{h^3}{2!} + \cdots = 0,$$

demnach auch nach (Nr. 9.) der erste Koeffizient $\partial f_x = 0$ (für diesen bestimmten Werth $\alpha$ von x).

Wird aber eine Funktion $f_x$ für drei nächst auf einander folgende Werthe $\alpha$, $\alpha + h$ und $\alpha + m \cdot h$ von x (wo h unendlich-klein gedacht ist) jedesmal der Null gleich, so ist auch für $x = \alpha$ nicht bloß $f_x = 0$ und $\partial f_x = 0$, sondern auch noch $\partial^2 f_x = 0$.

Denn man hat das mal die 3 Gleichungen

1) $$f_x = 0$$

und 2) $$\partial f_x \cdot h + \partial^2 f_x \cdot \frac{h^2}{2!} + \partial^3 f_x \cdot \frac{h^3}{3!} + \cdots = 0$$

3) $$\partial f_x \cdot mh + \partial^2 f_x \cdot \frac{m^2 \cdot h^2}{2!} + \partial^3 f_x \cdot \frac{m^3 \cdot h^3}{3!} + \cdots = 0.$$

Eliminirt man aus den beiden letztern Gleichungen $\partial f_x$ [dadurch daß man die (2.) mit m multiplicirt und von der (3.) subtrahirt], so erhält man hieraus noch

4) $$\partial^2 f_x \cdot \frac{(m^2 - m)h^2}{2!} + \partial^3 f_x \cdot \frac{(m^3 - m)h^3}{3!} + \cdots = 0;$$

und deshalb ist nach (Nr. 9.), wegen der Gleichung (2.) zuerst $\partial f_x = 0$, und wegen der Gleichung (4.) auch noch $\partial^2 f_x = 0$, versteht sich, immer nur wenn dieser bestimmte Werth $\alpha$ statt x gesetzt wird.

Und allgemein: Ist $f_x$ der Null gleich für n nächst auf einander folgende Werthe von x, deren erster $\alpha$ ist, so ist für diesen Werth $\alpha$ von x nicht bloß $f_x = 0$, sondern auch noch $\partial f_x = 0$, $\partial^2 f_x = 0$, $\partial^3 f_x = 0$, und so w. f., so wie zuletzt noch $\partial^{n-1} f_x = 0$; aber nicht nothwendig auch $\partial^n f_x = 0$.

11) Hat man ferner eine Gleichung

$$f_{x,y} = 0,$$

welche für 3 Paare von einander unabhängigen, aber einander nächst anliegender Werthe von x und y identisch wird (nämlich für $x = \alpha$ und $y = \beta$, dann für $x = \alpha + h$, $y = \beta + k$, endlich noch für $x = \alpha + mh$, $y = \beta + nk$, wo h und k unendlich-klein sind), so ist für die Werthe $\alpha$ und $\beta$ von x und y, nicht bloß $f_{x,y} = 0$, sondern auch noch $\partial f_x = 0$ und $\partial f_y = 0$.

Denn, entwikkelt man $f_{x+h,y+k}$ und $f_{x+mh,y+nk}$ nach dem Taylor'schen Lehrsatz für 2 Veränderliche (§. 16. 2.) in Reihen, die nach h und k fortlaufen, und setzt man dabei überall ph statt k, so daß bloß Reihen entstehen, die nach Potenzen von h allein fortlaufen, so hat man nach den gemachten Voraussetzungen, wenn $\alpha$ und $\beta$ statt x und y gesetzt werden, die 3 Gleichungen

1) $f_{x+y} = 0$

2) $(\partial f_x + \partial f_y \cdot p) \cdot h + (\partial^2 f_x + 2\partial^2 f_{x,y} \cdot p + \partial^2 f_y \cdot p^2) \cdot \frac{h^2}{2!} + \cdots = 0$

3) $(\partial f_x \cdot m + \partial f_y \cdot np) \cdot h + (\cdots) \cdot \frac{h^2}{2!} + \cdots = 0.$

Daraus folgt aber nach (9.),

4) $\partial f_x + \partial f_y \cdot p = 0$ und 5) $m \cdot \partial f_x + n \cdot \partial f_y \cdot p = 0$;

und aus diesen Gleichungen folgt wiederum

$$\partial f_x = 0 \text{ und } \partial f_y = 0;$$

wenn nur $\alpha$ statt x, und $\beta$ statt y substituirt wird.

12) Aus (Nr. 9.) folgt aber auch noch dieser andere praktisch bequeme und daher wichtige Satz:

**Wenn man in einer Gleichung zwischen Unendlich-Kleinen verschiedener Ordnungen, alle Glieder der niedrigsten Ordnung allein behält, alle Glieder der höhern Ordnungen aber wegläßt, so ist die so entstehende Gleichung allemal eine richtige.**

Denn bringt man die ganze Gleichung auf Null, so lassen sich alle Glieder der niedrigsten $n^{ten}$ Ordnung in ein einziges Glied $p \cdot z^n$ vereinigen; eben so kann man alle Glieder der nächsten höhern $(n+1)^{ten}$ Ordnung in ein einziges Glied $q \cdot z^{n+1}$ zusammenfassen; u. s. w. f. Die gegebene Gleichung nimmt daher die Form

$$p \cdot z^n + q \cdot z^{n+1} + r \cdot z^{n+2} + s \cdot z^{n+3} + \cdots = 0$$

an, während z unendlich-klein ist. Aber eben deshalb ist nun nach (Nr. 9.),

$$p = 0, \text{ also auch } p \cdot z^n = 0;$$

d. h. die gegebene Gleichung bleibt richtig, wenn man alle Glieder wegläßt, welche unendlich-klein von einer höhern Ordnung sind, und nur die Glieder der niedrigsten Ordnung alle sorgfältig zusammen behält.

Hat man es also mit Gleichungen zu thun zwischen Unendlich-Kleinen, so kann man schon während des Aufbaues der Gleichungen alle Glieder, welche das Unendlich-Kleine in einer höhern Ordnung enthalten werden, als diejenige ist, welche in der Gleichung bereits vorkommt, ohne weiteres weglassen. Dadurch wird der Aufbau der Gleichungen ungemein erleichtert.

Es kann sich aber bei diesem Verfahren treffen, daß die so entstehende Gleichung identisch wird, d. h. daß sich die Unendlich-Kleinen dieser niedrigsten Ordnung alle von selber aufheben, das Resultat also zwar richtig ist, aber dem Zwecke nicht mehr entspricht. Dann muß man alle Glieder der nächst höhern Ordnung des Unendlich-Kleinen in die Gleichung mit aufnehmen und so eine neue Gleichung sich bilden, welche vielleicht das Verlangte leistet. — Sollte auch diese Gleichung identisch werden, d. h. sollten auch die Unendlich-Kleinen dieser nächst höhern Ordnung sich gegenseitig aufheben, so daß sie gar nicht erscheinen, — so sieht man sich gezwungen, wenn man sonst seinen Zweck verfolgen will, alle Glieder der nun nächst höhern Ordnung in die Gleichung mit aufzunehmen; u. s. f.

Dieses letztere Ereigniß tritt aber in den Anwendungen nur höchst selten ein.

## §. 21.

Ist f eine Funktion eines Veränderlichen x, und bezeichnen wir einen unendlich-kleinen Zuwachs, welchen dieser letztere erleidet, durch dx *), so wird auch f einen Zuwachs erleiden, den wir durch df bezeichnen. Dieser zugehörige Zuwachs df soll nun gefunden, d. h. in dx entwikkelt ausgedrückt werden.

*) Um solche Zuwachse zu bezeichnen, gebrauchen wir immer das (stehende) d, zum Unterschiede von dem (runden) ∂, welches hier durchaus und immer im Sinne des ersten Kapitels gebraucht wird, d. h. als ein Operations-Zeichen. Wir bitten den geneigten Leser, hierauf besonders zu achten, weil die Verwechslung dieser beiden d und ∂ ein völliges Nichtverstehen des hier Entwikkelten zur unvermeidlichen Folge hätte.

Man hat aber, der Voraussetzung zu Folge,

1) $$df = f_{x+dx} - f_x.$$

Entwikkelt man nun $f_{x+dx}$ nach dem Taylor'schen Lehrsatze (§. 7. ⊙.), indem man daselbst $dx$ statt $h$ setzt, so ergiebt sich sogleich

2) $$df = \partial f_x \cdot dx + d^2 f_x \cdot \frac{(dx)^2}{2!} + \partial^3 f_x \cdot \frac{(dx)^3}{3!} + \ldots$$

Da nun $dx$ unendlich-klein (von der ersten Ordnung) gedacht ist, so folgt aus (§. 20. Nr. 8.), daß dieser zugehörige Zuwachs $df$ im Allgemeinen ebenfalls unendlich-klein von der ersten Ordnung ist, dagegen für einige spezielle Werthe von $x$ (welche $df_x$ zu Null machen) unendlich-klein von der zweiten (auch höhern) Ordnung werden kann, so daß er dann nach (§. 20. Nr. 12.) in Vergleichung mit Unendlich-Kleinen der ersten Ordnung, also namentlich in Vergleichung mit $dx$, nicht in Rechnung, oder (was in der Wirkung genau als dasselbe erscheint) als Null in Rechnung gebracht werden kann.

Es geht daher, wenn nur $dx$ unendlich-klein ist, die Gleichung (2.) in die eben so genaue Gleichung

3) $$df = \partial f_x \cdot dx \quad \text{oder} \quad \frac{df}{dx} = \partial f_x$$

über, sobald man nur, was in der Regel der Fall ist, Unendlich-Kleine der ersten Ordnung berüksichtigen will.

Das Verhältniß oder der Quozient dieser beiden unendlich-kleinen Zuwachse $df$ und $dx$, ist daher bestimmt, und jener Funktion $\partial f_x$ gleich, welche wir unter dem Namen der Ableitung oder des Differenzial-Koeffizienten im vorhergehenden Kapitel aus jedem gegebenen $f_x$ zu finden gelehrt haben.

Nennt man diese unendlich-kleinen Zuwachse $df$, $dx$, Differenzialien, so kann man $\frac{df}{dx}$ und also auch $\partial f_x$ mit Recht einen Differenzial-Quozienten nennen.

Anmerkung. In dem Ausnahmsfalle aber, daß mit die Glieder der 2ten Ordnung des Unendlich-Kleinen mit einander verglichen werden sollen, muß man

$$df = \partial f_x \cdot dx + \partial^2 f_x \cdot \frac{(dx)^2}{2!}$$

nehmen; so wie man

$$df = \partial f_x \cdot dx + \partial^2 f_x \cdot \frac{dx^2}{2!} + \partial^3 f_x \cdot \frac{dx^3}{3!}$$

nehmen müßte, wenn in gewissen Ausnahmsfällen nur die Glieder mit einander verglichen werden sollen, welche Unendlich-Kleine der dritten Ordnung sind; u. s. w. s.

## §. 22.

Ist f eine Funktion von x und y, so kann f dreierlei Zuwachse erleiden,

1) den Zuwachs, der hervorgeht, wenn man bloß x um dx wachsen läßt. Wird solcher durch df bezeichnet, so hat man nach (§. 21.)

$$\text{I.} \quad df = \partial f_x \cdot dx, \quad \text{oder} \quad \frac{df}{dx} = \partial f_x;$$

2) den Zuwachs, den f dann erleidet, wenn y allein um dy wächst. Wird dieser jetzige unter df verstanden, so hat man

$$\text{II.} \quad df = \partial f_y \cdot dy, \quad \text{oder} \quad \frac{df}{dy} = \partial f_y;$$

endlich aber auch

3) den Zuwachs, welchen f dann erleidet, wenn x und y zugleich bezüglich um dx und dy wachsen. Wird der jetzige Zuwachs unter df verstanden, so daß jetzt $df = f_{x+dx,y+dy} - f_{x,y}$ ist, so kann man solchen nach dem Taylor'schen Lehrsatz für 2 Veränderliche (§. 10. C.) finden, indem man daselbst dx statt h, und dy statt k setzt, zugleich aber, in so ferne dx und dy unendlich-klein gedacht seyn sollen, alle zweiten und höheren Dimensionen von h und k (nach §. 20. Nr. 12.) gegen h und k selbst, wegläßt. — Man erhält dann

$$\text{III.} \quad df = \partial f_x \cdot dx + \partial f_y \cdot dy.$$

Vergleicht man nun diese 3 Resultate (I. — III.) mit einander, so bemerkt man sogleich: 1) daß ein und dasselbe Zeichen df dreimal eine andere und verschiedene Bedeutung hat; 2) daß

in der Gleichung (III.) die Bedeutung von df gerade die Summe ist, derjenigen beiden Ausdrücke, welche in (I.) und (II.) unter df verstanden werden. — Deshalb nennt man die beiden df in (I. u. II.) die Theilzuwachse oder die Parzial-Differenzialien von f; während man df in (III.) das totale Differenzial von f nennt.

Weil es aber verwirren würde, wenn man ein und dasselbe Zeichen df in 3 verschiedenen Bedeutungen gebrauchen wollte, so pflegt man

statt des df in (I.) zu schreiben $\left(\frac{df}{dx}\right) \cdot dx$,

auch wohl bloß $\frac{df}{dx} \cdot dx$;

statt des df in (II.) aber schreibt man $\left(\frac{df}{dy}\right) \cdot dy$,

auch wohl bloß $\frac{df}{dy} \cdot dy$;

so daß $\left(\frac{df}{dx}\right)$ und $\left(\frac{df}{dy}\right)$, oder wohl auch $\frac{df}{dx}$ und $\frac{df}{dy}$, als Zeichen betrachtet werden, welche nur in dieser Form eine völlig bestimmte Bedeutung haben, so daß das Zeichen df im Zähler nie von seinem Nenner getrennt wird, weil nur der untergesetzte Nenner erkennen läßt, in welchem Sinne das Zeichen df im Zähler genommen ist. Diese zusammengesetzten Zeichen nennt man dann auch Parzial-Differenzial-Quotienten, wohl auch Parzial-Differenzial-Koeffizienten. — Wird nun außerdem das Zeichen df selbständig gebraucht, so versteht man dann allemal das totale Differenzial darunter, d. h. den Gesammtzuwachs, welchen f dadurch erleidet, daß x und y zu gleicher Zeit um die unendlich-kleinen dx und dy wachsen. — Die Gleichung (III.) kann nun, dieser festgesetzten Bezeichnung zu Folge, und indem man sie mit den Gleichungen (I. u. II.) in Verbindung bringt, auch so geschrieben werden, nämlich

$$df = \left(\frac{df}{dx}\right) \cdot dx + \left(\frac{df}{dy}\right) \cdot dy,$$

oder

$$df = \frac{df}{dx} \cdot dx + \frac{df}{dy} \cdot dy.$$

Anmerkung 1. Auch hier muß man in den, in der Anmerkung zu (§. 21.) angeführten Ausnahmsfällen, die Glieder der nächst höhern Dimensionen der unendlich-kleinen dx, dy, welche der Taylor'sche Lehrsatz liefert, noch hinzunehmen.

Anmerkung 2. Ist aber $f_{x,y} = 0$ und zugleich auch $f_{x+dx,y+dy} = 0$ vorausgesetzt, so ist, wenn man die Unendlich-Kleinen der höhern Ordnung nicht berücksichtigt, nothwendig auch $df = 0$, d. h. auch $\partial f_x \cdot dx + \partial f_y \cdot dy = 0$.

## §. 23.

Ist f eine Funktion dreier Veränderlichen x, y und z, welche bezüglich um die unendlich-kleinen Zuwachse dx, dy, dz wachsen können, so erleidet f sieben verschiedene Zuwachse, 1) 3 Zuwachse, wenn x, y, z jedes allein wächst; 2) 3 Zuwachse, wenn man x, y, z immer zwei zugleich wachsen; 3) 1 Zuwachs, wenn x, y, z alle 3 zugleich wachsen. — Die 3 erstern in (1.), bezüglich durch dx, dy, dz dividirt, nennt man wiederum Partial-Differenzial-Quozienten und bezeichnet sie wieder durch

$$\left(\frac{df}{dx}\right), \quad \left(\frac{df}{dy}\right), \quad \left(\frac{df}{dz}\right),$$

oder bloß durch

$$\frac{df}{dx}, \quad \frac{df}{dy}, \quad \frac{df}{dz}.$$

Werden die 3 folgenden Zuwachse in (2.) betrachtet, so geschieht dies dann in dem Sinne des vorhergehenden (§. 22.), indem man den 3ten Veränderlichen, der nicht wächst, auch nicht weiter beachtet, wie so viele andere Buchstaben nicht weiter beachtet werden, die in f noch vorkommen können. — Bezeichnet man aber nun durch df den totalen Zuwachs in (3.), so findet sich solcher, weil er $= f_{x+dx,y+dy,z+dz} - f_{x,y,z}$ ist, nach dem

Tay-

Taylor'schen Lehrsatz für 3 Veränderliche (§. 10. ♂.), indem man bezüglich dx,dy,dz statt h,k,l setzt, dabei aber alle, über die ersten Dimensionen von h,k,l hinaus gehenden Glieder, dem (§. 20. Nr. 12.) gemäß, gegen diese ersteren wegläßt. — Man erhält daher jetzt

V. $df = \partial f_x \cdot dx + \partial f_y \cdot dy + \partial f_z \cdot dz,$

welches man auch so schreiben kann:

VI. $$\begin{cases} df = \left(\frac{df}{dx}\right) \cdot dx + \left(\frac{df}{dy}\right) \cdot dy + \left(\frac{df}{dz}\right) \cdot dz, \\ \text{oder bloß} \\ df = \frac{df}{dx} \cdot dx + \frac{df}{dy} \cdot dy + \frac{df}{dz} \cdot dz. \end{cases}$$

Anmerk. 1. Ist aber $f_{x,y,z} = 0$ und $f_{x+dx,y+dy,z+dz} = 0$ zu gleicher Zeit vorausgesetzt, so ist, da die Unendlich-Kleinen der höhern Ordnung nicht berücksichtigt werden sollen, nothwendig auch $df = 0$, d. h. $\partial f_x \cdot dx + \partial f_y \cdot dy + \partial f_z \cdot dz = 0$, und diese Gleichung drückt demnach die Abhängigkeit aus, in welcher die unendlich-kleinen Zuwachse dx,dy,dz zu einander stehen müssen, wenn $f_{x+dx,y+dy,z+dz}$ mit $f_{x,y}$ zugleich der Null gleich seyn soll.

Anmerk. 2. Man begreift, wie diese Betrachtungen auf Funktionen von beliebig viel Veränderlichen ausgedehnt werden können. — Auch sieht man zu gleicher Zeit, daß wenn die Zuwachse dx,dy,dz, ꝛc. unendlich-klein sind, und deshalb Differenzialien genannt werden, auch allemal der von ihnen abhängige Zuwachs df unendlich-klein und im Allgemeinen auch von derselben Ordnung ist, und deshalb mit demselben Rechte ebenfalls Differenzial (und nicht bloß Differenz) genannt wird.

## §. 24.

I. Wird f als eine Funktion von x allein betrachtet, also daß man hat, wenn x ganz willkührlich um das unendlich-kleine dx wächst, und der zugehörige Zuwachs durch df bezeichnet wird,

1) $$df = \partial f_x \cdot dx;$$

ſo ſieht man, daß dieſes Differenzial df ein Produkt iſt, aus dem von x unabhängigen (nach x konſtanten) Faktor dx, und noch einer Funktion von x, nämlich $\partial f_x$. — Obgleich alſo das Differenzial dx von x ganz unabhängig (nach x konſtant) gedacht iſt, ſo iſt doch das zugehörige Differenzial df eine Funktion von x. — Wächſt daher jetzt in dieſer Funktion df, das veränderliche x noch einmal um dieſes dx, ſo wächſt auch die Funktion df um etwas, welches durch d(df) oder $d^2f$ bezeichnet wird. — Dieſes $d^2f$ heißt nun das zweite Differenzial von f und wird nach derſelben Regel gefunden aus df, wie df im (§. 21.) aus f gefunden worden iſt. Man hat nämlich, wenn man im (§. 21. Nr. 3.) $\partial f_x \cdot dx$ ſtatt f ſetzt, ſogleich

$$d^2f = \partial(\partial f_x \cdot dx)_x \cdot dx;$$

allein da dx (nach x) konſtant iſt, ſo wird dieſer konſtante Faktor nach (§. 9. Nr. 5.) bei dem Differenziren herausgeſetzt, ſo daß man hat

$$\partial(\partial f_x \cdot dx)_x = dx \cdot \partial(\partial f_x)_x = dx \cdot \partial^2 f_x.$$

Setzt man daher dieſen Werth in die vorhergehende Gleichung, ſo hat man

2) $$d^2f = \partial^2 f_x \cdot dx^2, \quad \text{oder} \quad \frac{d^2f}{dx^2} = \partial^2 f_x.$$

Da nun $d^2f$ dem zu Folge wieder eine Funktion von x iſt, ſo erleidet auch dieſes $d^2f$ noch einen Zuwachs, wenn x noch einmal um dx wächſt; und wird ſolcher durch $d(d^2f)$ oder $d^3f$ bezeichnet, ſo findet ſich nach (§. 21. Nr. 3.)

$$d^3f = \partial(\partial^2 f_x \cdot dx^2)_x \cdot dx,$$

d. h. 3) $$d^3f = \partial^3 f_x \cdot dx^3, \quad \text{oder} \quad \frac{d^3f}{dx^3} = \partial^3 f_x.$$

Dieſes $d^3f$ heißt aber das dritte Differenzial von f. u. ſ. w. f.

II. Iſt f noch immer eine Funktion von x, wird aber x wieder als eine Funktion irgend eines neuen veränderlichen t gedacht, und wächſt nun letzterer um ein unendlich-kleines dt, ſo werden x und f zugleich wachſen, um Zuwachſe die man durch

dx und df bezeichnet. Und wächst in letzteren, t noch einmal um dt, so wachsen dx und df selber wieder um etwas, welches bezüglich durch $d^2x$ und $d^2f$ bezeichnet wird. — Wächst t noch einmal um dt, so wachsen $d^2x$ und $d^2f$ wiederum bezüglich um $d^3x$ und $d^3f$. U. s. w. f. Was aber jetzt unter $d^2f$, $d^3f$, ꝛc. verstanden wird, ist etwas ganz anderes als was in (I.) unter denselben Zeichen verstanden worden ist. Es ist nämlich jetzt nach (I.)

1) $dx = \partial x_t \cdot dt$, oder $\frac{dx}{dt} = \partial x_t$;

2) $d^2x = \partial^2 x_t \cdot dt^2$, oder $\frac{d^2x}{dt^2} = \partial^2 x_t$;

3) $d^3x = \partial^3 x_t \cdot dt^3$, oder $\frac{d^3x}{dt^3} = \partial^3 x_t$;

u. s. w. f.

Und gerade eben so ist (nach I.)

1.1) $df = \partial f_{(t)} \cdot dt$, oder $\frac{df}{dt} = \partial f_{(t)}$;

2.2) $d^2f = \partial^2 f_{(t)} \cdot dt^2$, oder $\frac{d^2f}{dt^2} = \partial^2 f_{(t)}$;

3.3) $d^3f = \partial^3 f_{(t)} \cdot dt^3$, oder $\frac{d^3f}{dt^3} = \partial^3 f_{(t)}$;

u. s. w. f.

Weil aber nach (§. 16. Nr. Nr. 1. — 3.), wenn man wiederholt nach t differenziirt,

4) $\partial f_{(t)} = \partial f_x \cdot \partial x_t$;

5) $\partial^2 f_{(t)} = \partial^2 f_x \cdot \partial x^2{}_t + \partial f_x \cdot \partial^2 x_t$;

6) $\partial^3 f_{(t)} = \partial^3 f_x \cdot \partial x^3{}_t + 3\partial^2 f_x \cdot \partial x_t \cdot \partial^2 x_t + \partial f_x \cdot \partial^3 x_t$;

u. s. w. f.

ist; so folgt, wenn man in diesen Gleichungen statt $\partial x_t, \partial^2 x_t, \partial^3 x_t$, ꝛc., eben so statt $\partial f_{(t)}, \partial^2 f_{(t)}, \partial^3 f_{(t)}$, ꝛc. ihre Werthe aus (1—3) und (1.1—3.3) substituirt,

A) $\frac{df}{dt} = \partial f_x \cdot \frac{dx}{dt}$, oder $df = \partial f_x \cdot dx$;

B) $\frac{d^2f}{dt^2} = \partial^2 f_x \cdot \frac{dx^2}{dt^2} + \partial f_x \cdot \frac{d^2x}{dt^2}$;

C) $\frac{d^3f}{dt^3} = \partial^3 f_x \cdot \frac{dx^3}{dt^3} + 3\partial^2 f_x \cdot \frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + \partial f_x \cdot \frac{d^3x}{dt^3}$;

u. s. w. f.

Setzt man aber in diesen Gleichungen (A, B, C, ꝛc.) statt der Differenzial-Koeffizienten $\partial f_x$, $\partial^2 f_x$, $\partial^3 f_x$, ꝛc. ihre Werthe aus (I. 1. 2. 3.), so gehen diese Gleichungen, wenn man noch mit dt, $dt^2$, $dt^3$, ꝛc. multiplizirt, in folgende über:

$\alpha$) $df = \frac{df}{dx} \cdot dx$;

$\beta$) $d^2f = \frac{d^2f}{dx^2} \cdot dx^2 + \frac{df}{dx} \cdot d^2x$;

$\gamma$) $d^3f = \frac{d^3f}{dx^3} \cdot dx^3 + 3\frac{d^2f}{dx^2} \cdot dx \cdot d^2x + \frac{df}{dx} \cdot d^3x$;

u. s. w.

wo zur Linken unter df, $d^2f$, $d^3f$, ꝛc. die jetzigen Zuwachse verstanden werden, die durch wiederholtes Wachsen des Veränderlichen t um ein und dasselbe dt hervorgehen, während dieselben Zeichen df, $d^2f$, $d^3f$, ꝛc. auf der rechten Seite des Gleichheits-Zeichens, die Zuwachse derselben Funktion f bedeuten, welche durch das Wachsen des x um ein und dasselbe konstante dx (unabhängig von t) hervorgehen. Diese Gleichungen ($\alpha$, $\beta$, $\gamma$) lehren also, wie diese beiden verschiedenen Arten von Differenzialien unter sich zusammenhängen; namentlich lehren sie:

1) Das erste Differenzial df ist in beiden Fällen dasselbe, wenn nur in jedem Falle unter dx dasselbe gedacht wird, d. h. wenn in (I.) das beliebig gedachte dx dem Werthe nach übereinstimmt mit dem dx, wie solches hier (in II.) durch das Wachsen des Veränderlichen t um dt hervorgeht.

2) Die zweiten, dritten und höhern Differenzialien $d^2f$, $d^3f$, ꝛc. sind in beiden Fällen von einander verschieden, wenn auch dx in beiden Fällen denselben Werth haben sollte.

3) Wenn man $d^2x$, $d^3x$, ꝛc. der Null gleich ſetzt, ſo ſind dieſe höheren Differenzialien in jedem der beiden Fälle nicht mehr verſchieden, wie die bloße Anſicht der Gleichungen ($\alpha$. $\beta$. $\gamma$.) lehrt. Allein ſo wie $d^2x = 0$, $d^3x = 0$, ꝛc. iſt, ſo hat man vorausgeſetzt, daß $dx = dt$, d. h. daß dx unveränderlich iſt, und dann verſteht ſich dieſe Uebereinſtimmung von ſelbſt.

III. Uebrigens darf man, ſoll nicht die größte Verwirrung entſtehen, in den Gleichungen ($\alpha$. $\beta$. $\gamma$.) zur Rechten, nämlich in den Ausdrücken $\frac{df}{dx}$, $\frac{d^2f}{dx^2}$, $\frac{d^3f}{dx^3}$, ꝛc. ꝛc. nicht die Nenner von den Zählern trennen, weil gerade an den Nennern erkannt wird, in welchem Sinne die Zeichen df, $d^2f$, $d^3f$, ꝛc. in den Zählern zu nehmen ſind, daß ſie nämlich von dem unabhängigen Wachſen des x um das (konſtante) dx herrühren, und nicht von dem Wachſen des dritten Veränderlichen t (um dt).

Gewöhnlich ſagt man übrigens: „das Differenzial dx wäre konſtant," wenn man den Fall (I.) im Auge hat; dagegen ſagt man: „das Differenzial dx wäre ſelbſt wieder veränderlich," ſtatt daß man, wie wir hier in (II.) gethan haben, ſagen ſollte, daß x ſelbſt wieder als Funktion eines neuen Veränderlichen betrachtet, und dieſer letztere wachſend gedacht werde. — Uebrigens ſind, wie dies hier immer vorausgeſetzt wird, alle beliebig gedachten Zuwachſe dt oder dx unendlich-klein gedacht, und alle abhängigen Zuwachſe, wie die Formeln lehren, ſind dann unendlich-klein geworden.

Dabei ſind aber, wie die Anſicht der Formeln lehrt, alle zweiten Differenzialien $d^2f$, $d^2x$, Unendlich-Kleine der 2ten Ordnung, alle dritten Differenzialien $d^3f$ oder $d^3x$ Unendlich-Kleine der 3ten Ordnung u. ſ. w. ſ.; unter der Vorausſetzung, die wir hier immer machen, daß dx, dt, dy, ꝛc. ꝛc. Unendlich-Kleine der erſten Ordnung ſind.

## §. 25.

I. Iſt f eine Funktion von x und y, und wächſt x um dx, und zu gleicher Zeit y um dy, und nennt man df den Zu-

wachs, den f dadurch erleidet, so hat man, wenn, wie immer, dx und dy unendlich klein gedacht sind, nach (§. 22.)

$$1) \quad df = \partial f_x \cdot dx + \partial f_y \cdot dy = \frac{df}{dx} \cdot dx + \frac{df}{dy} \cdot dy.$$

Denkt man sich nun, daß in diesem Zuwachse df, der selbst wieder eine Funktion von x und y ist, abermals x und y um bezüglich dx und dy wachsen, und daß nun der Zuwachs, den df dadurch erleidet, wiederum durch $d^2f$ bezeichnet wird, so erhält man, weil dx und dy als von x und y unabhängig (nach x und y konstant) angesehen werden, sogleich nach demselben (§. 22.)

$$d(\partial f_x \cdot dx) = dx \cdot d(\partial f_x) = dx \cdot (\partial^2 f_x \cdot dx + \partial^{1,1} f_{x,y} \cdot dy),$$
$$d(\partial f_y \cdot dy) = dy \cdot d(\partial f_y) = dy \cdot (\partial^{1,1} f_{x,y} \cdot dx + \partial^2 f_y \cdot dy);$$

also auch

$$2) \quad \begin{cases} d^2f = \partial^2 f_x \cdot dx^2 + 2\partial^{1,1} f_{x,y} \cdot dx \cdot dy + \partial^2 f_y \cdot dy^2, \\ \text{oder} \\ d^2f = \frac{d^2f}{dx^2} \cdot dx^2 + 2\frac{d^2f}{dx^2} \cdot dx \cdot dy + \frac{d^2f}{dy^2} \cdot dy^2; \end{cases}$$

in so fern nach (§. 10.)

$$\partial^{1,1} f_{x,y} = \partial(\partial f_y)_x = \partial(\partial f_x)_y,$$

aber nach (§. 21. §. 22.)

$$\partial f_y = \frac{df}{dy} \quad \text{und} \quad \partial\left(\frac{df}{dy}\right)_x = \frac{d\left(\frac{df}{dy}\right)}{dx},$$

oder

$$\partial f_x = \frac{df}{dx} \quad \text{und} \quad \partial\left(\frac{df}{dx}\right)_y = \frac{d\left(\frac{df}{dx}\right)}{dy},$$

ist, und jeder der beiden (nach (§. 10. Nr. 1.) einander gleichen) Differenzial-Quotienten am weitesten zur Rechten, durch das bequemere $\frac{d^2f}{dx \cdot dy}$ bezeichnet wird.

Denkt man sich hier in diesem zweiten Differenzial $d^2f$, in so ferne solches abermals eine Funktion von x und y ist, diese letzteren wiederum bezüglich um dx und dy wachsend, und bezeichnet man den dadurch hervorgehenden Zuwachs, den $d^2f$ er-

leidet, durch $d^3f$, so hat man für dieses dritte Differenzial noch

$$3)\quad \begin{cases} d^3f = \partial^3 f_x \cdot dx^3 + 3\partial^{2,1} f_{x,y} \cdot dx^2 \cdot dy + 3\partial^{1,2} f_{x,y} \cdot dx \cdot dy^2 \\ \qquad\qquad + \partial^3 f_y \cdot dy^3, \\ \text{oder} \\ d^3f = \dfrac{d^3f}{dx^3} \cdot dx^3 + 3\dfrac{d^3f}{dx^2 \cdot dy} \cdot dx^2 \cdot dy + 3\dfrac{d^3f}{dx \cdot dy^2} \cdot dx \cdot dy^2 \\ \qquad\qquad + \dfrac{d^3f}{dy^3} \cdot dy^3, \end{cases}$$

wo zur Rechten ein und dasselbe Zeichen $d^3f$ 4 verschiedene, jedoch an den darunter stehenden Nennern erkennbare und dadurch von einander zu unterscheidende 3te (Parzial-) Differenzialien vorstellt, während das (totale) 3te Differenzial $d^3f$ zur Linken, wiederum eine 5te verschiedene Bedeutung hat.

U. s. w. f.

II. Denkt man sich immer noch f als eine Funktion von x und y, welche hinter einander um dx und dy wachsen; denkt man sich aber letztere dx und dy selbst wieder veränderlich (d. h. denkt man sich x und y als Funktionen von t, und t um dt wachsend, so daß x und y bezüglich um dx, dy, letztere wieder bezüglich um $d^2x$, $d^2y$, ꝛc. ꝛc. wachsen), und bezeichnet man die nun hervorgehenden Zuwachse durch df, $d^2f$, ꝛc. ꝛc., so hat man nach (§. 24.)

$$1)\quad df = \partial f_{(t)} \cdot dt,$$

$$2)\quad d^2f = \partial^2 f_{(t)} \cdot dt^2,$$

u. s. w. f.

während aber jetzt nach (§. 11.) und wenn man hinter einander nach t differenzirt,

$$1.1)\quad \partial f_{(t)} = \partial f_x \cdot \partial x_t + \partial f_y \cdot \partial y_t;$$

$$2.2)\quad \partial^2 f_{(t)} = \partial^2 f_x \cdot \partial x^2{}_t + 2\partial^{1,1} f_{x,y} \cdot \partial x_t \cdot \partial y_t + \partial^2 f_y \cdot \partial y^2{}_t + \partial f_x \cdot \partial^2 x_t + \partial f_y \cdot \partial^2 y_t;$$

u. s. w. f.

ist. Setzt man daher diese Werthe in (1.2.), so erhält man

A) $df = \partial f_x \cdot dx + \partial f_y \cdot dy,$

oder $df = \frac{df}{dx} \cdot dx + \frac{df}{dy} \cdot dy;$

B) $d^2f = \partial^2 f_x \cdot dx^2 + 2\partial^{1,1} f_{x,y} \cdot dx \cdot dy + \partial^2 f_y \cdot dy^2 + \partial f_x \cdot d^2x + \partial f_y \cdot d^2y,$

oder $d^2f = \frac{d^2f}{dx^2} \cdot dx^2 + 2\frac{d^2f}{dx \cdot dy} \cdot dx \cdot dy + \frac{d^2f}{dy^2} \cdot dy^2 + \frac{df}{dx} \cdot d^2x + \frac{df}{dy} \cdot d^2y,$

u. s. w. s.

wo die Differenzialien von f zur Rechten bezüglich genau dieselbe Bedeutung haben, wie in (I.), während jedoch die Zeichen $d^2f$, ꝛc. ꝛc. zur Linken offenbar etwas andres bedeuten, als dieselben Zeichen $d^2f$, ꝛc. ꝛc. in den Gleichungen der (I.) zur Linken vorstellen.

## §. 26.

Man begreift, wie man alle diese Betrachtungen auf Funktionen f von beliebig viel Veränderlichen ausdehnen kann, wie aber die Bedeutung solcher Zeichen df, $d^2f$, $d^3f$, ꝛc. sehr schwankend ist, wenn man nicht statt dieser Differenzialien lieber Differenzial-Quozienten schreibt, so daß man dann an den Nennern erst genau erkennt (vermöge der ein- für allemal gemachten Annahme), in welchem Sinne die Zeichen df, $d^2f$, $d^3f$, ꝛc. im Zähler, zu nehmen sind.

Es sind aber allemal gleichbedeutend gefunden worden die Zeichen

$\partial f_x$ und $\frac{df}{dx}$,

$\partial^2 f_x$ und $\frac{d^2f}{dx^2}$,

$\partial^{1,1} f_{x,y}$ und $\frac{d^2f}{dx \cdot dy}$,

$\partial^3 f_x$ und $\frac{d^3f}{dx^3}$;

$$\partial^{2,1} f_{x,y} \quad \text{und} \quad \frac{d^3 f}{dx^2 \cdot dy},$$

$$\partial^{1,2} f_{x,y} \quad \text{und} \quad \frac{d^3 f}{dx \cdot dy^2},$$

u. ſ. w. f.;

ſo daß wir in der Folge, ſelbſt da, wo wir unendlich-kleine Zuwachſe zu beſtimmen haben, doch lieber die links ſtehenden Zeichen gebrauchen, als die hier zur Rechten ſtehenden; auch die unendlich-kleinen Zuwachſe, wenn wir ſie brauchen ſollten, lieber jedesmal direkt, d. h. bloß durch Zuziehung des 1ſten Kapitels und des darin aufgeſtellten Taylor'ſchen Lehrſatzes für Funktionen eines und mehrerer Veränderlichen, ableiten wollen, als daß wir Paragraphen des gegenwärtigen Kapitels zu Hilfe nehmen.

Der Taylor'ſche Lehrſatz (§. 7. ⊙.) läßt ſich übrigens, in die hieſigen Zeichen ausgedrückt, nun auch ſo ſchreiben:

$$\text{I.} \quad f_{x+h} = f + \frac{df}{dx} \cdot h + \frac{d^2 f}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{2!} + \frac{d^3 f}{dx^3} \cdot \frac{h^3}{3!} + \ldots$$

Der Taylor'ſche Lehrſatz für 2 Veränderliche (§. 10. ☾.) ſchreibt ſich dagegen nun auch ſo:

$$\begin{aligned}\text{II.} \quad f_{x+h,y+k} = f &+ \frac{df}{dx} \cdot h + \frac{d^2 f}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{2!} + \frac{d^3 f}{dx^3} \cdot \frac{h^3}{3!} + \ldots \\ &+ \frac{df}{dy} \cdot k + 2\frac{d^2 f}{dx \cdot dy} \cdot \frac{hk}{2!} + 3\frac{d^3 f}{dx^2 \cdot dy} \cdot \frac{h^2 k}{3!} + \ldots \\ &+ \frac{d^2 f}{dy^2} \cdot \frac{k^2}{2!} + 3\frac{d^3 f}{dx \cdot dy^2} \cdot \frac{hk^2}{3!} + \ldots \\ &+ \frac{d^3 f}{dy^3} \cdot \frac{k^3}{3!} + \ldots\end{aligned}$$

Desgleichen ſchreibt ſich (§. 10. ♂.) nun noch ſo:

$$\text{III.} \quad f_{x+h,y+k,z+l} = f + \left(\frac{df}{dx} \cdot h + \frac{df}{dy} \cdot k + \frac{df}{dz} \cdot l\right) + \left(\frac{d^2 f}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{2!} + \ldots\right) + \ldots$$

u. ſ. w. f.

# Höhere Analysis.

## Drittes Kapitel.

**Integral-Rechnung. Quadraturen oder Integration entwickelt gegebener Funktionen.**

### § 27.

Jede Funktion $\psi_x$, deren Differenzial-Koeffizient nach x, einer gegebenen-Funktion $y_x$ gleich wird, heißt ein **Integral** von $y_x$ nach x, und wird durch das Zeichen

$$\int y \cdot dx \quad \text{oder} \quad \int y_x \cdot dx$$

vorgestellt, wo das angehängte dx bloß andeuten soll, daß der Differenzial-Koeffizient von dieser Funktion, nach x genommen werden muß, wenn $y_x$ herauskommen soll *). Das Integral finden, nennt man **integriren**.

Ist demnach $\psi_x$ das gesuchte Integral von $y_x$ nach x, ist also

1) $$\psi_x = \int y_x \cdot dx,$$

so ist nothwendig

2) $$\partial\psi_x = y_x, \quad \text{oder} \quad d\psi = y_x \cdot dx,$$

*) Ist $\psi_x$ eine Funktion von x, und denkt man sich x um das unendlich-kleine dx wachsend, so wächst $\psi$ um etwas, das durch $d\psi$ bezeichnet werden mag; und man hat dann (nach §. 21.) $d\psi = \partial\psi_x \cdot dx$. Ist also $\partial\psi_x = y_x$, so ist $d\psi = y_x \cdot dx$. — Man kann daher sagen: das Integral $\int y_x \cdot dx$ bezeichne die Funktion $\psi_x$ von x, deren Differenzial $d\psi$ genau dem $y_x \cdot dx$ gleich ist. Daher gerade diese Bezeichnung.

d. h. I. $\partial(\int y_x \cdot dx)_x = y_x$.

Ist aber vorausgesetzt

$\alpha)$ $\partial\psi_x = y_x$,

so ist auch

$\beta)$ $\psi_x = \int y_x \cdot dx$,

d. h. II. $\psi_x = \int(\partial\psi_x) \cdot dx$.

## §. 26.

Ist $\psi_x$ ein Integral von $y_x$ nach x, so ist nach dem Maclaurin'schen Lehrsatze (§. 7. ⊙.)

1) $\psi_x = [\psi_x]_\alpha + [\partial\psi_x]_\alpha \cdot (x-\alpha) + [\partial^2\psi_x]_\alpha \cdot \frac{(x-\alpha)^2}{2!} + \cdots$

Weil aber der Voraussetzung zu Folge

2) $\partial\psi_x = y_x$

ist, so folgt, wenn man diese Gleichung unendlich oft hinter einander nach x differenzirt,

3) $\partial^2\psi_x = \partial y_x$, $\partial^3\psi_x = \partial^2 y_x$, $\partial^4\psi_x = \partial^3 y_x$, &c. &c.

Setzt man daher diese Werthe aus (2. u. 3.) in die Gleichung (1.), und noch

4) C statt $[\psi_x]_\alpha$,

so hat man

5) $\psi_x = C + [y_x]_\alpha \cdot (x-\alpha) + [\partial y_x]_\alpha \cdot \frac{(x-\alpha)^2}{2!} + \cdots$,

wo zur Rechten alles bekannt (nämlich von dem gegebenen $y_x$ abhängig) ist, bis auf C, welches noch näher und so bestimmt werden muß, daß wenn man in (5.) den Ausdruck zur Rechten nach x differenzirt, dann gerade $\varphi_x$ wieder kommt.

Differenzirt man aber die Reihe zur Rechten in (5.) und bedenkt man, daß C nach x konstant ist, also, nach x differenzirt, Null giebt, so erhält man

$[y_x]_\alpha + [\partial y_x]_\alpha \cdot (x-\alpha) + [\partial^2 y_x]_\alpha \cdot \frac{(x-\alpha)^2}{2!} + \cdots$;

und dies ist genau die Maclaurin'sche Reihe für $y_x$ (§. 19.).

Also ist die Reihe zur Rechten in (5.) genau das Integral von y nach x, wie man auch C nehmen mag, wenn es nur von x unabhängig (nach x konstant) gedacht ist.

Die Gleichung (5.) schreibt sich daher so:

$$(\odot)\cdots \int y_x \cdot dx = C + [y_x]_\alpha \cdot (x-\alpha) + [\partial y_x]_\alpha \cdot \frac{(x-\alpha)^2}{2!} + \cdots$$

und sie ist eine allgemeine Integral-Formel, d. h. sie giebt jedes Integral von jeder gegebenen Funktion $y_x$, nur meist in Form einer unendlichen Reihe *), d. h. häufig in unbequemer Form. Dabei heißt C die allgemeine Konstante, und man kann statt dieser Konstante C jeden Ziffernwerth, auch jede Funktion gesetzt sich denken, nur darf sie kein x enthalten (d. h. sie muß nach x konstant seyn.)

## §. 29.

Jede Funktion $y_x$ hat daher unendlich viele Integrale, die sich jedoch alle nur durch einen verschiedenen Werth der Konstante C von einander unterscheiden. — Hat die Konstante C irgend einen besondern Werth angenommen, so heißt das Integral ein besonderes; ist statt C noch nichts bestimmtes gesetzt worden, oder etwas, was selbst noch alle Formen und Werthe annehmen kann, so nennt man das Integral, weil es noch alle besonderen in sich schließt, das allgemeine.

Man erhält aber das allgemeine Integral allemal, wenn man irgend eines der besonderen Integrale hat, und dazu noch einen (nach x) konstanten und noch unbestimmten (allgemeinen) Ausdruck addirt; eben weil alle besonderen Integrale nur um einen, nach x konstanten Ausdruck, der jedesmal ein anderer seyn wird, von einander verschieden sind.

*) Ist $y_x$ eine ganze Funktion von x, so bricht die Reihe dieser allgemeinen Integralformel ab, und man erhält das Integral durch sie auch in endlicher Form.

## §. 30.

Kehrt man die Differenzialformeln (§. 9. Nr. Nr. 5. I. 2 u. §. 11. I.) um, so erhält man sogleich folgende Integralformeln:

1) $\int A \cdot \varphi_x \cdot dx = A \cdot \int \varphi_x \cdot dx$;

2) $\int (\varphi_x \pm \psi_x) \cdot dx = \int \varphi_x \cdot dx \pm \int \psi_x \cdot dx$;

3) $\int (\varphi_x \cdot \psi_x) \cdot dx = \varphi_x \cdot \int \psi_x \cdot dx - \int [\partial \varphi_x \cdot (\int \psi_x \cdot dx)] \cdot dx$, wo $\int \psi_x \cdot dx$ jedesmal ein und dasselbe besondere Integral von $\psi_x$ bedeutet;

4) $\int \varphi_x \cdot dx = \int (\varphi_z \cdot \partial z_x) \cdot dz$,

welcher letztere Satz sagt, daß man ein und dasselbe bekommt, ob man $\varphi_x$ nach x integrirt, oder ob man in $\varphi_x$ statt des Veränderlichen x eine beliebige Funktion von z setzt, dann aber die Funktion $\varphi_x$ mit $\partial z_x$ multiplizirt und das Produkt $\varphi_x \cdot \partial z_x$ nach z integrirt *).

Wendet man die (1.) an, so sagt man: beim Integriren (nach x) wird jeder (nach x) konstante Faktor herausgesetzt.

Wendet man die (2.) an, so sagt man: eine Reihe einzelner Glieder wird integrirt, wenn man jedes Glied

---

*) Vermöge dieser Formel (4.) kann man auch die Formel (3.) anders schreiben. Da nämlich $\varphi$ und $\psi$ als Funktionen von x vorausgesetzt sind, so sind auch $\psi$ und x Funktionen von $\varphi$ (und auch $\varphi$ und x Funktionen von $\psi$), und dann ist auch $\int \psi_x \cdot dx$ eine Funktion von x, und in so ferne auch eine Funktion von $\varphi$. Da es nun einerlei ist, ob man diese Funktion von $\varphi$ nach $\varphi$ integrirt, oder solche vorher mit $\partial \varphi_x$ multiplizirt und das Produkt dann nach x integrirt, so hat man also $\int (\partial \varphi_x \cdot \int \psi_x \cdot dx) \cdot dx = \int (\int \psi_x \cdot dx) \cdot d\varphi$ und die Formel (3.) schreibe sich so:

$$\int (\varphi_x \cdot \psi_x) \cdot dx = \varphi_x \cdot \int \psi_x \cdot dx - \int (\int \psi_x \cdot dx) \cdot d\varphi.$$

Und setzt man $\int \psi_x \cdot dx = \pi_x$, daß $\psi = \partial \pi_x$, also $\int (\varphi_x \cdot \psi_x) \cdot dx = \int \varphi_x \cdot \partial \pi_x \cdot dx = \int \varphi \cdot d\pi$ nach derselben (4.) ist, so nimmt dieselbe Formel (3.) noch diese andere Form an, nämlich $\int \varphi \cdot d\pi = \varphi \cdot \pi - \int \pi \cdot d\varphi$.

A) $df = \partial f_x \cdot dx + \partial f_y \cdot dy,$

oder $df = \frac{df}{dx} \cdot dx + \frac{df}{dy} \cdot dy;$

B) $d^2f = \partial^2 f_x \cdot dx^2 + 2\partial^{1,1} f_{x,y} \cdot dx \cdot dy + \partial^2 f_y \cdot dy^2 + \partial f_x \cdot d^2x + \partial f_y \cdot d^2y,$

oder $d^2f = \frac{d^2f}{dx^2} \cdot dx^2 + 2\frac{d^2f}{dx \cdot dy} \cdot dx \cdot dy + \frac{d^2f}{dy^2} \cdot dy^2 + \frac{df}{dx} \cdot d^2x + \frac{df}{dy} \cdot d^2y,$

u. ſ. w. ſ.

wo die Differenzialien von f zur Rechten bezüglich genau dieſelbe Bedeutung haben, wie in (I.), während jedoch die Zeichen $d^2f$, ꝛc. ꝛc. zur Linken offenbar etwas andres bedeuten, als dieſelben Zeichen $d^2f$, ꝛc. ꝛc. in den Gleichungen der (I.) zur Linken vorſtellen.

## §. 26.

Man begreift, wie man alle dieſe Betrachtungen auf Funktionen f von beliebig viel Veränderlichen ausdehnen kann, wie aber die Bedeutung ſolcher Zeichen df, $d^2f$, $d^3f$, ꝛc. ſehr ſchwankend iſt, wenn man nicht ſtatt dieſer Differenzialien lieber Differenzial-Quozienten ſchreibt, ſo daß man dann an den Nennern erſt genau erkennt (vermöge der ein- für allemal gemachten Annahme), in welchem Sinne die Zeichen df, $d^2f$, $d^3f$, ꝛc. im Zähler, zu nehmen ſind.

Es ſind aber allemal gleichbedeutend gefunden worden die Zeichen

| | | |
|---|---|---|
| $\partial f_x$ | und | $\frac{df}{dx}$, |
| $\partial^2 f_x$ | und | $\frac{d^2f}{dx^2}$, |
| $\partial^{1,1} f_{x,y}$ | und | $\frac{d^2f}{dx \cdot dy}$, |
| $\partial^3 f_x$ | und | $\frac{d^3f}{dx^3}$, |

$\partial^{2,1} f_{x,y}$ und $\dfrac{d^3 f}{dx^2 \cdot dy}$,

$\partial^{1,2} f_{x,y}$ und $\dfrac{d^3 f}{dx \cdot dy^2}$,

u. ſ. w. f.;

ſo daß wir in der Folge, ſelbſt da, wo wir unendlich-kleine Zuwachſe zu beſtimmen haben, doch lieber die links ſtehenden Zeichen gebrauchen, als die hier zur Rechten ſtehenden; auch die unendlich-kleinen Zuwachſe, wenn wir ſie brauchen ſollten, lieber jedesmal direkt, d. h. bloß durch Zuziehung des 1ſten Kapitels und des darin aufgeſtellten Taylor'ſchen Lehrſatzes für Funktionen eines und mehrerer Veränderlichen, ableiten wollen, als daß wir Paragraphen des gegenwärtigen Kapitels zu Hilfe nehmen.

Der Taylor'ſche Lehrſatz (§. 7. ⊙.) läßt ſich übrigens, in die hieſigen Zeichen ausgedrückt, nun auch ſo ſchreiben:

$$\text{I.}\quad f_{x+h} = f + \frac{df}{dx}\cdot h + \frac{d^2 f}{dx^2}\cdot\frac{h^2}{2!} + \frac{d^3 f}{dx^3}\cdot\frac{h^3}{3!} + \ldots$$

Der Taylor'ſche Lehrſatz für 2 Veränderliche (§. 10. ☾.) ſchreibt ſich dagegen nun auch ſo:

$$\begin{aligned}\text{II.}\quad f_{x+h,y+k} = f &+ \frac{df}{dx}\cdot h + \frac{d^2 f}{dx^2}\cdot\frac{h^2}{2!} + \frac{d^3 f}{dx^3}\cdot\frac{h^3}{3!} + \ldots \\ &+ \frac{df}{dy}\cdot k + 2\frac{d^2 f}{dx\cdot dy}\cdot\frac{hk}{2!} + 3\frac{d^3 f}{dx^2\cdot dy}\cdot\frac{h^2 k}{3!} + \ldots \\ &+ \frac{d^2 f}{dy^2}\cdot\frac{k^2}{2!} + 3\frac{d^3 f}{dx\cdot dy^2}\cdot\frac{h\cdot k^2}{3!} + \ldots \\ &+ \frac{d^3 f}{dy^3}\cdot\frac{k^3}{3!} + \ldots\end{aligned}$$

Desgleichen ſchreibt ſich (§. 10. ♂.) nun noch ſo:

$$\text{III.}\quad f_{x+h,y+k,z+l} = f + \left(\frac{df}{dx}\cdot h + \frac{df}{dy}\cdot k + \frac{df}{dz}\cdot l\right) + \left(\frac{d^2 f}{dx^2}\cdot\frac{h^2}{2!} + \ldots\right) + \ldots$$

u. ſ. w. f.

# Höhere Analysis.

## Drittes Kapitel.

### Integral-Rechnung. Quadraturen oder Integration entwickelt gegebener Funktionen.

### §. 27.

Jede Funktion $\psi_x$, deren Differenzial-Koeffizient nach x, einer gegebenen Funktion $y_x$ gleich wird, heißt ein **Integral** von $y_x$ nach x, und wird durch das Zeichen

$$\int y \cdot dx \quad \text{oder} \quad \int y_x \cdot dx$$

vorgestellt, wo das angehängte dx bloß andeuten soll, daß der Differenzial-Koeffizient von dieser Funktion, nach x genommen werden muß, wenn $y_x$ herauskommen soll *). Das Integral finden, nennt man **integriren**.

Ist demnach $\psi_x$ das gesuchte Integral von $y_x$ nach x, ist also

1) $\psi_x = \int y_x \cdot dx,$

so ist nothwendig

2) $\partial\psi_x = y_x$, oder $d\psi = y_x \cdot dx,$

*) Ist $\psi_x$ eine Funktion von x, und denkt man sich x um das unendlich-kleine dx wachsend, so wächst $\psi$ um etwas, das durch $d\psi$ bezeichnet werden mag; und man hat dann (nach §. 21.) $d\psi = \partial\psi_x \cdot dx$. Ist also $\partial\psi_x = y_x$, so ist $d\psi = y_x \cdot dx$. — Man kann daher sagen: das Integral $\int y_x \cdot dx$ bezeichne die Funktion $\psi_x$ von x, deren Differenzial $d\psi$ genau dem $y_x \cdot dx$ gleich ist. Daher gerade diese Bezeichnung.

Die Formeln (18. u. 19.) gelten für jedes c; aber wenn c negativ gedacht wird, so bekommt man solche Bögen zu Integralen, deren Sinus, Tangente, &c. imaginär sind, und es ist daher in diesem Falle für die unmittelbare Anwendung bequemer, diese imaginären Bögen nach den Formeln des (§. 13.) in Logarithmen zu verwandeln, welche dann öfter reelle Form annehmen. Geschieht dies, so erhält man, wenn $-q$ statt c gesetzt wird,

$$20)\quad \int \frac{1}{\sqrt{b+cx^2}}\cdot dx = \frac{1}{\sqrt{c}}\cdot log\left(x\sqrt{c}+\sqrt{b+cx^2}\right);$$

$$21)\quad \int \frac{1}{b-cx^2}\cdot dx = \frac{1}{2\sqrt{bc}}\, log\left(\frac{1+x\sqrt{c:b}}{1-x\sqrt{c:b}}\right).$$

Für $b=c=1$ geben diese noch

$$22)\quad \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot dx = log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right);$$

$$23)\quad \int \frac{1}{1-x^2}\cdot dx = \tfrac{1}{2}\, log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\ *).$$

---

$log\,x+C$, oder aus dem allgemeinen $log(-x)+c$ hervor, wenn man statt C oder statt c nach und nach andere und andere bestimmte Werthe setzt, z. B. $log(-1)$ oder $log\,a$ oder $log(-b)$, oder $log(-a)$ oder $log\,b$, oder dergl. m.

*) Die Formel (22.) hätte man durch Umkehrung der letztern Beispiele zu (§. 12.) erhalten können. Die Formel (23.) ergiebt sich auch noch, wenn man $\frac{1}{1-x^2}$ in $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-x}$ zerlegt, und dann jeden Theil nach der Formel (14.) integrirt. Die Formeln (20. u. 21.) ergeben sich aber noch, wenn man zuerst $\frac{a}{b}$ oder $\frac{c}{b}$ als konstanten Faktor heraussetzt, und dann, um $\int \frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{c}{b}x^2\right)}}\cdot dx$ oder $\int \frac{1}{1-\frac{c}{b}x^2}\cdot dx$ zu integriren, den Weg der Substitution (§. 30. Nr. 4.) wählt, indem man $\frac{c}{b}x^2=z^2$, also $x=z:\sqrt{\frac{c}{b}}$ setzt, so daß $dx=dz:\sqrt{\frac{c}{b}}$ wird, dadurch diese Integrale auf die (22. u. 23.) zurückgeführt werden.

Also ist die Reihe zur Rechten in (5.) genau das Integral von y nach x, wie man auch C nehmen mag, wenn es nur von x unabhängig (nach x konstant) gedacht ist.

Die Gleichung (5.) schreibt sich daher so:

$$(\odot)\cdots \int y_x \cdot dx = C + [y_x]_\alpha \cdot (x-\alpha) + [\partial y_x]_\alpha \cdot \frac{(x-\alpha)^2}{2!} + \cdots$$

und sie ist eine allgemeine Integral-Formel, d. h. sie giebt jedes Integral von jeder gegebenen Funktion $y_x$, nur meist in Form einer unendlichen Reihe *), d. h. häufig in unbequemer Form. Dabei heißt C die allgemeine Konstante, und man kann statt dieser Konstante C jeden Ziffernwerth, auch jede Funktion gesetzt sich denken, nur darf sie kein x enthalten (d. h. sie muß nach x konstant seyn.)

## §. 29.

Jede Funktion $y_x$ hat daher unendlich viele Integrale, die sich jedoch alle nur durch einen verschiedenen Werth der Konstante C von einander unterscheiden. — Hat die Konstante C irgend einen besondern Werth angenommen, so heißt das Integral ein besonderes; ist statt C noch nichts bestimmtes gesetzt worden, oder etwas, was selbst noch alle Formen und Werthe annehmen kann, so nennt man das Integral, weil es noch alle besonderen in sich schließt, das allgemeine.

Man erhält aber das allgemeine Integral allemal, wenn man irgend eines der besonderen Integrale hat, und dazu noch einen (nach x) konstanten und noch unbestimmten (allgemeinen) Ausdruck addirt; eben weil alle besonderen Integrale nur um einen, nach x konstanten Ausdruck, der jedesmal ein anderer seyn wird, von einander verschieden sind.

*) Ist $y_x$ eine ganze Funktion von x, so bricht die Reihe dieser allgemeinen Integralformel ab, und man erhält das Integral durch sie auch in endlicher Form.

## §. 30.

Kehrt man die Differenzialformeln (§. 9. Nr. 5. I. 2 u. §. 11. I.) um, so erhält man sogleich folgende Integralformeln:

1) $\int A \cdot \varphi_x \cdot dx = A \cdot \int \varphi_x \cdot dx$;

2) $\int (\varphi_x \pm \psi_x) \cdot dx = \int \varphi_x \cdot dx \pm \int \psi_x \cdot dx$;

3) $\int (\varphi_x \cdot \psi_x) \cdot dx = \varphi_x \cdot \int \psi_x \cdot dx - \int [\partial \varphi_x \cdot (\int \psi_x \cdot dx)] \cdot dx$, wo $\int \psi_x \cdot dx$ jedesmal ein und dasselbe besondere Integral von $\psi_x$ bedeutet;

4) $\int \varphi_x \cdot dx = \int (\varphi_z \cdot \partial x_z) \cdot dz$,

welcher letztere Satz sagt, daß man ein und dasselbe bekommt, ob man $\varphi_x$ nach x integrirt, oder ob man in $\varphi_x$ statt des Veränderlichen x eine beliebige Funktion von z setzt, dann aber die Funktion $\varphi_x$ mit $\partial x_z$ multiplizirt und das Produkt $\varphi_x \cdot \partial x_z$ nach z integrirt *).

Wendet man die (1.) an, so sagt man: beim Integriren (nach x) wird jeder (nach x) konstante Faktor herausgesetzt.

Wendet man die (2.) an, so sagt man: eine Reihe einzelner Glieder wird integrirt, wenn man jedes Glied

*) Vermöge dieser Formel (4.) kann man auch die Formel (3.) anders schreiben. Da nämlich $\varphi$ und $\psi$ als Funktionen von x vorausgesetzt sind, so sind auch $\psi$ und x Funktionen von $\varphi$ (und auch $\varphi$ und x Funktionen von $\psi$), und dann ist auch $\int \psi_x \cdot dx$ eine Funktion von x, und in so ferne auch eine Funktion von $\varphi$. Da es nun einerlei ist, ob man diese Funktion von $\varphi$ nach $\varphi$ integrirt, oder solche vorher mit $\partial \varphi_x$ multiplizirt und das Produkt dann nach x integrirt, so hat man also $\int (\partial \varphi_x \cdot \int \psi_x \cdot dx) \cdot dx = \int (\int \psi_x \cdot dx) \cdot d\varphi$ und die Formel (3.) schreibe sich so:

$$\int (\varphi_x \cdot \psi_x) \cdot dx = \varphi_x \cdot \int \psi_x \cdot dx - \int (\int \psi_x \cdot dx) \cdot d\varphi.$$

Und setzt man $\int \psi_x \cdot dx = \pi_x$, so daß $\psi = \partial \pi_x$, also $\int (\varphi_x \cdot \psi_x) \cdot dx = \int \varphi_x \cdot \partial \pi_x \cdot dx = \int \varphi \cdot d\pi$ nach derselben (4.) ist, so nimmt dieselbe Formel (3.) noch diese andere Form an, nämlich $\int \varphi \cdot d\pi = \varphi \cdot \pi - \int \pi \cdot d\varphi$.

für sich integrirt. — Eine Funktion wird daher integrirt, wenn man sie in lauter einzelne solche Glieder zerlegt, und dann diese einzelnen Glieder integrirt.

Die Anwendung der (3.) nennt man das theilweise Integriren.

Und wird die (4.) benützt, so sagt man: es werde durch Substitution integrirt.

Diese 4 Formeln und die Formel (⊙ des §. 28.) sind übrigens die einzigen allgemeinen Formeln, welche man in diesem Theil der Integralrechnung hat, so daß man, um zu integriren, diese allein versucht.

Die Richtigkeit dieser Integralformeln (1. — 3.) erkennt man aber leicht daran, daß man die Ausdrücke zur Rechten differenzirt (nach x); dann erhält man jedesmal die Funktion unter dem Integralzeichen ($\int$) zur Linken. Um die Formel (4.) zu erweisen, muß man links und rechts nach z differenziiren, links aber die Formel (§. 11. I.) anwenden, nämlich erst nach x differenziiren, und dann noch mit $\partial x$ multipliziren.

Anmerkung. Wird x als eine Funktion von z gedacht, so hat man auch, wenn dx und dz unendlich-kleine zusammengehörige Zuwachse sind, nach (§. 21.)

$$dx = dx_z \cdot dz.$$

Wenn man daher in einem auf die gewöhnliche Weise geschriebenen Integral nach x, z. B.

$$\int \psi \cdot dx,$$

das dx als Faktor sich denkt, und dafür seinen Werth $\partial x_z \cdot dz$ schreibt, so erhält man ohne weiteres

$$\int (\psi \cdot \partial x_z) \cdot dz,$$

also gerade dasjenige Integral, welches (nach 4.) dem ersten gleich ist. Diese Betrachtung kann aber als die praktische Regel dienen, nach welcher wir künftighin verfahren, wenn wir die so wichtige Integration durch Substitution in Anwendung bringen werden.

## §. 31.

Kehrt man die besonderen Differenzial-Formeln der (§. 8. u. §. 14.) um, so hat man sogleich

1) $\int A \cdot x^m \cdot dx = \frac{A}{m+1} \cdot x^{m+1}$; 2) $\int \frac{1}{x} \cdot dx = log\, x$;

3) $\int a^x \cdot dx = \frac{a^x}{log\, a}$; 4) $\int e^x \cdot dx = e^x$;

5) $\int sin\, x \cdot dx = -cos\, x$; 6) $\int cos\, x \cdot dx = sin\, x$;

7) $\int \frac{1}{cos\, x^2} \cdot dx = tg\, x$; 8) $\int \frac{1}{sin\, x^2} \cdot dx = -cotg\, x$;

9) $\int \frac{sin\, x}{cos\, x^2} \cdot dx = sec\, x$; 10) $\int \frac{cos\, x}{sin\, x^2} \cdot dx = -cosec\, x$;

11) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx = \frac{1}{sin} x$, auch $= -\frac{1}{cos} x$;

12) $\int \frac{1}{1+x^2} \cdot dx = \frac{1}{tg} x$, auch $= -\frac{1}{cotg} x$.

Mittelst dieser Integrale kann man wiederum viele andere ähnliche finden, z. B. $\int a^{px} \cdot dx$, $\int sin\, px \cdot dx$ u. s. w., indem man $px = z$, $x = \frac{1}{p} \cdot z$ setzt, so daß $dx = \frac{1}{p} \cdot dz$ wird, und nun durch Substitution, d. h. nach der Formel (§. 30. Nr. 4. und Anmerk.) integrirt. Dadurch erhält man noch:

13) $\int (px+q)^m \cdot dx = \frac{1}{p(m+1)} \cdot (px+q)^{m+1}$;

14) $\int \frac{1}{px+q} \cdot dx = \frac{1}{p} \cdot log\,(px+q)$;

15) $\int a^{px+q} \cdot dx = \frac{1}{p \cdot log\, a} \cdot a^{px+q}$;

16) $\int sin\,(px+q) \cdot dx = -\frac{1}{p} \cdot cos\,(px+q)$;

17) $\int cos\,(px+q) \cdot dx = \frac{1}{p} \cdot sin\,(px+q)$ *).

*) Ist überhaupt irgend einmal $\int f_x \cdot dx = \psi_x$ gefunden, so ist dann allemal

$$\int f_{px+q} \cdot dx = \frac{1}{p} \cdot \psi_{px+q};$$

und noch ist dann auch

18) $\int \frac{1}{\sqrt{b-cx^2}} \cdot dx = \frac{1}{\sqrt{b}} \cdot \int \frac{1}{\sqrt{1-\frac{c}{b}x^2}} \cdot dx$

$= \frac{1}{\sqrt{c}} \cdot \frac{1}{sin} \; x\sqrt{\frac{c}{b}}$

nach (§. 13.) $= \frac{1}{\sqrt{c}} \cdot \frac{1}{tg} \; \frac{x \cdot \sqrt{c}}{\sqrt{b-cx^2}}$, auch $= -\frac{1}{\sqrt{c}} \cdot \frac{1}{cos} \; x\sqrt{\frac{c}{b}}$;

19) $\int \frac{1}{b+cx^2} \cdot dx = \frac{1}{b} \cdot \int \frac{1}{1+\frac{c}{b}x^2} \cdot dx$

$= \frac{1}{\sqrt{bc}} \cdot \frac{1}{tg} \; x\sqrt{\frac{c}{b}}$

nach (§. 13) $= \frac{1}{\sqrt{bc}} \cdot \frac{1}{sin} \; \frac{x \cdot \sqrt{c}}{\sqrt{b+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{bc}} \cdot \frac{1}{cos} \; \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b+cx^2}}$

auch $= -\frac{1}{\sqrt{bc}} \cdot \frac{1}{cotg} \; x\sqrt{\frac{c}{b}}$ *).

Die

$$\int x \cdot f_{px^2+q} = \frac{1}{2p} \cdot \psi_{px^2+q},$$

wie sich findet, wenn man $px^2+q = z$ setzt, so daß $2px \cdot dx = dz$ wird. — Aber eben so ist dann auch noch

$$\int x^{n-1} \cdot f_{px^n+q} \cdot dx = \frac{1}{np} \cdot \psi_{px^n+q}.$$

*) Man muß nur nicht übersehen, daß wenn bei einer Integration zwei und mehr Resultate angegeben sind, diese nicht nothwendig einander gleich zu seyn brauchen, weil jedes ein anderes besonderes Integral seyn kann. Wenn aber die beiden Resultate, welche bei einer Integration angegeben sind, oder auf verschiedenen Wegen gefunden werden, auch nicht einander gleich sind, so müssen sie doch so seyn, daß wenn man sie von einander subtrahirt, die Differenz derselben (nach x) konstant wird (nach §. 29.). — So findet man z. B. für $\int \frac{1}{x} \cdot dx$ die Resultate $log\,x$, $log(-x)$, $log(-3x)$, $log(\frac{1}{3}x)$, $log(ax)$, $log(-bx)$ u. dgl. m., von denen nicht zweie einander gleich sind, von denen aber jedes die Eigenschaft hat, daß wenn man solches nach x differenziirt, genau wieder $\frac{1}{x}$ kommt. Und alle diese besonderen Integrale von $\frac{1}{x}$ nach x, gehen aus dem allgemeinen

Die Formeln (18. u. 19.) gelten für jedes c; aber wenn c negativ gedacht wird, so bekommt man solche Bögen zu Integralen, deren Sinus, Tangente, &c. imaginär sind, und es ist daher in diesem Falle für die unmittelbare Anwendung bequemer, diese imaginären Bögen nach den Formeln des (§. 13.) in Logarithmen zu verwandeln, welche dann öfter reelle Form annehmen. Geschieht dies, so erhält man, wenn $+q$ statt $c$ gesetzt wird,

20) $\int \frac{1}{\sqrt{b+cx^2}} \cdot dx = \frac{1}{\sqrt{c}} \cdot log(x \cdot \sqrt{c} + \sqrt{b+cx^2})$;

21) $\int \frac{1}{b-cx^2} \cdot dx = \frac{1}{2\sqrt{bc}} log\left(\frac{1+x\cdot\sqrt{c:b}}{1-x\cdot\sqrt{c:b}}\right)$.

Für $b=c=1$ geben diese noch

22) $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot dx = log(x+\sqrt{1+x^2})$;

23) $\int \frac{1}{1-x^2} \cdot dx = \frac{1}{2} log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ *).

---

$log x + C$, oder aus dem allgemeinen $log(-x) + c$ hervor, wenn man statt C oder statt c nach und nach andere und andere bestimmte Werthe setzt, z. B. $log(-1)$ oder $log a$ oder $log(-b)$, oder $log(-a)$ oder $log b$, oder dergl. m.

*) Die Formel (22.) hätte man durch Umkehrung der letztern Beispiele zu (§. 12.) erhalten können. Die Formel (23.) ergiebt sich auch noch, wenn man $\frac{1}{1-x^2}$ in $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-x}$ zerlegt, und dann jeden Theil nach der Formel (14.) integrirt. Die Formeln (20. u. 21.) ergeben sich aber noch, wenn man zuerst $\frac{a}{\sqrt{b}}$ oder $\frac{a}{b}$ als konstanten Faktor heraussetzt, und dann, um $\int \frac{1}{\sqrt{1+\frac{c}{b}x^2}} \cdot dx$ oder $\int \frac{1}{1-\frac{c}{b}x^2} \cdot dx$ zu integriren, den Weg der Substitution (§. 30. Nr. 4.) wählt, indem man $\frac{c}{b}x^2 = z^2$, also $x = z\cdot\sqrt{\frac{b}{c}}$ setzt, so daß $dx = dz\cdot\sqrt{\frac{b}{c}}$ wird, dadurch diese Integrale auf die (22. und 23.) zurückgeführt werden.

## §. 32.

Die vorstehenden Integrale ergeben sich unmittelbar aus vorher entwickelten Differenzial-Formeln. Im Allgemeinen fügen wir für die Auffindung solcher Integrale noch Folgendes hinzu:

I. Jede algebraische rationale ganze Funktion von x, und überhaupt jede algebraische Summe von der Form $A \cdot x^{\alpha} + B \cdot x^{\beta} + C \cdot x^{\gamma} + \cdots$, kann ohne weiteres nach x integrirt werden, weil sich nach (§. 31. Nr. I.) jedes Glied derselben integriren läßt, und nach (§. 30. Nr. 2.) die Integration selbst sich bloß darauf zurückzieht.

II. Jede algebraische rationale gebrochene *) Funktion von x, ist entweder eine ächt gebrochene oder eine unächt gebrochene. Im letztern Fall kann man (durch Division) die ganze Funktion, welche darin steckt, herausholen, und die gebrochene Funktion zerlegt sich dann in eine ganze Funktion von x, und eine ächt gebrochene. — Jede ächt gebrochene Funktion zerlegt sich in eine Summe von lauter Partialbrüchen **) von der Form $\frac{a}{(px+q)^n}$ oder $\frac{a}{px+q}$; und letztere lassen sich alle integriren, weil

$$\int \frac{a}{(px+q)^n} \cdot dx = -\frac{a}{(n-1) \cdot p \cdot (px+q)^{n-1}} \text{ und}$$

$$\int \frac{a}{px+q} \cdot dx = \frac{a}{p} \cdot log\,(px+q)$$

ist, nach (§. 31. Nr. Nr. 13. 14.). — Danach integrirt man nun jede gebrochene rationale algebraische Funktion von x.

*) Die Form

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \cdots + p \cdot x^n$$

heißt eine algebraische rationale ganze Funktion von x vom $n^{ten}$ Grade. Werden zwei solche durch einander dividirt, so hat man in allen den Fällen, wo der Quozient nicht selbst wieder eine solche ganze Funktion wird, die gebrochene algebraische rationale Funktion von x, welche ächt gebrochen heißt, wenn im Zähler keine so hohe Potenz von x vorkommt, als im Nenner.

**) Wegen der Methoden, eine gebrochene Funktion in ihre Partialbrüche zu zerlegen, sehe man „System der Mathem." (Th. IV. S. 41 — 67.); und das Nöthigste davon in dem Anhange zu diesem Kapitel.

Die Formeln (18. u. 19.) gelten für jedes c; aber wenn c negativ gedacht wird, so bekommt man solche Bögen zu Integralen, deren Sinus, Tangente, &c. imaginär sind, und es ist daher in diesem Falle für die unmittelbare Anwendung bequemer, diese imaginären Bögen nach den Formeln des (§. 13.) in Logarithmen zu verwandeln, welche dann öfter reelle Form annehmen. Geschieht dies, so erhält man, wenn $-q$ statt c gesetzt wird,

20) $\int \frac{1}{\sqrt{b+cx^2}} \cdot dx = \frac{1}{\sqrt{c}} \cdot log(x\sqrt{c} + \sqrt{b+cx^2})$;

21) $\int \frac{1}{b-cx^2} \cdot dx = \frac{1}{2\sqrt{bc}} log\left(\frac{1+x\sqrt{c:b}}{1-x\sqrt{c:b}}\right)$.

Für $b = c = 1$ geben diese noch

22) $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot dx = log(x + \sqrt{1+x^2})$;

23) $\int \frac{1}{1-x^2} \cdot dx = \frac{1}{2} log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ *).

---

$log\,x + C$, oder aus dem allgemeinen $log(-x) + c$ hervor, wenn man statt C oder statt c nach und nach andere und andere bestimmte Werthe setzt, z. B. $log(-1)$ oder $log\,a$ oder $log(-b)$, oder $log(-a)$ oder $log\,b$, oder dergl. m.

*) Die Formel (22.) hätte man durch Umkehrung der letzten Beispiele zu (§. 12.) erhalten können. Die Formel (23.) ergiebt sich auch noch, wenn man $\frac{1}{1-x^2}$ in $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-x}$ zerlegt, und dann jeden Theil nach der Formel (14.) integrirt. Die Formeln (20. u. 21.) ergeben sich aber noch, wenn man zuerst $\frac{a}{\sqrt{b}}$ oder $\frac{a}{b}$ als konstanten Faktor heraussetzt, und dann, um $\int \frac{1}{\sqrt{(1+\frac{c}{b}x^2)}} \cdot dx$ oder $\int \frac{1}{1-\frac{c}{b}x^2} \cdot dx$ zu integriren, den Weg der Substitution (§. 30. Nr. 4.) wählt, indem man $\frac{c}{b}x^2 = z^2$, also $x = z\sqrt{\frac{b}{c}}$ setzt, so daß $dx = dz\sqrt{\frac{b}{c}}$ wird, dadurch diese Integrale auf die (22. u. 23.) zurückgeführt werden.

man nun, der bequemern Anwendung wegen, nach (§. 13.) in einen Bogen verwandeln; und man erhält dann

$$\int \frac{x+2}{x^2+x+1}\cdot dx = \tfrac{1}{2}log(x^2+x+1) + \sqrt{3}\cdot\frac{1}{tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}.$$

4) So zerlegt sich die Funktion $\frac{1}{x^3-1}$ in die Brüche $\frac{\frac{1}{3}}{x-1} - \frac{\frac{1}{3}(x+2)}{x^2+x+1}$.

Man findet daher mit Zuziehung des so eben gefundenen Resultats im Beispiel (3.)

$$\int \frac{1}{x^3-1}\cdot dx = \tfrac{1}{6}log\left(\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}.$$

Auf diesem Wege, nämlich durch Zerlegung der gebrochenen Funktionen in mehrere Theile, findet man auch noch folgende allgemeinere Formeln:

1) $$\int \frac{1}{a+bx+cx^2}\cdot dx = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\cdot\frac{1}{tg}\frac{2cx+b}{\sqrt{4ac-b^2}}$$

auch $$= \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\cdot log\frac{2cx+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2cx+b+\sqrt{b^2-4ac}}$$ *);

*) Man erleichtert sich diese Rechnungen, wenn man erstlich $\frac{1}{c}$ als Faktor herausſetzt, so daß man $\frac{1}{a+bx+cx^2} = \frac{1}{c}\cdot\frac{1}{\frac{a}{c}+\frac{b}{c}x+x^2}$ erhält, dann aber $x+\frac{b}{2c} = z$ ſetzt, wodurch $\frac{1}{a+bx+cx^2} = \frac{1}{c}\cdot\frac{1}{z^2-\frac{b^2-4ac}{4c^2}}$ wird, und dann (§. 30. Nr. 4.) in Anwendung bringt. Der Nenner $z^2-\frac{b^2-4ac}{4c^2}$ zerlegt sich nämlich leicht in seine beiden Faktoren, so daß man die Partial-Brüche leichter bekommt.

Diese Erleichterung, wodurch der Ausdruck $a+bx+cx^2$ auf einen andern von der Form $z^2 \pm \alpha^2$ zurückgebracht wird, findet auch bei allen folgenden Nummern statt.

Ist aber $\frac{4ac-b^2}{4c^2}$ positiv, und die Quadrat-Wurzel daraus $= \alpha$, so ist die Zerlegung der Partial-Brüche nicht einmal bequem, sondern man hat dann nach (§. 31. Nr. 19.) sogleich

$$\int \frac{1}{z^2+\alpha^2}\cdot dz = \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{z}{tg\,\alpha}.$$

Dadurch erhält man insbesondere die obige erstere Form des Integrals (1) unmittelbar.

2) $\int \frac{p+qx}{a+bx+cx^2} \cdot dx = \frac{q}{2c} \cdot log(a+bx+cx^2) + \frac{2cp-bq}{2c} \cdot \int \frac{1}{a+bx+cx^2} \cdot dx,$

in so fern $\partial log(a+bx+cx^2) = 2c \cdot \frac{\frac{b}{2c}+x}{a+bx+cx^2}$ ist.

Zerlegt man $\frac{x^m}{a+bx+cx^2}$ dadurch, daß man mit dem Nenner in den Zähler dividirt, in

$$\frac{1}{c} \cdot x^{m-2} - \frac{\frac{a}{c} \cdot x^{m-2} + \frac{b}{c} \cdot x^{m-1}}{a+bx+cx^2},$$

so hat man noch die Reduktions-Formel

3) $\int \frac{x^m}{a+bx+cx^2} \cdot dx = \frac{1}{c} \cdot \frac{x^{m-1}}{m-1} - \frac{a}{c} \cdot \int \frac{x^{m-2}}{a+bx+cx^2} \cdot dx - \frac{b}{c} \cdot \int \frac{x^{m-1}}{a+bx+cx^2} \cdot dx;$

wonach die Integration der Funktionen

$$\frac{x^2}{a+bx+cx^2}, \quad \frac{x^3}{a+bx+cx^2}, \quad \frac{x^4}{a+bx+cx^2}, \text{ ꝛc. ꝛc.}$$

also auch die Integration von

$$\frac{p+qx+rx^2+sx^3+\cdots}{a+bx+cx^2}$$

auf die Integrale der Formeln (1. und 2. für $p=0$, $q=1$) zurückgeführt werden.

Es gehört aber auch noch hierher die Reduktions-Formel

4) $\int \frac{p+qx}{(a+bx+cx^2)^m} \cdot dx$

$$= \frac{1}{(m-1)(b^2-4ac)} \cdot \frac{(2aq-bp)+(bq-2cp) \cdot x}{(a+bx+cx^2)^{m-1}} + \frac{2m-3}{m-1} \cdot \frac{bq-2cp}{b^2-4ac} \cdot \int \frac{1}{(a+bx+cx^2)^{m-1}} \cdot dx,$$

welche man dadurch erhält, daß man sie der Form nach mit unbestimmten Koeffizienten annimmt, dann differenzirt, und aus

man nun, der bequemern Anwendung wegen, nach (§. 13.) in einen Bogen verwandeln; und man erhält dann

$$\int \frac{x+2}{x^3+x+1} \cdot dx = \tfrac{1}{2} log(x^2+x+1) + \sqrt{3} \cdot \frac{1}{tg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}.$$

4) So zerlegt sich die Funktion $\frac{1}{x^3-1}$ in die Brüche $\frac{\frac{1}{3}}{x-1} - \frac{\frac{1}{3}(x+2)}{x^2+x+1}$.

Man findet daher mit Zuziehung des so eben gefundenen Resultats im Beispiel (3.)

$$\int \frac{1}{x^3-1} \cdot dx = \tfrac{1}{6} log\left(\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{tg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}.$$

Auf diesem Wege, nämlich durch Zerlegung der gebrochenen Funktionen in mehrere Theile, findet man auch noch folgende allgemeinere Formeln:

$$1) \int \frac{1}{a+bx+cx^2} \cdot dx = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}} \cdot \frac{1}{tg} \frac{2cx+b}{\sqrt{4ac-b^2}}$$

$$\text{auch} = \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}} \cdot log \frac{2cx+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2cx+b+\sqrt{b^2-4ac}} *);$$

(*) Man erleichtert sich diese Rechnungen, wenn man erstlich $\frac{1}{c}$ als Faktor herausſetzt, so daß man $\frac{1}{a+bx+cx^2} = \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{\frac{a}{c}+\frac{b}{c}x+x^2}$ erhält, dann aber $x + \frac{b}{2c} = z$ setzt, wodurch $\frac{1}{a+bx+cx^2} = \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{z^2 - \frac{b^2-4ac}{4c^2}}$ wird, und dann (§. 30. Nr. 4.) in Anwendung bringt. Der Nenner $z^2 - \frac{b^2-4ac}{4c^2}$ zerlegt sich nämlich leicht in seine beiden Faktoren, so daß man die Partial-Brüche leichter bekommt.

Diese Erleichterung, wodurch der Ausdruck $a+bx+cx^2$ auf einen andern von der Form $z^2 \pm \alpha^2$ zurückgebracht wird, findet auch bei allen folgenden Nummern statt.

Ist aber $\frac{4ac-b^2}{4c^2}$ positiv, und die Quadrat-Wurzel daraus $= \alpha$, so ist die Zerlegung der Partial-Brüche nicht einmal bequem, sondern man hat dann nach (§. 31. Nr. 19.) sogleich

$$\int \frac{1}{z^2+\alpha^2} \cdot dz = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{tg} \frac{z}{\alpha}.$$

Dadurch erhält man insbesondere die obige erstere Form des Integrals unmittelbar.

$$2)\ \int \frac{p+qx}{a+bx+cx^2}\cdot dx = \frac{q}{2c}\cdot log(a+bx+cx^2) + \frac{2cp-bq}{2c}\cdot\int\frac{1}{a+bx+cx^2}\cdot dx,$$

in so fern $\partial log(a+bx+cx^2) = 2c\cdot\frac{\frac{b}{2c}+x}{a+bx+cx^2}$ ist.

Zerlegt man $\frac{x^m}{a+bx+cx^2}$ dadurch, daß man mit dem Nenner in den Zähler dividirt, in

$$\frac{1}{c}\cdot x^{m-2} - \frac{\frac{a}{c}\cdot x^{m-2} + \frac{b}{c}\cdot x^{m-1}}{a+bx+cx^2},$$

so hat man noch die Reduktions-Formel

$$3)\ \int\frac{x^m}{a+bx+cx^2}\cdot dx = \frac{1}{c}\cdot\frac{x^{m-1}}{m-1} - \frac{a}{c}\cdot\int\frac{x^{m-2}}{a+bx+cx^2}\cdot dx - \frac{b}{c}\cdot\int\frac{x^{m-1}}{a+bx+cx^2}\cdot dx,$$

wonach die Integration der Funktionen

$$\frac{x^2}{a+bx+cx^2},\ \frac{x^3}{a+bx+cx^2},\ \frac{x^4}{a+bx+cx^2},\ \text{ꝛc. ꝛc.}$$

also auch die Integration von

$$\frac{p+qx+rx^2+sx^3+\cdots}{a+bx+cx^2}$$

auf die Integrale der Formeln (1. und 2. für $p=0$, $q=1$) zurückgeführt werden.

Es gehört aber auch noch hierher die Reduktions-Formel

$$4)\ \int\frac{p+qx}{(a+bx+cx^2)^m}\cdot dx = \frac{1}{(m-1)(b^2-4ac)}\cdot\frac{(2aq-bp)+(bq-2cp)\cdot x}{(a+bx+cx^2)^{m-1}} + \frac{2m-3}{m-1}\cdot\frac{bq-2cp}{b^2-4ac}\cdot\int\frac{1}{(a+bx+cx^2)^{m-1}}\cdot dx,$$

welche man dadurch erhält, daß man sie der Form nach mit unbestimmten Koeffizienten annimmt, dann differenziirt, und aus

der Vergleichung der Resultate die unbestimmten Koeffizienten bestimmt, wobei auch immer die Note zur (I.) beachtet werden kann.

Durch wiederholte Anwendung einer solchen Reduktions-Formel führt man aber das zusammengesetztere Integral auf ein einfacheres zurück, so daß letzteres dann zuletzt noch allein gefunden zu werden braucht oder schon gefunden ist.

III. Sind die gegebenen und zu integrirenden Funktionen irrational, so sucht man das Geschäft durch Einführung eines neuen Veränderlichen z auf die Integration einer rationalen (ganzen oder gebrochenen) Funktion zurückzuführen.

A. Sind z. B. zu integriren die Funktionen $\frac{1}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$, $\sqrt{a+bx+cx^2}$, $\frac{p+qx+\cdots+(m+nx+\cdots)\cdot\sqrt{a+bx+cx^2}}{p'+q'x+\cdots+(m'+n'x+\cdots)\cdot\sqrt{a+bx+cx^2}}$ u. dgl. m., so kann $\sqrt{a+bx+cx^2}$ entweder $= x\cdot\sqrt{c}+z$, oder $= \sqrt{a}+x\cdot z$, oder auch, im Falle $\alpha$ ein Werth von x ist, welcher $a+bx+cx^2 = 0$ macht, so daß $a+bx+cx^2 = c(x-\alpha)(x-\beta)$ ist, $\sqrt{a+bx+cx^2} = (x-\alpha)\cdot z$ setzen (so daß z in jeder dieser drei Annahmen eine andere Bedeutung hat), dann jedesmal aus der angenommenen Gleichung x in z und dx in dz ausdrücken und zuletzt (§. 30. Nr. 4., s. Anmerk. zu §. 30.) anwenden. Jedesmal aber wird man dann eine Funktion von z nach z zu integriren haben, welche rational ist, welche daher in (I. u. II.) bereits betrachtet und behandelt worden ist *).

Auf diesem Wege findet man die Formel:

---

*) Aber auch hier erleichtert man sich diese Arbeiten um ein Bedeutendes, wenn man (nach der vorhergehenden Note) zuerst $a+bx+cx^2$ auf die Form $u^2+\alpha^2$ oder auf die Form $u^2-\alpha^2$ bringt, und dann entweder $\sqrt{u^2-\alpha^2} = u+z$, oder $\sqrt{u^2+\alpha^2} = \alpha+u\cdot z$, oder $\sqrt{u^2-\alpha^2} = (u-\alpha)\cdot z$ setzt.

5) $\int \frac{1}{\sqrt{a+bx+cx^2}} \cdot dx$

$$= \frac{1}{\sqrt{c}} \cdot log\left(2cx + b + 2\sqrt{c} \cdot \sqrt{a+bx+cx^2}\right),$$

$$\text{auch} = \frac{1}{\sqrt{-c}} \cdot \frac{1}{sin} \frac{2cx+b}{\sqrt{b^2-4ac}}.$$

Statt aber auf diesem Wege auch die nachstehenden Beispiele zu integriren, was zwar thunlich ist, aber ungemein langweilige Rechnungen verursachen würde, führt man lieber zusammengesetztere Fälle auf das Integral (5.) zurück, wie sogleich gezeigt werden soll.

Differenzirt man nämlich $\sqrt{a+bx+cx^2}$, so erhält man

$$\partial\left(\sqrt{a+bx+cx^2}\right)_x = \frac{\frac{1}{2}b}{\sqrt{a+bx+cx^2}} + \frac{cx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}.$$

Nimmt man hiervon links und rechts die Integrale, so giebt dies die Formel

6) $$\int \frac{x}{\sqrt{a+bx+cx^2}} \cdot dx = \frac{1}{c} \cdot \sqrt{a+bx+cx^2} - \frac{b}{2c} \cdot \int \frac{1}{\sqrt{a+bx+cx^2}} \cdot dx.$$

Differenzirt man aber $x \cdot \sqrt{a+bx+cx^2}$, so ergiebt sich

$$\partial\left(x \cdot \sqrt{a+bx+cx^2}\right)_x = \frac{a+\frac{3}{2}bx+2cx^2}{\sqrt{a+bx+cx^2}}.$$

Nimmt man hiervon wieder links und rechts die Integrale, indem man den Bruch rechts als die Summe dreier Brüche schreibt, auch statt $\int \frac{x}{\sqrt{a+bx+cx^2}} \cdot dx$ seinen Werth aus (6.) substituirt

7) $$\int \frac{x^2}{\sqrt{a+bx+cx^2}} \cdot dx = \frac{2cx-3b}{4c^2} \cdot \sqrt{a+bx+cx^2} + \left(\frac{3b^2}{8c^2} - \frac{a}{2c}\right) \cdot \int \frac{1}{\sqrt{a+bx+cx^2}} \cdot dx.$$

Wollte man $x^{m-1} \cdot \sqrt{a+bx+cx^2}$ differenziren, und dann wieder die Integrale links und rechts nehmen, so würde man die Formel erhalten:

$$8) \int \frac{x^m}{\sqrt{a+bx+cx^2}} \cdot dx = \frac{1}{mc} \cdot x^{m-1} \cdot \sqrt{a+bx+cx^2} - \frac{(m-\frac{1}{2})b}{mc} \cdot \int \frac{x^{m-1}}{\sqrt{a+bx+cx^2}} \cdot dx - \frac{(m-1)a}{mc} \cdot \int \frac{x^{m-2}}{\sqrt{a+bx+cx^2}} \cdot dx$$

wodurch die Integration von $\frac{p+qx+rx^2+sx^3+\ldots}{\sqrt{a+bx+cx^2}} \cdot dx$ sich auf die von $\frac{1}{\sqrt{a+bx+cx^2}} \cdot dx$ zurückführt *).

Ferner findet man noch

$$9) \int \frac{1}{x \cdot \sqrt{a+bx+cx^2}} \cdot dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot log \frac{2a+bx-2\sqrt{a} \cdot \sqrt{a+bx+cx^2}}{x}$$

$$\text{auch} = \frac{1}{\sqrt{-a}} \cdot \frac{1}{tg\, 2\sqrt{-a} \cdot \sqrt{a+bx+cx^2}}.$$

Man führt aber dieses Beispiel dadurch sehr leicht auf die (5.) zurück, daß man $\frac{1}{x} = z$ setzt, so daß $dx = -\frac{dz}{z^2}$ wird. Durch dasselbe Verfahren kann man daher auch die Integration

*) Weil $\sqrt{a+bx+cx^2}$ auch so $\frac{a+bx+cx^2}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$ geschrieben werden kann, so ist auch auf diesem Wege die Integration von $\sqrt{a+bx+cx^2} \cdot dx$, $x \cdot \sqrt{a+bx+cx^2} \cdot dx$, $x^2 \cdot \sqrt{a+bx+cx^2} \cdot dx$, ꝛc. ꝛc. auf das Integral (5.) zurückgeführt.

Hierher gehört als specieller Fall, die Integration unter (A.), in so fern $a + bx + cx^2$ allemal in zwei Faktoren $\alpha x + \beta$ und $\gamma x + \delta$ zerlegt werden kann, so daß man hat

$$\sqrt{a+bx+cx^2} = \sqrt{(\alpha x+\beta)(\gamma x+\delta)} = (\alpha x+\beta)\cdot\sqrt{\left(\frac{\gamma x+\delta}{\alpha x+\beta}\right)}$$
$$= (\gamma x+\delta)\cdot\sqrt{\left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)}.$$

D. Enthält aber die zu integrirende Funktion von x zwei solche Quadratwurzeln, nämlich

$$\sqrt{a+bx+cx^2} \text{ und } \sqrt{p+qx+rx^2},$$

so ist sie kaum und in seltenen Fällen nur, rational zu machen (d. h. das Integral dieser Funktion wird dann nur höchst selten auf die Integration einer rationalen Funktion von z zurückgeführt werden können). — Die beiden Funktionen, nämlich

$$\sqrt{a+bx+cx^2}\cdot\sqrt{p+qx+rx^2} = \sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4}$$

und

$$\frac{\sqrt{a+bx+cx^2}}{\sqrt{p+qx+rx^2}} = \frac{a+bx+cx^2}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4}}$$

hängen offenbar von der Integration einer und derselben

1.1) $$\int \frac{f_x}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4}}\cdot dx$$

ab, wo $f_x$ eine gegebene algebraische rationale (ganze oder gebrochene) Funktion von x vorstellt. — Mit diesem Integral hat man sich vielfältig beschäftigt, weil man sowohl bei Bestimmung der elliptischen Bögen, als auch an mehreren Stellen der Mechanik darauf zurückkommt. Deshalb mögen hier noch einige Worte darüber stehen.

Zuerst hat man nämlich $x = \frac{p+q\cdot y}{1+y}$ gesetzt, und so das Integral (1.1) nach (§. 30. Nr. 4.) und durch gehörige Bestimmung von p und q auf das Integral von

---

so würde man $\frac{a+bx}{p+qx} = z^m$ setzen, und man würde dann (nach §. 30. Nr. 4.) allemal sogleich eine rationale Funktion von z zu integriren haben.

$$18)\ \int \frac{1}{\sqrt{b-cx^2}}\cdot dx = \frac{1}{\sqrt{b}}\cdot\int \frac{1}{\sqrt{1-\frac{c}{b}x^2}}\cdot dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{c}}\cdot\frac{1}{sin}\ x\sqrt{\frac{c}{b}}$$

$$\text{nach (§. 13.)} = \frac{1}{\sqrt{c}}\cdot\frac{1}{tg}\ \frac{x\cdot\sqrt{c}}{\sqrt{b-cx^2}},\ \text{auch} = -\frac{1}{\sqrt{c}}\cdot\frac{1}{cos}\ x\sqrt{\frac{c}{b}};$$

$$19)\ \int \frac{1}{b+cx^2}\cdot dx = \frac{1}{b}\cdot\int \frac{1}{1+\frac{c}{b}x^2}\cdot dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{bc}}\cdot\frac{1}{tg}\ x\sqrt{\frac{c}{b}}$$

$$\text{nach (§. 13)} = \frac{1}{\sqrt{bc}}\cdot\frac{1}{sin}\ \frac{x\cdot\sqrt{c}}{\sqrt{b+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{bc}}\cdot\frac{1}{cos}\ \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b+cx^2}}$$

$$\text{auch} = -\frac{1}{\sqrt{bc}}\cdot\frac{1}{cotg}\ x\sqrt{\frac{c}{b}}\ *).$$

Die

$$\int x\cdot f_{px^2+q} = \frac{1}{2p}\cdot\psi_{px^2+q},$$

wie sich findet, wenn man $px^2+q = z$ setzt, so daß $2px\cdot dx = dz$ wird. — Aber eben so ist dann auch noch

$$\int x^{n-1}\cdot f_{px^n+q}\cdot dx = \frac{1}{np}\cdot\psi_{px^n+q}.$$

*) Man muß nur nicht übersehen, daß wenn bei einer Integration zwei und mehr Resultate angegeben sind, diese nicht nothwendig einander gleich zu seyn brauchen, weil jedes ein anderes besonderes Integral seyn kann. Wenn aber die beiden Resultate, welche bei einer Integration angegeben sind, oder auf verschiedenen Wegen gefunden werden, auch nicht einander gleich sind, so müssen sie doch so seyn, daß wenn man sie von einander subtrahirt, die Differenz derselben (nach x) konstant wird (nach §. 29.). — So findet man z. B. für $\int\frac{1}{x}\cdot dx$ die Resultate $log\,x$, $log(-x)$, $log(-3x)$, $log(\frac{1}{3}x)$, $log(ax)$, $log(-bx)$ u. dgl. m., von denen nicht zweie einander gleich sind, von denen aber jedes die Eigenschaft hat, daß wenn man solches nach x differenziirt, genau wieder $\frac{1}{x}$ kommt. Und alle diese besonderen Integrale von $\frac{1}{x}$ nach x, gehen aus dem allgemeinen

Die Formeln (18. u. 19.) gelten für jedes c; aber wenn c negativ gedacht wird, so bekommt man solche Bögen zu Integralen, deren Sinus, Tangente, &c. imaginär sind, und es ist daher in diesem Falle für die unmittelbare Anwendung bequemer, diese imaginären Bögen nach den Formeln des (§. 13.) in Logarithmen zu verwandeln, welche dann öfter reelle Form annehmen. Geschieht dies, so erhält man, wenn $-q$ statt $c$ gesetzt wird,

20) $$\int \frac{1}{\sqrt{b+cx^2}} \cdot dx = \frac{1}{\sqrt{c}} \cdot log\left(x \cdot \sqrt{c} + \sqrt{b+cx^2}\right);$$

21) $$\int \frac{1}{b-cx^2} \cdot dx = \frac{1}{2\sqrt{bc}} log\left(\frac{1+x\cdot\sqrt{c:b}}{1-x\cdot\sqrt{c:b}}\right).$$

Für $b = c = 1$ geben diese noch

22) $$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot dx = log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right);$$

23) $$\int \frac{1}{1-x^2} \cdot dx = \tfrac{1}{2} log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\ *).$$

---

$log\,x + C$, oder aus dem allgemeinen $log(-x) + c$ hervor, wenn man statt C oder statt c nach und nach andere und andere bestimmte Werthe setzt, z. B. $log(-1)$ oder $log\,a$ oder $log(-b)$, oder $log(-a)$ oder $log\,b$, oder dergl. m.

*) Die Formel (22.) hätte man durch Umkehrung der letztern Beispiele zu (§. 12.) erhalten können. Die Formel (23.) ergiebt sich auch noch, wenn man $\frac{1}{1-x^2}$ in $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-x}$ zerlegt, und dann jeden Theil nach der Formel (14.) integrirt. Die Formeln (20. u. 21.) ergeben sich aber noch, wenn man zuerst $\frac{a}{b}$ oder $\frac{1}{b}$ als konstanten Faktor heraussetzt, und dann, um $\int \frac{1}{\sqrt{1+\frac{c}{b}x^2}} \cdot dx$ oder $\int \frac{1}{1-\frac{c}{b}x^2} \cdot dx$ zu integriren, den Weg der Substitution (§. 30. Nr. 4.) wählt, indem man $\frac{c}{b}x^2 = z^2$, also $x = z\cdot\sqrt{\frac{b}{c}}$ setzt, so daß $dx = dz\cdot\sqrt{\frac{b}{c}}$ wird, dadurch diese Integrale auf die (22. u. 23.) zurückgeführt werden.

## §. 32.

Die vorstehenden Integrale ergeben sich unmittelbar aus vorher entwickelten Differenzial-Formeln. Im Allgemeinen fügen wir für die Auffindung solcher Integrale noch Folgendes hinzu:

I. Jede algebraische rationale ganze Funktion von x, und überhaupt jede algebraische Summe von der Form $A \cdot x^{\alpha} + B \cdot x^{\beta} + C \cdot x^{\gamma} + \ldots$, kann ohne weiteres nach x integrirt werden, weil sich nach (§. 31. Nr. I.) jedes Glied derselben integriren läßt, und nach (§. 30. Nr. 2.) die Integration selbst sich bloß darauf zurückzieht.

II. Jede algebraische rationale gebrochene *) Funktion von x, ist entweder eine ächt gebrochene oder eine unächt gebrochene. Im letztern Fall kann man (durch) Division) die ganze Funktion, welche darin steckt, herausholen, und die gebrochene Funktion zerlegt sich dann in eine ganze Funktion von x, und eine ächt gebrochene. — Jede ächt gebrochene Funktion zerlegt sich in eine Summe von lauter Partialbrüchen **) von der Form $\frac{a}{(px+q)^n}$ oder $\frac{a}{px+q}$; und letztere lassen sich alle integriren, weil

$$\int \frac{a}{(px+q)^n} \cdot dx = -\frac{a}{(n-1) \cdot p \cdot (px+q)^{n-1}} \text{ und}$$

$$\int \frac{a}{px+q} \cdot dx = \frac{a}{p} \cdot log\,(px+q)$$

ist, nach (§. 31. Nr. Nr. 13. 14.). — Danach integrirt man nun jede gebrochene rationale algebraische Funktion von x.

*) Die Form

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \ldots + px^n$$

heißt eine algebraische rationale ganze Funktion von x vom nten Grade. Werden zwei solche durch einander dividirt, so hat man in allen den Fällen, wo der Quozient nicht selbst wieder eine solche ganze Funktion wird, die gebrochene algebraische rationale Funktion von x, welche ächt gebrochen heißt, wenn im Zähler keine so hohe Potenz von x vorkommt, als im Nenner.

**) Wegen der Methoden, eine gebrochene Funktion in ihre Partialbrüche zu zerlegen, sehe man „System der Mathem." (Th. IV. S. 41 — 67.); und das Nöthigste davon in dem Anhange zu diesem Kapitel.

Beispiele. 1) So zerlegt sich z. B. $\frac{3x^2}{1-x^2}$ zunächst in $-3+3\cdot\frac{1}{1-x^2}$; letzteres $\frac{1}{1-x^2}$ aber in die beiden Brüche $\frac{\frac{1}{2}}{1+x}+\frac{\frac{1}{2}}{1-x}$. Man hat daher

$$\int\frac{3x^2}{1-x^2}\cdot dx=\int(-3)\cdot dx+\frac{3}{2}\int\frac{1}{1+x}\cdot dx+\frac{3}{2}\int\frac{1}{1-x}\cdot dx$$
$$=-3x+\tfrac{3}{2}log(1+x)-\tfrac{3}{2}log(1-x)=-3x+\tfrac{3}{2}log\frac{1+x}{1-x}.$$

2) So zerlegt sich $\frac{x^2}{(a+bx)^3}$ in $\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{1}{(a+bx)^3}-2\frac{a}{b^2}\cdot\frac{1}{(a+bx)^2}+\frac{1}{b^2}\cdot\frac{1}{a+bx}$; und es ist daher

$$\int\frac{x^2}{(a+bx)^3}\cdot dx=\frac{a^2}{b^2}\cdot\int\frac{1}{(a+bx)^3}\cdot dx-2\frac{a}{b^2}\cdot\int\frac{1}{(a+bx)^2}\cdot dx+$$
$$\frac{1}{b^2}\cdot\int\frac{1}{a+bx}\cdot dx$$
$$=-\frac{a^2}{2b^2}\cdot\frac{1}{(a+bx)^2}+2\frac{a}{b^3}\cdot\frac{1}{a+bx}+$$
$$\frac{1}{b^3}\cdot log(a+bx)$$
$$=\frac{a}{b^2}\cdot\left(2x+\frac{3a}{2b}\right)\cdot\frac{1}{(a+bx)^2}+\frac{1}{b^3}\cdot log(a+bx).\ *)$$

3) So zerlegt sich $\frac{x+2}{x^2+x+1}$ in die beiden Partialbrüche

$$\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}}{x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}}+\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3}}{x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3}},$$

und man hat daher

$$\int\frac{x+2}{x^2+x+1}\cdot dx=(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{-3})\cdot log(x+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{-3})$$
$$+(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{-3})\cdot log(x+\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{-3})$$
$$=\tfrac{1}{2}log(x^2+x+1)+\tfrac{1}{2}\sqrt{-3}\cdot log\frac{x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}}{x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3}}.$$

Diesen zweiten Theil, welcher den imaginären Faktor $\sqrt{-3}$ hat, muß

*) Solche Funktionen, wie $\frac{x^m}{(a+bx)^n}$, integriren sich leichter noch, wenn man sogleich $a+bx=z$, also $x=\frac{1}{b}(z-a)$ setzt, so daß $x^m$ in $\frac{1}{b^m}\cdot(z-a)^m$, d. h. in $z^m-ma\cdot z^{m-1}+\frac{m(m-1)}{2}\cdot a^2\cdot z^{m-2}\ldots\pm a^m$ übergeht; — und wenn man dann (§. 30. Nr. 4. und Nr. 2.) anwendet

man nun, der bequemern Anwendung wegen, nach (§. 13.) in einen Bogen verwandeln; und man erhält dann

$$\int \frac{x+2}{x^2+x+1} \cdot dx = \tfrac{1}{2} log(x^2+x+1) + \sqrt{3} \cdot \frac{1}{tg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}.$$

4) So zerlegt sich die Funktion $\frac{1}{x^3-1}$ in die Brüche $\frac{\frac{1}{3}}{x-1} - \frac{\frac{1}{3}(x+2)}{x^2+x+1}$.

Man findet daher mit Zuziehung des so eben gefundenen Resultats im Beispiel (3.)

$$\int \frac{1}{x^3-1} \cdot dx = \tfrac{1}{3} log\left(\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{tg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}.$$

Auf diesem Wege, nämlich durch Zerlegung der gebrochenen Funktionen in mehrere Theile, findet man auch noch folgende allgemeinere Formeln:

1) $$\int \frac{1}{a+bx+cx^2} \cdot dx = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}} \cdot \frac{1}{tg} \frac{2cx+b}{\sqrt{4ac-b^2}}$$

auch $$= \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}} \cdot log \frac{2cx+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2cx+b+\sqrt{b^2-4ac}}$$ *);

*) Man erleichtert sich diese Rechnungen, wenn man erstlich $\frac{1}{c}$ als Faktor herausſetzt, so daß man $\frac{1}{a+bx+cx^2} = \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{\frac{a}{c}+\frac{b}{c}x+x^2}$ erhält, dann aber $x + \frac{b}{2c} = z$ ſetzt, wodurch $\frac{1}{z+bx+cx^2} = \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{z^2 - \frac{b^2-4ac}{4c^2}}$ wird, und dann (§. 30. Nr. 4.) in Anwendung bringt. Der Nenner $z^2 - \frac{b^2-4ac}{4c^2}$ zerlegt sich nämlich leicht in seine beiden Faktoren, so daß man die Partial-Brüche leichter bekommt.

Diese Erleichterung, wodurch der Ausdruck $a+bx+cx^2$ auf einen andern von der Form $z^2 \pm \alpha^2$ zurückgebracht wird, findet auch bei allen folgenden Nummern statt.

Ist aber $\frac{4ac-b^2}{4c^2}$ positiv, und die Quadrat-Wurzel daraus $= \alpha$, so ist die Zerlegung der Partial-Brüche nicht einmal bequem, sondern man hat dann nach (§. 31. Nr. 19.) sogleich

$$\int \frac{1}{z^2+\alpha^2} \cdot dz = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{tg} \frac{z}{\alpha}.$$

Dadurch erhält man insbesondere die obige erstere Form des Integrals (1.) unmittelbar.

2) $\int \frac{p+qx}{a+bx+cx^2} \cdot dx = \frac{q}{2c} \cdot log(a+bx+cx^2) + \frac{2cp-bq}{2c} \cdot \int \frac{1}{a+bx+cx^2} \cdot dx,$

in so fern $\partial log(a+bx+cx^2) = 2c \cdot \frac{\frac{b}{2c}+x}{a+bx+cx^2}$ ist.

Zerlegt man $\frac{x^m}{a+bx+cx^2}$ dadurch, daß man mit dem Nenner in den Zähler dividirt, in

$$\frac{1}{c} \cdot x^{m-2} - \frac{\frac{a}{c} \cdot x^{m-2} + \frac{b}{c} \cdot x^{m-1}}{a+bx+cx^2},$$

so hat man noch die Reduktions-Formel

3) $\int \frac{x^m}{a+bx+cx^2} \cdot dx = \frac{1}{c} \cdot \frac{x^{m-1}}{m-1} - \frac{a}{c} \cdot \int \frac{x^{m-2}}{a+bx+cx^2} \cdot dx - \frac{b}{c} \cdot \int \frac{x^{m-1}}{a+bx+cx^2} \cdot dx;$

wonach die Integration der Funktionen

$$\frac{x^2}{a+bx+cx^2}, \quad \frac{x^3}{a+bx+cx^2}, \quad \frac{x^4}{a+bx+cx^2}, \text{ ꝛc. ꝛc.,}$$

also auch die Integration von

$$\frac{p+qx+rx^2+sx^3+\cdots}{a+bx+cx^2}$$

auf die Integrale der Formeln (1. und 2. für $p=0$, $q=1$) zurückgeführt werden.

Es gehört aber auch noch hierher die Reduktions-Formel

4) $\int \frac{p+qx}{(a+bx+cx^2)^m} \cdot dx$

$$= \frac{1}{(m-1)(b^2-4ac)} \cdot \frac{(2aq-bp)+(bq-2cp) \cdot x}{(a+bx+cx^2)^{m-1}} + \frac{2m-3}{m-1} \cdot \frac{bq-2cp}{b^2-4ac} \cdot \int \frac{1}{(a+bx+cx^2)^{m-1}} \cdot dx,$$

welche man dadurch erhält, daß man sie der Form nach mit unbestimmten Koeffizienten annimmt, dann differenziirt, und aus

der Vergleichung der Resultate die unbestimmten Koeffizienten bestimmt, wobei auch immer die Note zur (I.) beachtet werden kann.

Durch wiederholte Anwendung einer solchen Reduktions-Formel führt man aber das zusammengesetztere Integral auf ein einfacheres zurück, so daß letzteres dann zuletzt noch allein gefunden zu werden braucht oder schon gefunden ist.

III. Sind die gegebenen und zu integrirenden Funktionen irrational, so sucht man das Geschäft durch Einführung eines neuen Veränderlichen z auf die Integration einer rationalen (ganzen oder gebrochenen) Funktion zurückzuführen.

A. Sind z. B. zu integriren die Funktionen $\frac{1}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$,

$\sqrt{a+bx+cx^2}$, $\frac{p+qx+\cdots+(m+nx+\cdots)\cdot\sqrt{a+bx+cx^2}}{p'+q'x+\cdots+(m'+n'x+\cdots)\cdot\sqrt{a+bx+cx^2}}$

u. dgl. m., so kann $\sqrt{a+bx+cx^2}$ entweder $= x\cdot\sqrt{c}+z$, oder $=\sqrt{a}+x\cdot z$, oder auch, im Falle $\alpha$ ein Werth von x ist, welcher $a+bx+cx^2=0$ macht, so daß $a+bx+cx^2 = c(x-\alpha)(x-\beta)$ ist, $\sqrt{a+bx+cx^2}=(x-\alpha)\cdot z$ setzen (so daß z in jeder dieser drei Annahmen eine andere Bedeutung hat), dann jedesmal aus der angenommenen Gleichung x in z und dx in dz ausdrücken und zuletzt (§. 30. Nr. 4., s. Anmerk. zu §. 30.) anwenden. Jedesmal aber wird man dann eine Funktion von z nach z zu integriren haben, welche rational ist, welche daher in (I. u. II.) bereits betrachtet und behandelt worden ist *).

Auf diesem Wege findet man die Formel:

---

*) Aber auch hier erleichtert man sich diese Arbeiten um ein Bedeutendes, wenn man (nach der vorhergehenden Note) zuerst $a+bx+cx^2$ auf die Form $u^2+\alpha^2$ oder auf die Form $u^2-\alpha^2$ bringt, und dann entweder $\sqrt{u^2-\alpha^2}=u+z$, oder $\sqrt{u^2+\alpha^2}=\alpha+u\cdot z$, oder $\sqrt{u^2-\alpha^2}=(u-\alpha)\cdot z$ setzt.

5) $\int \frac{1}{\sqrt{a+bx+cx^2}} \cdot dx$

$$= \frac{1}{\sqrt{c}} \cdot log(2cx + b + 2\sqrt{c} \cdot \sqrt{a+bx+cx^2}),$$

$$\text{auch} = -\frac{1}{\sqrt{-c}} \cdot \frac{1}{sin} \frac{2cx+b}{\sqrt{b^2-4ac}}.$$

Statt aber auf diesem Wege auch die nachstehenden Beispiele zu integriren, was zwar thunlich ist, aber ungemein langweilige Rechnungen verursachen würde, führt man lieber zusammengesetztere Fälle auf das Integral (5.) zurück, wie sogleich gezeigt werden soll.

Differenziirt man nämlich $\sqrt{a+bx+cx^2}$, so erhält man

$$\partial(\sqrt{a+bx+cx^2})_x = \frac{\frac{1}{2}b}{\sqrt{a+bx+cx^2}} + \frac{cx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}.$$

Nimmt man hiervon links und rechts die Integrale, so giebt dies die Formel

6) $$\int \frac{x}{\sqrt{a+bx+cx^2}} \cdot dx = \frac{1}{c} \cdot \sqrt{a+bx+cx^2} - \frac{b}{2c} \cdot \int \frac{1}{\sqrt{a+bx+cx^2}} \cdot dx.$$

Differenziirt man aber $x \cdot \sqrt{a+bx+cx^2}$, so ergiebt sich

$$\partial(x \cdot \sqrt{a+bx+cx^2})_x = \frac{a+\frac{3}{2}bx+2cx^2}{\sqrt{a+bx+cx^2}}.$$

Nimmt man hiervon wieder links und rechts die Integrale, indem man den Bruch rechts als die Summe dreier Brüche schreibt, auch statt $\int \frac{x}{\sqrt{a+bx+cx^2}} \cdot dx$ seinen Werth aus (6.) substituirt

7) $$\int \frac{x^2}{\sqrt{a+bx+cx^2}} \cdot dx = \frac{2cx-3b}{4c^2} \cdot \sqrt{a+bx+cx^2} + \left(\frac{3b^2}{8c^2} - \frac{a}{2c}\right) \cdot \int \frac{1}{\sqrt{a+bx+cx^2}} \cdot dx.$$

Wollte man $x^{m-1} \cdot \sqrt{a+bx+cx^2}$ differenziren, und dann wieder die Integrale links und rechts nehmen, so würde man die Formel erhalten:

$$8) \int \frac{x^m}{\sqrt{a+bx+cx^2}} \cdot dx = \frac{1}{mc} \cdot x^{m-1} \cdot \sqrt{a+bx+cx^2} - \frac{(m-\frac{1}{2})b}{mc} \cdot \int \frac{x^{m-1}}{\sqrt{a+bx+cx^2}} \cdot dx - \frac{(m-1)a}{mc} \cdot \int \frac{x^{m-2}}{\sqrt{a+bx+cx^2}} \cdot dx$$

wodurch die Integration von $\frac{p+qx+rx^2+sx^3+\cdots}{\sqrt{a+bx+cx^2}} \cdot dx$ sich auf die von $\frac{1}{\sqrt{a+bx+cx^2}} \cdot dx$ zurückführt *).

Ferner findet man noch

$$9) \int \frac{1}{x \cdot \sqrt{a+bx+cx^2}} \cdot dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot log \frac{2a+bx-2\sqrt{a} \cdot \sqrt{a+bx+cx^2}}{x}$$

$$\text{auch} = \frac{1}{\sqrt{-a}} \cdot \frac{1}{tg\, 2\sqrt{-a} \cdot \sqrt{a+bx+cx^2}}.$$

Man führt aber dieses Beispiel dadurch sehr leicht auf die (5.) zurück, daß man $\frac{1}{x} = z$ setzt, so daß $dx = -\frac{dz}{z^2}$ wird. Durch dasselbe Verfahren kann man daher auch die Integration

*) Weil $\sqrt{a+bx+cx^2}$ auch so $\frac{a+bx+cx^2}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$ geschrieben werden kann, so ist auch auf diesem Wege die Integration von $\sqrt{a+bx+cx^2} \cdot dx$, $x \cdot \sqrt{a+bx+cx^2} \cdot dx$, $x^2 \cdot \sqrt{a+bx+cx^2} \cdot dx$, ꝛc. ꝛc. auf das Integral (5.) zurückgeführt.

48) $\int \sin x^m \cdot \cos x^n \cdot dx = \frac{\sin x^{m+1} \cdot \cos x^{n-1}}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} \int \sin x^{m+2} \cdot \cos x^{n-2} \cdot dx;$

49) $\int \sin x^m \cdot \cos x^n \cdot dx = -\frac{\sin x^{m-1} \cdot \cos x^{n+1}}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} \int \sin x^{m-2} \cdot \cos x^n \cdot dx;$

50) $\int \sin x^m \cdot \cos x^n \cdot dx = \frac{\sin x^{m+1} \cdot \cos x^{n-1}}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int \sin x^m \cdot \cos x^{n-2} \cdot dx;$

51) $\int \sin x^m \cdot \cos x^n \cdot dx = \frac{\sin x^{m+1} \cdot \cos x^{n+1}}{m+1} + \frac{m+n+2}{m+1} \int \sin x^{m+2} \cdot \cos x^n \cdot dx;$

52) $\int \sin x^m \cdot \cos x^n \cdot dx = -\frac{\sin x^{m+1} \cdot \cos x^{n+1}}{n+1} + \frac{m+n+2}{n+1} \int \sin x^m \cdot \cos x^{n+2} \cdot dx$*).

Auf spezielle Fälle angewendet geben diese Formeln

---

*) Als anzuwendende Methoden heben wir noch hervor: 1) Da $\sin x^2 + \cos x^2 = 1$ ist, so kann man mit $\sin x^2 + \cos x^2$ multiplizieren, und die gegebene Funktion wird dadurch in zwei andere sich zerlegen; z. B. $\sin x^{-m} \cdot \cos x^{-n}$ giebt die beiden $\sin x^{-(m-2)} \cdot \cos x^{-n} + \sin x^{-m} \cdot \cos x^{-(n-2)}$; eben so ist aus diesem Grunde

$$(\sin x)^{m-2} \cdot (\cos x)^{n-2} = \sin x^m \cdot \cos x^{n-2} + \sin x^{m-2} \cdot \cos x^n.$$

2) Wenn m ungerade ist, z. B. $m = 2\mu + 1$, so ist

$$(\sin x)^m \cdot \cos x^n = -\sin x^{2\mu} \cdot \cos x^{n+1} \cdot \delta(\cos x),$$

und dann darf man nur $\cos x = z$ setzen, und es ist $-(1-z^2)^\mu \cdot z^{n+1} \cdot dz$ zu integriren, während diese Funktion rational ist. 3) Ist aber (nicht m, sondern) n ungerade, so erreicht man denselben Zweck, wenn $\sin x = z$ gesetzt wird.

Dieſe letztere Formel iſt, wie man ſieht, eine Reduktions-Formel, welche dadurch unmittelbar gefunden wird, daß man

$$\frac{1}{x\cdot(a+bx)^{\frac{3}{2}}} \text{ in } \frac{1}{a}\left(\frac{a+bx}{x\cdot(a+bx)^{\frac{3}{2}}}-\frac{bx}{x\cdot(a+bx)^{\frac{3}{2}}}\right),$$

d. h. in $\frac{1:a}{x\cdot\sqrt{a+bx}}-\frac{b:a}{(a+bx)^{\frac{3}{2}}}$ verwandelt.

Da $\sqrt{a+bx}=\frac{a+bx}{\sqrt{a+bx}}$ und $x\cdot\sqrt{a+bx}=\frac{ax+bx^2}{\sqrt{a+bx}}$ iſt, ſo können die Integrale dieſer beiden Funktionen $\sqrt{a+bx}$ und $x\cdot\sqrt{a+bx}$ auch aus den Formeln (10.—12.) zuſammengeſetzt werden *).

C. Iſt die zu integrirende Funktion aus $x$ und $\sqrt[n]{\frac{a+bx}{p+qx}}$ algebraiſch rational zuſammengeſetzt, ſo ſetze man

$$\sqrt[n]{\frac{a+bx}{p+qx}}=z, \text{ alſo } x=\frac{p\cdot z^n-a}{b-q\cdot z^n},$$

und man wird ſogleich eine rationale Funktion von z zu integriren haben **).

*) Im Falle die zu integrirende Funktion mehrere ſolche Wurzeln mit einerlei Radikanden, nämlich $\sqrt[n]{a+bx}$ und $\sqrt[p]{a+bx}$ und $\sqrt[r]{(a+bx)^s}$ enthalten ſollte, ſo würde man $a+bx=z^{npr}$ ſetzen, und eine rationale Funktion von z zu integriren haben. Als Beiſpiel ſey $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}$ zu integriren. Man ſetze $x=z^6$, und erhält

$$\int\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}\cdot dx=6\int\frac{z^2}{1+z}\cdot dz=3z^2-6z+6\cdot log(1+z).$$

Sollte aber die zu integrirende Funktion zwei ſolche Quadrat-Wurzeln $\sqrt{a+bx}$ und $\sqrt{p+qx}$ enthalten, ſo würde man z ſo einführen, daß $\sqrt{a+bx}=z\cdot\sqrt{p+qx}$ wird.

**) Enthielte die zu integrirende Funktion mehrere ſolche Wurzeln mit einerlei Radikanden, z. B. etwa $\sqrt[n]{\left(\frac{a+bx}{p+qx}\right)}$ und $\sqrt[m]{\left(\frac{a+bx}{p+qx}\right)}$,

Hierher gehört als specieller Fall, die Integration unter (A.), in so fern $a + bx + cx^2$ allemal in zwei Faktoren $\alpha x + \beta$ und $\gamma x + \delta$ zerlegt werden kann, so daß man hat

$$\sqrt{a+bx+cx^2} = \sqrt{(\alpha x+\beta)(\gamma x+\delta)} = (\alpha x+\beta)\cdot\sqrt{\left(\frac{\gamma x+\delta}{\alpha x+\beta}\right)}$$
$$= (\gamma x+\delta)\cdot\sqrt{\left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)}.$$

D. Enthält aber die zu integrirende Funktion von x zwei solche Quadratwurzeln, nämlich

$$\sqrt{a+bx+cx^2} \text{ und } \sqrt{p+qx+rx^2},$$

so ist sie kaum und in seltenen Fällen nur, rational zu machen (d. h. das Integral dieser Funktion wird dann nur höchst selten auf die Integration einer rationalen Funktion von z zurückgeführt werden können). — Die beiden Funktionen, nämlich

$$\sqrt{a+bx+cx^2}\cdot\sqrt{p+qx+rx^2} = \sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4}$$

und

$$\frac{\sqrt{a+bx+cx^2}}{\sqrt{p+qx+rx^2}} = \frac{a+bx+cx^2}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4}},$$

hängen offenbar von der Integration einer und derselben

$$1.1) \quad \frac{f_x}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4}}\cdot dx$$

ab, wo $f_x$ eine gegebene algebraische rationale (ganze oder gebrochene) Funktion von x vorstellt. — Mit diesem Integral hat man sich vielfältig beschäftigt, weil man sowohl bei Bestimmung der elliptischen Bögen, als auch an mehreren Stellen der Mechanik darauf zurückkommt. Deshalb mögen hier noch einige Worte darüber stehen.

Zuerst hat man nämlich $x = \frac{p+q\cdot y}{1+y}$ gesetzt, und so das Integral (1.1) nach (§. 30. Nr. 4.) und durch gehörige Bestimmung von p und q auf das Integral von

---

so würde man $\frac{a+bx}{p+qx} = y^m$ setzen, und man würde dann (nach §. 30. Nr. 4.) allemal sogleich eine rationale Funktion von z zu integriren haben.

2.2) $$\int \frac{P_y}{\sqrt{\alpha + \beta y + \gamma y^4}} \cdot dx$$

zurückgeführt, wo $P_y$ eine algebraische rationale ganze oder gebrochene Funktion von y ist, welche eben deshalb auch jedesmal auch in der Form $\frac{S + T \cdot y}{U + V \cdot y}$ und deshalb in der Form

$$\frac{SU - TV \cdot y^2}{U^2 - V^2 \cdot y^2} + \frac{TU - SV}{U^2 - V^2 \cdot y^2} \cdot y$$

geschrieben werden kann, wo S, T, U, V bloß $y^2$ und nicht y selbst enthalten. Dadurch zerlegt sich aber die Funktion (2.2) in zwei Funktionen, deren letztere nach dem Frühern integrirt werden kann, wenn man $y^2 = z$ setzt; also daß bloß noch eine Funktion

3.3) $$\int \frac{Q_y}{\sqrt{\alpha + \beta y^2 + \gamma y^4}} \cdot dy$$

nach y zu integriren bleibt.

Nun findet man zwei Reduktions-Formeln, durch welche einmal $\int \frac{y^{2m}}{\sqrt{\alpha + \beta y^2 + \gamma y^4}} \cdot dy$ auf die Integrale

$$\int \frac{y^{2m-2}}{\sqrt{\alpha + \beta y^2 + \gamma y^4}} \text{ und } \int \frac{y^{2m-1}}{\sqrt{\alpha + \beta y^2 + \gamma y^4}} \cdot dy,$$

und dann noch $\int \frac{1}{(y^2 + a)^n \cdot \sqrt{\alpha + \beta y^2 + \gamma y^4}}$ auf zwei ganz ähnliche Integrale zurückgeführt werden, in denen aber die positive ganze Zahl n immer kleiner wird. — Dadurch aber reducirt sich das Integral (3.3), es mag Q eine ganze oder gebrochene Funktion von $y^2$ seyn, allemal auf eines der 3 Integrale

4.4) $$\int \frac{1}{\sqrt{\alpha + \beta y^2 + \gamma y^4}} \cdot dy, \quad \int \frac{y^2}{\sqrt{\alpha + \beta y^2 + \gamma y^4}} \cdot dy$$

oder $$\int \frac{1}{(y^2 + a) \cdot \sqrt{\alpha + \beta y^2 + \gamma y^4}} \cdot dy,$$

welche nun noch näher behandelt werden müssen, wobei jedoch der Nenner leicht noch die Form $\sqrt{(1 - p^2y^2)(1 - q^2y^2)}$ an-

nehmen kann, indem man $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ als einen konstanten Faktor herausſetzt.

Macht man nun $py = \sin\varphi$, ſo reduciren ſich die 8 Integrale (4.4) auf die Form

5.5) $$\int \frac{A + B \cdot \sin\varphi^2}{C + D \cdot \sin\varphi^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - e^2 \cdot \sin\varphi^2}} \cdot d\varphi;$$

und alle in dieſer Form (5.5) ſtekkenden Integrale belegte Le Gendre mit dem Namen der elliptiſchen Transcendenten.

Mit dieſen elliptiſchen Transcendenten haben ſich aber vorzüglich Euler, Lagrange, Legendre und in der neueſten Zeit Abel (den ein zu früher Tod den Wiſſenſchaften entriß) und Jacobi (zu Königsberg) beſchäftigt, theils um ſie durch unendliche Reihen zu integriren, theils um Tabellen zu konſtruiren, welche in gegebenen Fällen den Ziffernwerth ſolcher Integrale entnehmen laſſen, theils bloß um neue Reduktionen zu verſuchen. Alle dieſe Arbeiten ſind reich an neuen analytiſchen Ideen, an neuen Methoden und Hilfsmitteln, und ſind daher zum Studium ſehr zu empfehlen. Für unſere hieſigen Zwecke glauben wir aber genug darüber geſagt zu haben.

E. Kommen noch verwikkeltere Wurzeln vor, ſo iſt für eine Integration in endlicher (geſchloſſener) Form (ſo daß das Reſultat entweder auf eine algebraiſche Funktion, oder auf Logarithmen und Kreisbogen zurükgeführt, und deshalb entweder direkt, oder doch mit Zuziehung der Logarithmen- und der trigonometriſchen Tafeln leicht in Ziffern auszuwerthen wäre) natürlich noch weniger zu hoffen.

IV. Dagegen ſind folgende Integrale ſehr leicht zu finden, dadurch daß man einen neuen Veränderlichen $\varphi$ einführt, und auf dem Wege der Subſtitution, d. h. nach (§. 30. Nr. 4.) integrirt. Setzt man namentlich $a + bx^2 = \varphi$ oder $\sqrt{a + bx^2} = \varphi$, ſo erhält man ſogleich

17) $$\int \frac{x}{a + bx^2} \cdot dx = \frac{1}{2b} \cdot \log(a + bx^2);$$

18) $\int \frac{x}{\sqrt{a+bx^2}} \cdot dx = \frac{1}{b} \cdot \sqrt{a+bx^2}$;

19) $\int \frac{x^3}{a+bx^2} \cdot dx = \frac{x^2}{2b} - \frac{a}{2b^2} \cdot log(a+bx^2)$;

20) $\int \frac{x^3}{\sqrt{a+bx^2}} \cdot dx = \frac{(a+bx^2)^{\frac{3}{2}}}{3b^2} - \frac{a}{b^2} \cdot \sqrt{a+bx^2}$ *).

Und eben so einfach findet sich

21) $\int tg\,x \cdot dx = \int \frac{sin\,x}{cos\,x} \cdot dx = \int \frac{-1}{cos\,x} \cdot d(cos\,x)$

$= -log\,cos\,x$;

22) $\int cotg\,x \cdot dx = \int \frac{cos\,x}{sin\,x} \cdot dx = \int \frac{1}{sin\,x} \cdot d(sin\,x)$

$= log\,sin\,x$;

23) $\int \frac{sin\,x}{cos\,x^2} \cdot dx = \int \frac{-1}{cos\,x^2} \cdot d(cos\,x) = \frac{1}{cos\,x} = sec\,x$;

24) $\int \frac{cos\,x}{sin\,x^2} \cdot dx = \int \frac{1}{sin\,x^2} \cdot d(sin\,x) = -\frac{1}{sin\,x} = -cosec\,x$;

25) $\int \frac{1}{x \cdot log\,x} \cdot dx = \int \frac{1}{log\,x} \cdot d(log\,x) = log(log\,x)$;

26) $\int \left(\frac{1}{sin}\,x\right)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx = \frac{1}{n+1} \cdot \left(\frac{1}{sin}\,x\right)^{n+1}$;

27) $\int \left(\frac{1}{tg}\,x\right)^n \cdot \frac{1}{1+x^2} \cdot dx = \frac{1}{n+1} \cdot \left(\frac{1}{tg}\,x\right)^{n+1}$ **);

u. dgl. m.

*) So integrirt man z. B. auch $\frac{x^{2m+1}}{\sqrt{x^2-1}}$, indem man $\sqrt{x^2-1} = \varphi$ setzt. — Und selbst $\frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}$ integrirt sich leicht, indem man den ganzen Nenner $= \varphi$ setzt.

**) Ist überhaupt irgend einmal gefunden

$$\int f_x \cdot dx = \psi_x,$$

so ist dann allemal auch

$$\int e^x \cdot f_{(e^x)} \cdot dx = \psi_{(e^x)}$$

$$\int cos\,x \cdot f_{sin\,x} \cdot dx = \psi_{sin\,x};$$

$$\int sin\,x \cdot f_{cos\,x} \cdot dx = -\psi_{cos\,x};$$

V. Trigonometrische Funktionen integriren sich häufig durch Zerlegung in integrirbare Theile, wie solches nach (§. 30. Nr. 2.) für alle Funktionen empfohlen werden muß, am leichtesten. So z. B.: Um

$$\sin(px+q)\cdot\cos(ax+b),\quad \sin(px+q)\cdot\sin(ax+b)$$

oder

$$\cos(px+q)\cdot\cos(ax+b)$$

nach x zu integriren, verwandelt man diese Produkte nach den Elementen der Trigonometrie, in Summen oder Differenzen, deren Theile einzeln dann leicht integrirt werden können.

Aber auch um z. B. $\frac{1}{\sin x^2\cdot\cos x^2}$ zu integriren, kann man statt des Zählers 1 hier $\sin x^2+\cos x^2$ schreiben, so daß sich die Funktion in

$$\frac{1}{\cos x^2}+\frac{1}{\sin x^2}$$

zerlegt, wo dann jeder Theil nach den Formeln (§. 31. Nr. Nr. 7. 8.) integrirt sich findet.

Auch lassen sich Integrale, wie die der Funktionen $f_{\sin x}\cdot dx$, $f_{\cos x}\cdot dx$, $f_{\sin x,\cos x}\cdot dx$, $f_{\sin x,\sin 2x,\cos x,\cos 2x,\sin ax,\cos ax,}\cdot dx$, und überhaupt Integrale der Funktionen, welche Kosinus und Sinus des Bogens x und der vielfachen Bogen 2x, 3x, ax, bx, ꝛc. ꝛc. nach Belieben enthalten, häufig und meist dadurch auf die Integration algebraischer Funktionen zurückführen, daß man $\cos x=z$ oder $\sin x=z$ setzt. — So erhält man z. B. dadurch sogleich

$$28)\quad \int\frac{1}{a+b\cdot\cos x}=\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\cdot\log\frac{b+a\cdot\cos x+\sqrt{b^2-a^2}\cdot\sin x}{a+b\cdot\cos x}$$

$$\text{auch}\quad =\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\cdot\frac{1}{\cos}\left(\frac{b+a\cdot\cos x}{a+b\cdot\cos x}\right).$$

$$\int f\left(\frac{1}{\sin}x\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot dx=\psi\left(\frac{1}{\sin}x\right),$$

$$\int f\left(\frac{1}{\operatorname{tg}}x\right)\cdot\frac{1}{1+x^2}\cdot dx=\psi\left(\frac{1}{\operatorname{tg}}x\right),$$

u. s. w. f.

Auf dieses Integral würde man aber das nachstehende $\int \frac{1}{p+q \cdot \sin x^2} \cdot dx$ leicht zurückführen, indem man $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$ statt $\sin x^2$ setzt, dann aber $2x = z$ nimmt, so daß $dx = \frac{1}{2}dz$ wird.

Hat man aber $f_x \cdot dx$ zu integriren, so darf man nur $e^x = z$ setzen, um meist eine integrirbare algebraische Form zu haben.

Man kann auch, statt $\sin x$ und $\cos x$, ihre Werthe $\frac{e^{x \cdot i} - e^{-x \cdot i}}{2i}$ und $\frac{e^{x \cdot i} + e^{-x \cdot i}}{2}$ aus (§. 18.) substituiren und dadurch mehrere transcendente Funktionen integriren, z. B.

29) $\int e^{ax} \cdot \cos bx \cdot dx = \frac{a \cdot \cos bx + b \cdot \sin bx}{a^2 + b^2} \cdot e^{ax}$;

30) $\int e^{ax} \cdot \sin bx \cdot dx = \frac{a \cdot \sin bx - b \cdot \cos bx}{a^2 + b^2} \cdot e^{ax}$.*)

VI. Da man endlich jede Funktion $f_x$ als ein Produkt $1 \cdot f_x$ oder $x^0 \cdot f_x$ ansehen kann, während $\int 1 \cdot dx = \int x^0 \cdot dx = x$ ist, so kann man, wenn alle Mittel vergebens versucht worden sind, doch auch noch die Formel (§. 30. Nr. 3.) anzuwenden versuchen, d. h. theilweise integriren, welche Formel für Produkte $\varphi \cdot \psi$ und daher auch für Quotienten $\frac{\varphi}{\psi}$ (weil letztere als Produkte $\varphi \cdot \frac{1}{\psi}$ geschrieben werden können) ohnedieß angewendet werden muß. — Nach dieser Formel erhält man z. B.

31)

*) Integrirt man die eine oder die andere dieser Funktionen zweimal theilweise, d. h. nach der Formel

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du,$$

indem man einmal $e^{ax} \cdot dx$ statt $dv$, das anderemal aber entweder $\cos bx \cdot dx$ oder $\sin bx \cdot dx$ statt $dv$ setzt, so erhält man zwei Gleichungen zwischen diesen unbekannten Integralen, so daß man durch Algebra letztere ohne weiteres findet.

31) $\int \log x \cdot dx = x \cdot \log x - x = x(-1 + \log x);$

32) $\int \frac{1}{\sin} x \cdot dx = x \cdot \frac{1}{\sin} x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx$

$= x \cdot \frac{1}{\sin} x + \sqrt{1-x^2};$

33) $\int \frac{1}{\cos} x \cdot dx = x \cdot \frac{1}{\cos} x - \sqrt{1-x^2};$

34) $\int \frac{1}{tg} x \cdot dx = x \cdot \frac{1}{tg} x - \log \sqrt{1+x^2};$

35) $\int \frac{1}{cotg} x \cdot dx = x \cdot \frac{1}{cotg} x + \log \sqrt{1+x^2};$

u. s. w. f.

VII. Sind aber Produkte oder Quozienten zu integriren, so wendet man die theilweise Integration ohne weiteres an, wenn auch durch sie das gegebene Integral nur auf ein einfacheres sollte zurückgeführt werden *). Indem man dann diese theilweise Integration wiederholt, und öfter wiederholt, gelangt man endlich entweder zu einem bekannten, oder doch zu einem solchen Integrale, welches nach andern bekannten Methoden, oder vielleicht mittelst unendlicher Reihen zweckgemäß behandelt werden kann.

So findet sich

36) $\int x \cdot e^x \cdot dx = e^x \cdot (x-1);$

*) Zuweilen bekommt man ein Integral auf sich selber reducirt, so daß man eine algebraische Gleichung hat, zwischen dem zu findenden Integral, als dem Unbekannten, und bekannten Funktionen. Das Integral wird dann durch Auflösung dieser Gleichung gefunden. — So z. B. giebt die theilweise Integration unmittelbar

$$\int \sin x \cdot \cos x \cdot dx = \sin x^2 - \int \sin x \cdot \cos x \cdot dx;$$

also wird $\int \sin x \cdot \cos x \cdot dx = \frac{1}{2} \sin x^2.$

In diesem Beispiele hätte man aber freilich auch, weil $\int \cos x \cdot dx = \sin x$ ist, sobald man $\sin x = z$ setzte, sogleich erhalten können

$$\int \sin x \cdot \cos x \cdot dx = \int z \cdot dz = \frac{1}{2} z^2 = \frac{1}{2} \sin x^2.$$

37) $\int x \cdot \cos x \cdot dx = x \cdot \sin x + \cos x;$

38) $\int x \cdot \sin x \cdot dx = -x \cdot \cos x + \sin x;$

39) $\int x^n \cdot \log x \cdot dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \log x - \frac{1}{n+1} \int x^n \cdot dx$

$= \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} \cdot \log x - \frac{1}{(n+1)^2} \cdot x^{n+1}.$

Desgleichen ist durch diese theilweise Integration

$$\int x^2 \cdot \cos x \cdot dx = x^2 \cdot \sin x - 2 \int x \cdot \sin x \cdot dx;$$

findet man also $\int x \cdot \sin x \cdot dx$ abermals durch theilweise Integration, wie in (38.), und substituirt man das Resultat hier herein, so erhält man

40) $\int x^2 \cdot \cos x \cdot dx = x^2 \cdot \sin x + 2x \cdot \cos x - 2 \sin x.$

Auf diesem Wege findet man z. B. auch die Integrale von $(\log x)^n$, $\left(\frac{1}{\sin} x\right)^n$, $\left(\frac{1}{\cos} x\right)^n$, $\left[\log(x + \sqrt{x^2 - 1})\right]^n$, $x^m \cdot (\log x)^n$, $x^n \cdot e^x$, $x^n \cdot \cos x$, $x^n \cdot \sin x$, $x^n \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $x^n \cdot e^{ax}$, $e^{ax} \cdot \cos bx$, $e^{ax} \cdot \sin bx$ u. dgl. m. (in der Regel durch n mal hinter einander fortgesetzte theilweise Integration) zuletzt ganz und vollständig hergestellt, wenn nur n eine positive ganze Zahl ist. Ist aber n eine negative ganze oder gebrochene, oder eine positive gebrochene Zahl, so giebt die fortgesetzte theilweise Integration das gesuchte Integral wenigstens in ein anderes analoges ausgedrückt, in welchem jedoch der Exponent, statt n zu seyn, jetzt entweder $-1$ ist, oder zwischen 0 und 1 liegt. In dieser Beziehung sind namentlich noch wichtig diese Reduktions-Formeln:

41) $\int (ax+b)^m \cdot (px+q)^n \cdot dx = \frac{(ax+b)^m \cdot (px+q)^{n+1}}{(n+1) \cdot p}$

$- \frac{ma}{(n+1) \cdot p} \cdot \int (ax+b)^{m-1} \cdot (px+q)^{n+1} \cdot dx;$

42) $\int (ax+b)^m \cdot (px+q)^n \cdot dx = \frac{(ax+b)^{m+1} \cdot (px+q)^n}{(m+1) \cdot a}$

$$- \frac{np}{(m+1) \cdot a} \cdot \int (ax+b)^{m+1} \cdot (px+q)^{n-1} \cdot dx;$$

43) $\int (ax+b)^m \cdot (px+q)^n \cdot dx = \frac{(ax+b)^m \cdot (px+q)^{n+1}}{(m+n+1) \cdot p}$

$$- \frac{m(aq-bp)}{(m+n+1) \cdot p} \cdot \int (ax+b)^{m-1} \cdot (px+q)^n \cdot dx;$$

44) $\int (ax+b)^m \cdot (px+q)^n \cdot dx = \frac{(ax+b)^{m+1} \cdot (px+q)^n}{(m+n+1) \cdot a}$

$$- \frac{n(bp-aq)}{(m+n+1) \cdot a} \cdot \int (ax+b)^m \cdot (px+q)^{n-1} \cdot dx;$$

45) $\int (ax+b)^m \cdot (px+q)^n \cdot dx = \frac{(ax+b)^{m+1} \cdot (px+q)^{n+1}}{(m+1) \cdot (aq-bp)}$

$$- \frac{(m+n+2) \cdot p}{(m+1) \cdot (aq-bp)} \cdot \int (ax+b)^{m+1} \cdot (px+q)^n \cdot dx;$$

46) $\int (ax+b)^m \cdot (px+q)^n \cdot dx = \frac{(ax+b)^{m+1} \cdot (px+q)^{n+1}}{(n+1) \cdot (bp-aq)}$

$$- \frac{(m+n+2) \cdot a}{(n+1) \cdot (bp-aq)} \cdot \int (ax+b)^m \cdot (px+q)^{n+1} \cdot dx^*).$$

---

*) Die (41. u. 42.) bekommt man durch unmittelbare Anwendung der Formel (§. 30. Nr. 3.). — Nun kann man aber die Funktion $(ax+b)^{m-1} \cdot (px+q)^{n+1}$ zerlegen in $(px+q) \cdot (ax+b)^{m-1} (px+q)^n$, und dann in $\left[\frac{p}{a}(ax+b) + q - \frac{bp}{a}\right] \cdot (ax+b)^{m-1} \cdot (px+q)_n$, also in $\frac{p}{a} \cdot (ax+b)^m \cdot (px+q)^n + \frac{aq-bp}{a} \cdot (ax+b)^{m-1} \cdot (px+q)^n$, so daß man das Integral der ersten gleich der Summe der Integrale dieser beiden letztern hat. Substituirt man dies in die (41.), so erhält man die (43.), also auch die (44.). — Setzt man aber in die (43.) $m+1$ statt $m$, und findet man das Integral zur Rechten durch das zur Linken ausgedrückt, so hat man die (45.) und also auch die (46.). — Die (42. 44. und 46.) gehen nämlich aus den (41. 43. u. 45.) dadurch hervor, daß man $a, p, b, q, m, n$, mit einander vertauscht. Cauchy leitet sie alle durch ein und dasselbe Verfahren ab, nämlich dadurch, daß er die Formel $\int u \cdot dv = uv - \int v \cdot du$ in dieser Form

$$\int uv \cdot d(\log v) = uv - \int uv \cdot d(\log u).$$

Die Formel (41.) wird man anwenden, wenn m positiv, n negativ ist; die (42.), wenn m negativ, aber n positiv. Die (43. u. 44.) werden abwechselnd mit Erfolg angewandt, wenn m und n beide positiv sind. Und die Formeln (45. u. 46.) sind eben so abwechselnd anzuwenden, wenn m und n beide negativ seyn sollten. — Dann erhält man nämlich nach und nach immer absolut niedrigere (positive oder negative) Exponenten, bis man, wenn m und n ganz sind, auf Null-Exponenten stößt, oder, wenn m oder n gebrochen ist, auf Exponenten, die zwischen o und 1 liegen. Diese letztern Integrale können dann oft durch Zuziehung unendlicher Reihen noch zweckmäßig integrirt werden, in so ferne die Endresultate schnell genug konvergiren.

Hat man aber die Funktion

$$(ay^{\mu}+b)^{m}$$

nach y zu integriren, und setzt man $y^{\mu}=x$, so wird

$$\int (ay^{\mu}+b)^{m}\cdot dy = \frac{1}{\mu}\int (ax+b)^{m}\cdot x^{\frac{1}{\mu}-1}\cdot dx.$$

Also sieht sich das Integral links auf das so eben behandelte zurückgeführt, d. h. auf die Anwendung der Formeln (41.—46.).

Auf dieselben Formeln wird man zurückgeführt, wenn man etwa

$$sin\,x^{m}\cdot cos\,x^{n}$$

integriren soll, und nun entweder $sin\,x^{m}=z$ oder $cos\,x^{n}=z$ setzt. — Man kann aber dieselben Reduktionen natürlich auch sogleich mit $sin\,x^{m}\cdot cos\,x^{n}$ vornehmen. Dann erhält man

$$47)\quad \int sin\,x^{m}\cdot cos\,x^{n}\cdot dx = -\frac{sin\,x^{m-1}\cdot cos\,x^{n+1}}{n+1}+\frac{m-1}{n+1}\int sin\,x^{m-2}\cdot cos\,x^{n+2}\cdot dx;$$

---

anwendet, und nun statt u und v solche Potenzen je zweier der 3 Ausdrücke $ax+b$, $px+q$ und $\frac{ax+b}{px+q}$ setzt, daß $\int uv\cdot d(log\,v)$ allemal das verlangte $\int (ax+b)^{m}\cdot(px+q)^{n}\cdot dx$ wird. Ein solches Verfahren ist jedoch mehr elegant als instruktiv.

48) $\int \sin x^m \cdot \cos x^n \cdot dx = \frac{\sin x^{m+1} \cdot \cos x^{n-1}}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} \int \sin x^{m+2} \cdot \cos x^{n-2} \cdot dx;$

49) $\int \sin x^m \cdot \cos x^n \cdot dx = -\frac{\sin x^{m-1} \cdot \cos x^{n+1}}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} \int \sin x^{m-2} \cdot \cos x^n \cdot dx;$

50) $\int \sin x^m \cdot \cos x^n \cdot dx = \frac{\sin x^{m+1} \cdot \cos x^{n-1}}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int \sin x^m \cdot \cos x^{n-2} \cdot dx;$

51) $\int \sin x^m \cdot \cos x^n \cdot dx = \frac{\sin x^{m+1} \cdot \cos x^{n+1}}{m+1} + \frac{m+n+2}{m+1} \int \sin x^{m+2} \cdot \cos x^n \cdot dx;$

52) $\int \sin x^m \cdot \cos x^n \cdot dx = -\frac{\sin x^{m+1} \cdot \cos x^{n+1}}{n+1} + \frac{m+n+2}{n+1} \int \sin x^m \cdot \cos x^{n+2} \cdot dx$*).

Auf spezielle Fälle angewendet geben diese Formeln

---

*) Als anzuwendende Methoden heben wir noch hervor: 1) Da $\sin x^2 + \cos x^2 = 1$ ist, so kann man mit $\sin x^2 + \cos x^2$ multiplizieren, und die gegebene Funktion wird dadurch in zwei andere sich zerlegen; z. B. $\sin x^{-m} \cdot \cos x^{-n}$ giebt die beiden $\sin x^{-(m-2)} \cdot \cos x^{-n} + \sin x^{-m} \cdot \cos x^{-(n-2)}$; eben so ist aus diesem Grunde

$$(\sin x)^{m-2} \cdot (\cos x)^{n-2} = \sin x^m \cdot \cos x^{n-2} + \sin x^{m-2} \cdot \cos x^n.$$

2) Wenn m ungerade ist, z. B. $m = 2\mu + 1$, so ist

$$(\sin x)^m \cdot \cos x^n = -\sin x^{2\mu} \cdot \cos x^{n+1} \cdot \delta(\cos x),$$

und dann darf man nur $\cos x = z$ setzen, und es ist $-(1-z^2)^\mu \cdot z^{n+1} \cdot dz$ zu integriren, während diese Funktion rational ist. 3) Ist aber (nicht m, sondern) n ungerade, so erreicht man denselben Zweck, wenn $\sin x = z$ gesetzt wird.

53) $\int (tg\,x)^m \cdot dx = \frac{tg\,x^{m-1}}{m-1} - \int tg\,x^{m-2} \cdot dx;$

54) $\int cotg\,x^m \cdot dx = -\frac{cotg\,x^{m-1}}{m-1} - \int cotg\,x^{m-2} \cdot dx;$

55) $\int \frac{1}{sin\,x \cdot cos\,x} \cdot dx = log\,tg\,x;$

56) $\int sin\,x \cdot cos\,x \cdot dx = \mp \frac{1}{2}(sin\,x)^2;$

57) $\int sec\,x \cdot dx = \int \frac{1}{cos\,x} \cdot dx = log\,tg(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}x);$

58) $\int cosec\,x \cdot dx = \int \frac{1}{sin\,x} \cdot dx = log\,tg\,\frac{1}{2}x.$

## §. 33.

Wenn aber die Versuche zur Integration einer gegebenen Funktion in endlicher (geschlossener) Form alle mislingen, so sucht man das Integral mittelst unendlicher Reihen ausgedrückt zu erhalten.

Dazu kann man nun zunächst die allgemeine Integrations-Formel (§. 28.) gebrauchen.

Damit aber die entstehende Reihe auch wirklich brauchbar, also konvergent werde, so sucht man lieber die zu integrirende Funktion $f_x$ in eine möglichst schnell konvergirende Reihe zu verwandeln, deren einzelne Glieder alle integrirbar sind.

So kann man z. B. $sin\,x$, $cos\,x$, $e^x$, $a^x$, ꝛc. ꝛc. nach x integriren, indem man diese Funktionen in solche unendliche Reihen verwandelt, welche nach Potenzen von x fortlaufen, und alle Glieder dieser Reihen integrirt.

So kann man aber auch z. B. $\frac{\sqrt{1-e^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}$, im Falle e sehr klein seyn sollte, nach x integriren, indem man bloß den Zähler $\sqrt{1-e^2x^2}$ in eine nach e fortlaufende Reihe und dadurch die gegebene Funktion $\frac{\sqrt{1-e^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}$ in eine Reihe verwandelt, deren

einzelne Glieder die Form $\frac{x^{2m} \cdot e^{2m}}{\sqrt{1-x^2}}$ haben und integrirt werden können. — Sollte aber e von 1 wenig verschieden seyn, so würde man lieber $\frac{1-e}{e} = n$ setzen, so daß nun n sehr klein ist, und $\frac{\sqrt{1-e^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}$ so schreiben $\frac{\sqrt{e} \cdot \sqrt{1-ex}}{\sqrt{1-x}} \cdot \sqrt{1+\frac{n}{1+x}}$; dann aber den letztern Faktor in eine Reihe, die nach Potenzen von $\frac{n}{1+x}$ fortläuft, entwikkeln, so daß man zuletzt einzelne Glieder von der Form

$$(\mathfrak{C}) \cdots \qquad \frac{\sqrt{1-ex}}{(1+x)^{\mu} \cdot \sqrt{1-x}}$$

zu integriren bekommt.

Hat man aber eine Reihe von Gliedern, welche sich auf diese Form

$(\sigma) \cdots (A_0 + A_1 \cdot U_x + A_2 \cdot U_x^2 + A_3 \cdot U_x^3 + A_4 \cdot U_x^4 + \cdots) \cdot V_x$

bringen lassen, zu integriren, so integrire man

$(\varphi) \cdots \int \frac{V_x}{1 - a \cdot U_x} \cdot dx$, entwikkle das Integral in eine Reihe, die nach ganzen Potenzen von a fortläuft, und setze zuletzt in dieser Reihe statt der Potenzen $a^0, a^1, a^2, a^3, a^4$, ꝛc. ꝛc. bezüglich die Koeffizienten $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4$, ꝛc. ꝛc. und man hat das Integral der Reihe $(\sigma)$ *).

Um daher die Reihe zu integriren, deren Glieder alle die

---

*) Es ist nämlich das Integral der Reihe $(\sigma)$ offenbar $= A_0 \cdot \int 1 \cdot V \cdot dx + A_1 \cdot \int UV \cdot dx + A_2 \cdot \int U^2V \cdot dx + A_3 \cdot \int U^3V \cdot dx + \cdots$.

Dagegen ist, wenn man statt $\frac{1}{1-aU}$ die ihm gleiche Reihe

$$1 + aU + a^2U^2 + a^3U^3 + \cdots$$

setzt, offenbar auch

$$\int \frac{V}{1-aU} \cdot dx = \int V \cdot dx + a \cdot \int UV \cdot dx + a^2 \cdot \int U^2V \cdot dx + a^3 \cdot \int U^3V \cdot dx + \cdots,$$

und daraus fällt die obige Behauptung in die Augen.

Form (C) haben, darf man nur hier ſtatt U jetzt $(1+x)^{-1}$ und ſtatt V jetzt $\frac{\sqrt{1-ex}}{\sqrt{1-x}}$ ſetzen, und daher nur die Funktion

$$\frac{\sqrt{1-ex}}{\sqrt{1-x}\cdot(1-a\cdot(1+x)^{-1})} = \frac{\sqrt{1-ex}}{\sqrt{1-x}} + \frac{a}{1-a+x}\cdot\frac{\sqrt{1-ex}}{\sqrt{1-x}}$$

integriren.

Solche Mittel ſind es ohngefähr, welche man bei der Integration mittelſt unendlicher Reihen anzuwenden pflegt.

Anmerkung. Weil man weiß, daß

$$\frac{1}{tg}x = \int\frac{1}{1+x^2}\cdot dx, \quad \frac{1}{sin}x = \int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot dx,$$

$$log(1+x) = \int\frac{1}{1+x}\cdot dx, \text{ ꝛc. ꝛc.}$$

iſt, ſo hat man, wenn man die Integrale zur Rechten in dieſen Gleichungen, mittelſt unendlicher Reihen integrirt, und nachher die Konſtanten ſo beſtimmt, daß man unter allen Integralien jedesmal dasjenige hat, welches dem in dieſen Gleichungen links ſtehenden gleich iſt, ſogleich für $\frac{1}{tg}x$, $\frac{1}{sin}x$, $log(1+x)$, ꝛc. ꝛc. unendliche Reihen, ſo daß man ſich dieſes Verfahrens bedienen kann, um ſolche Funktionen von x in unendliche Reihen zu verwandeln *).

---

*) Es iſt z. B. $\frac{1}{1+x} = 1-x+x^2-x^3+x^4-$ ꝛc.,

alſo

$$\int\frac{1}{1+x}\cdot dx = C+x-\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{3}x^3-\tfrac{1}{4}x^4+\tfrac{1}{5}x^5-\text{ ꝛc. ꝛc.};$$

folglich $log(1+x) = C+x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{5}x^5-$ ꝛc. ꝛc., wo die Konſtante C noch zu beſtimmen bleibt. — Setzt man aber o ſtatt x, ſo erhält man

$$log\,1 = C,$$

und die Konſtante iſt beſtimmt.

# Anhang.

## Einiges über die Zerlegung der ächt gebrochenen Funktionen in ihre einfachen Parzial-Brüche.

1) Hat man irgend eine ächt gebrochene Funktion, z. B.

$$\frac{2x^2-1}{2x^4+5x^3+x^2-5x-3},$$

und soll solche in ihre einfachen Parzial-Brüche zerlegt werden, so beginnt man damit, daß man den Nenner (der hier von der 4ten Ordnung ist) in seine (4) einfachen Faktoren $(x+1)(x+1)(x-1)(2x+3)$ zu zerlegen sucht. — Dann schreibt man die einzelnen Parzial-Brüche

$$\frac{A}{2x+3}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x+1)^2}+\frac{D}{x+1}$$

hin, nämlich für jeden der ungleichen Faktoren des Nenners einen, — für den gleichen Faktor $x+1$ so viele, als oftmal dieser Faktor $x+1$ vorkommt, nämlich zwei, deren Nenner diesen gleichen Faktor, von der höchsten bis zur niedrigsten Potenz hin, enthalten. — Die (allemal von x unabhängigen, also nach x) konstanten Zähler A, B, C, D müssen nun noch dazu gefunden werden.

2) Nun findet sich aber der zum Parzial-Nenner $2x+3$ gehörige Parzial-Zähler A, wenn man in dem Zähler $2x^2-1$ der gegebenen Funktion, und in dem Produkt $(x+1)^2\cdot(x-1)$ der übrigen Faktoren des Nenners derselben gegebenen gebrochenen Funktion, statt x den Werth setzt, der diesen Parzial-Nenner $2x+3=0$ macht (so daß $x=-\frac{3}{2}$ wird), und diese beiden Resultate durch einander dividirt. Dies giebt

$$A=\frac{2\cdot\frac{9}{4}-1}{(-\frac{3}{2}+1)^2(-\frac{3}{2}-1)}=-\frac{56}{10}.$$

Eben so findet sich aber auch der zum Parzial-Nenner $x-1$ gehörige Parzial-Zähler B, genau nach derselben Regel, nämlich wenn man in dem Zähler $2x^2-1$ und in dem Produkt

$(2x+3)(x+1)^2$ der übrigen Faktoren des Nenners der gegebenen gebrochenen Funktion, statt x den Werth setzt, welcher den jetzigen Parzial-Nenner $x-1, = 0$ macht (so daß $x=1$ wird) und die Resultate durch einander dividirt. Dies giebt

$$B = \tfrac{1}{10}.$$

3) Was dagegen die Parzial-Zähler C, D betrifft, deren zugehörige Nenner die verschiedenen Potenzen des gleichen Faktors $x+1$ bilden, so wird der erstere C derselben, der die höchste Potenz des gleichen Faktors $(x+1)$ zum Nenner hat, noch genau nach derselben Regel (2.) gefunden. Es wird nämlich in dem Zähler $2x^2-1$ und in dem Produkt $(2x+3)(x-1)$ der übrigen Faktoren des Nenners der gegebenen gebrochenen Funktion, statt x der Werth gesetzt, welcher den jetzigen Parzial-Nenner $x+1, = 0$ macht (so daß $x=-1$ wird), und dann werden beide Resultate durch einander dividirt. — Dies giebt

$$C = -\tfrac{1}{2}.$$

Was dagegen den Zähler D des nächsten Parzial-Bruches betrifft, dessen zugehöriger Nenner die nächst niedrigere Potenz des gleichen Faktors ist, so muß man, um diesen zu bestimmen, den so eben gefundenen Parzial-Bruch $\frac{C}{(x+1)^2}$ oder $\frac{-\frac{1}{2}}{(x+1)^2}$ von dem gegebenen Bruch $\frac{2x^2-1}{(x+1)^2(x-1)(2x+3)}$ zuvor subtrahiren, und aus dem neuen Bruch (dessen Zähler und Nenner sich allemal mit dem gleichen Faktor $x+1$ wird aufheben lassen, so daß er die Form

$$\frac{3x-\frac{5}{2}}{(x+1)(x-1)(2x+3)}$$

annehmen muß) dann den Parzial-Bruch $\frac{D}{x+1}$ nach der Regel der (Nr. 2.) finden. — Dies giebt $D = \frac{11}{4}$, so daß man nun gefunden hat

$$\frac{2x^2-1}{2x^4+5x^3+x^2-5x-3} = \frac{-\frac{56}{10}}{2x+3} + \frac{\frac{1}{10}}{x-1} - \frac{\frac{1}{2}}{(x+1)^2} + \frac{\frac{11}{4}}{x+1}.$$

4) Hätte der Nenner der gegebenen gebrochenen Funk-

tion den Faktor $(x+1)^3$ gehabt, so hätte man 3 Partial-Brüche

$$\frac{C}{(x+1)^3}+\frac{D}{(x+1)^2}+\frac{E}{x+1}$$

dazu finden müssen. Den erstern $\frac{C}{(x+1)^3}$ findet man dann wieder genau nach der Regel (2.); den andern $\frac{D''}{(x+1)^2}$ dadurch, daß man den so eben gefundenen $\frac{C}{(x+1)^3}$ von der gegebenen gebrochenen Funktion zuvor subtrahirt (Zähler und Nenner mit $x+1$ aufhebt), und dann aus der übrig bleibenden gebrochenen Funktion diesen Partial-Bruch $\frac{D}{(x+1)^2}$ wiederum direkt nach der Regel (2.) findet. Ist dies geschehen, so muß dieser Partial-Bruch $\frac{D''}{(x+1)^2}$ von der letzterhaltenen gebrochenen Funktion, aus der er nach der Regel (2.) hervorgegangen ist, abermals subtrahirt werden, um dann aus der jetzt übrig bleibenden gebrochenen Funktion (nachdem sie wieder mit $x+1$ aufgehoben worden ist, so daß ihr Nenner immer einen der gleichen Faktoren $x+1$ weniger hat) den folgenden Partial-Bruch $\frac{E}{x+1}$ nach der Regel (2.) vollends zu finden.

5) Und obgleich dies alles nur beispielsweise hingestellt ist, so wird doch jeder Leser daraus das Verfahren bei jedem andern Beispiele abziehen können, besonders wenn wir hier noch mit wenigen Worten die Gründe dieses Verfahrens hinzufügen.

Ist nämlich $\frac{M_x}{N_x}$ die gegebene ächt gebrochene Funktion, — hat der Nenner $N_x$ den Faktor $ax+b$, — und ist $P_x$ das Produkt der übrigen Faktoren desselben Nenners $N_x$, so daß man

$$N_x=(ax+b)\cdot P_x$$

hat; — und setzt man nun

$$\frac{M_x}{N_x}=\frac{A}{ax+b}+\frac{Z_x}{P_x},$$

wo $\frac{Z_x}{P_x}$ die Summe aller übrigen Parzial-Brüche iſt, ſo folgt, wenn man aus dieſer Gleichung die Brüche wegſchafft,

$$M_x = A \cdot P_x + (ax+b) \cdot Z_x.$$

Setzt man nun hier ſtatt x den Werth, der $ax+b=0$ macht, ſetzt man alſo $-\frac{b}{a}$ ſtatt x, und ſind [M], [P], die Werthe, in welche $M_x$ und $P_x$ nun übergehen, ſo folgt aus dieſer Gleichung

$$[M] = A \cdot [P] \text{ oder } A = \frac{[M]}{[P]},$$

wodurch die Regel (a) außer Zweifel geſetzt iſt.

Käme aber der Faktor $ax+b$ mehreremale vor, ſo ſtäcke er auch noch in $P_x$, und dann würde $[P]=0$, und die Regel (2.) hörte alſo nun auf brauchbar zu ſeyn. Sollte daher der Faktor $ax+b$ etwa 3 mal vorkommen, ſo ſetze man, wenn $N_x = (ax+b)^3 \cdot Q_x$ geſetzt wird, ſo daß $Q_x$ das Produkt aller übrigen Faktoren des Nenners N iſt,

$$\frac{M_x}{N_x} = \frac{C}{(ax+b)^3} + \frac{D}{(ax+b)^2} + \frac{E}{a+bx} + \frac{R_x}{Q_x},$$

wo $\frac{R_x}{Q_x}$ die Summe aller übrigen Parzial-Brüche iſt. Schafft man hier die Brüche weg, ſo erhält man

$$M_x = C \cdot Q_x + (ax+b) \cdot D \cdot Q_x + (ax+b)^2 \cdot E \cdot Q_x + (ax+b)^3 \cdot R_x.$$

Wird hier $x = -\frac{b}{a}$ geſetzt, ſo daß $ax+b=0$ wird, ſo geht dieſe Gleichung über in

$$[M] = C \cdot [Q] \quad \text{oder} \quad C = \frac{[M]}{[Q]},$$

ſo daß alſo C genau nach der Regel (2.) gefunden wird.

Iſt C gefunden, und ſubtrahirt man $\frac{C}{(ax+b)^3}$ von $\frac{M_x}{N_x}$, ſo bleibt, wenn $\frac{M_x - C \cdot Q_x}{ax+b} = M'$ geſetzt wird, die Gleichung

$$M'_x = D \cdot Q_x + (ax+b) \cdot E \cdot Q_x + (ax+b)^2 \cdot R_x,$$

welche $[M'] = D \cdot [Q]$, alſo $D = \frac{[M']}{[Q]}$ liefert.

Iſt D gefunden, und berechnet man

$$\frac{M'_x - D \cdot Q_x}{ax+b} = M''_x,$$

ſo hat man noch die Gleichung

$\partial y_b$, $\partial y_a$ das bedeutet, was aus $\partial y_x$ wird, wenn man b oder a statt x setzt.

## §. 36.

Setzt man in der Gleichung (⊙) statt des unendlich-kleinen dx bloß ein sehr kleines ε, so daß die ganze Zahl n nicht unendlich-groß, sondern nur sehr groß gedacht ist (in so ferne man $\frac{b-a}{n} = \varepsilon$ hat), so ist noch immer genau

$$1) \quad \int_{b\div a} y \cdot dx = \varepsilon \cdot \Sigma y_{a+b\cdot\varepsilon} + \frac{\varepsilon^2}{2} \cdot \Sigma \partial y_{a+b\cdot\varepsilon} + \frac{\varepsilon^3}{6} \cdot \Sigma \partial^2 y_{a+b\cdot\varepsilon} + \cdots.$$

Läßt man aber hier $\varepsilon^2$, $\varepsilon^3$ außer Acht, so hat man näherungsweise nur

$$I. \quad \int_{b\div a} y \cdot dx = \varepsilon \cdot \Sigma y_{a+b\cdot\varepsilon}, \text{ wo } \varepsilon = \frac{b-a}{n} \text{ ist,}$$

und wo b nach und nach die Werthe 0, 1, 2, 3, 4, ⋯ n−1 annimmt.

Aber eben so genähert wahr ist, wenn man hier in (I.) $\partial y_x$ und $\partial^2 y_x$ statt y setzt

$$2) \quad y_b - y_a = \varepsilon \cdot \Sigma \partial y_{a+b\cdot\varepsilon}, \text{ und } \partial y_b - \partial y_a = \varepsilon \cdot \Sigma \partial^2 y_{a+b\cdot\varepsilon}.$$

Dadurch kann man aber das mit $\varepsilon^2$ affizirte Glied in (I.) auf $\frac{1}{2}\varepsilon \cdot (y_b - y_a)$ reduziren, so wie das mit $\varepsilon^3$ affizirte Glied in (I.) auf $\frac{1}{12}\varepsilon^2 \cdot (\partial y_b - \partial y_a)$. Substituirt man nun diese Werthe in (I.), und läßt man dann wieder alle mit $\varepsilon^2$ und höhern Potenzen von ε affizirten Glieder außer Acht, so hat man eine 2te Näherungs-Formel,

$$II. \quad \int_{b\div a} y \cdot dx = \varepsilon \cdot \left[ \Sigma y_{a+b\cdot\varepsilon} + \tfrac{1}{2}(y_b - y_a) \right].$$

Setzt man hier wieder $\partial y_x$, $\partial^2 y_x$ statt y, so erhält man immer nur genähert,

$$3) \quad y_b - y_a = \varepsilon \cdot \left[ \Sigma \partial y_{a+b\cdot\varepsilon} + \tfrac{1}{2}(\partial y_b - \partial y_a) \right],$$

$$4) \quad \partial y_b - \partial y_a = \varepsilon \cdot \left[ \Sigma \partial^2 y_{a+b\cdot\varepsilon} + \tfrac{1}{2}(\partial^2 y_b - \partial^2 y_a) \right].$$

# Höhere Analysis.

## Viertes Kapitel.

### Fortsetzung der Integral-Rechnung. Von den bestimmten Integralen.

### §. 34.

Wird in einem allgemeinen Integral, z. B. in

$$\int x^n \cdot dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,$$

die Konstante C so bestimmt, daß der Werth des Integrals Null wird, wenn man a statt x setzt, also z. B. wird

$$\int x^n \cdot dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

genommen, so sagt man: das Integral fange mit $x = a$ an, oder es sey von $x = a$ bis $x = x$ genommen, oder es sey zwischen den Grenzen $x = a$ und $x = x$ genommen.

Wird in einem solchen mit $x = a$ anfangenden (also besonderen) Integral (welches eine völlig bestimmte Funktion von x ist) statt x irgend ein bestimmter Werth b gesetzt (so daß man einen der Werthe dieser Funktion von x erhält, z. B. in dem obigen Integral den Werth $\frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}$), so sagt man: das Integral höre mit $x=b$ auf, oder es sey von $x=a$

bis $x=b$, oder zwischen den Grenzen $x=a$ und $x=b$ genommen.

Ist aber $\varphi_x$ irgend ein besonderes Integral von $y_x$ nach x, so ist

1) $\varphi_x+C$ das allgemeine Integral,

2) $\varphi_x-\varphi_a$ das mit $x=a$ anfangende Integral,

und

3) $\varphi_b-\varphi_a$ das Integral von $x=a$ bis $x=b$ genommen.

Diese verschiedenen Integrale und Werthe bezeichnen wir der Reihe nach durch

1) $\int y\cdot dx$, 2) $\int_{x\div a} y\cdot dx$ oder $\int_a^x y\cdot dx$

und 3) $\int_{b\div a} y\cdot dx$ oder $\int_a^b y\cdot dx$.

Das letztere $\int_{b\div a} y\cdot dx$ oder $\int_a^b y\cdot dx$ nennt man ein bestimmtes Integral (intégral définie).

## §. 35.

Ist $\varphi_x=\int y\cdot dx$, also $\int_{b\div a} y\cdot dx=\varphi_b-\varphi_a$,

und $\partial\varphi_x=y$, $\partial^2\varphi_x=\partial y_x$, $\partial^3\varphi_x=\partial^2 y_x$, u. s. f.

so hat man nach dem Taylor'schen Lehrsatze (vgl. §. 28.)

$$(\odot)\cdots\quad \varphi_{x+h}-\varphi_x=y_x\cdot h+\partial y_x\cdot\frac{h^2}{2!}+\partial^2 y_x\cdot\frac{h^3}{3!}+\cdots$$

Setzt man hier dx statt h, und nach und nach statt x die Werthe a, a+dx, a+2dx, a+3dx,··· zuletzt a+(n−1)dx, d. h. b−dx, wo b und a gegebene Werthe sind, $b>a$ ist, wo n ganz aber unendlich-groß, und wo endlich

$$dx=\frac{b-a}{n}$$

also unendlich-klein gedacht ist; und addirt man zuletzt alle diese Gleichungen, so erhält man, weil $\varphi_b-\varphi_a=\int_{b\div a} y\cdot dx$ ist,

$$(\mathfrak{C})\cdots \int_{b\div a} y\cdot dx =$$
$$\Sigma y_{a+b\cdot dx}\cdot dx + \frac{dx}{2!}\cdot\Sigma \partial y_{a+b\cdot dx}\cdot dx + \frac{dx^2}{3!}\cdot\Sigma\partial^2 y_{a+b\cdot dx}\cdot dx + \cdots,$$

wo $\Sigma$ die Summe aller der Glieder bedeutet, welche aus dem, hinter dem $\Sigma$ stehenden Gliede hervorgehen, wenn statt b nach und nach $0, 1, 2, 3, 4, \cdots n-1$ gesetzt wird. — Da aber dx unendlich-klein gedacht ist, so bleibt nach (§. 20. Nr. 12.) bloß die völlig genaue Gleichung

$$(\mathfrak{d})\cdots \qquad \int_{b\div a} y\cdot dx = \Sigma y_{a+b\cdot dx}\, dx,$$

wo $y_{a+b\cdot dx}$ alle stetig neben einander liegenden Werthe von $y_x$ vorstellt, welche zwischen $y_a$ und $y_b$ liegen, unter der Voraussetzung jedoch, daß keiner darunter die Form $\frac{1}{0}$ annimmt, sondern jeder einen völlig bestimmten, nicht unendlich-großen Werth hat *).

Setzt man hier in $(\mathfrak{d})$ statt y nach und nach $\partial y_x$, $\partial^2 y_x$, ꝛc., so hat man, weil

$$\int_{b\div a} \partial y_x\cdot dx = y_b - y_a,$$
$$\int_{b\div a} \partial^2 y_x\cdot dx = \partial y_b - \partial y_a, \text{ u. s. f. ist,}$$

noch die genauen Gleichungen

$$(\mathfrak{E})\cdots \qquad y_b - y_a = \Sigma \partial y_{a+b\cdot dx}\cdot dx,$$
$$(\mathfrak{Q})\cdots \qquad \partial y_b - \partial y_a = \Sigma \partial^2 y_{a+b\cdot dx}\cdot dx,$$

u. s. w. f., wo rechts $\partial y_{a+b\cdot dx}$, $\partial^2 y_{a+b\cdot dx}$, ꝛc. ꝛc. alle stetig neben einander liegenden Werthe von $\partial y_x$, $\partial^2 y_x$, ꝛc. vorstellen, wie sie für alle Werthe von x zwischen a und b sich ergeben, während

$\partial y_b$,

*) Dieser wichtige Satz, daß das zwischen den Grenzen $x = a$ und $x = b$ genommene Integral $\int y\cdot dx$, die Summe aller unendlich-vielen, unendlich-kleinen und unendlich-wenig von einander verschiedenen Produkte ist, die alle durch $y_x\cdot dx$ vorgestellt sind, hat zu dem Zeichen $\int$ Veranlassung gegeben, so daß dieses $\int$ als ein Summen-Zeichen angesehen werden kann.

$\partial y_b$, $\partial y_a$ das bedeutet, was aus $\partial y_x$ wird, wenn man b oder a statt x setzt.

## §. 36.

Setzt man in der Gleichung (⊙) statt des unendlich-kleinen dx bloß ein sehr kleines ε, so daß die ganze Zahl n nicht unendlich-groß, sondern nur sehr groß gedacht ist (in so ferne man $\frac{b-a}{n} = \varepsilon$ hat), so ist noch immer genau

1) $$\int_{b\div a} y\cdot dx = \varepsilon\cdot\Sigma y_{a+b\cdot\varepsilon} + \frac{\varepsilon^2}{2}\cdot\Sigma\partial y_{a+b\cdot\varepsilon} + \frac{\varepsilon^3}{6}\cdot\Sigma\partial^2 y_{a+b\cdot\varepsilon} + \cdots.$$

Läßt man aber hier $\varepsilon^2$, $\varepsilon^3$ außer Acht, so hat man näherungsweise nur

I. $$\int_{b\div a} y\cdot dx = \varepsilon\cdot\Sigma y_{a+b\cdot\varepsilon}, \text{ wo } \varepsilon = \frac{b-a}{n} \text{ ist,}$$

und wo b nach und nach die Werthe 0, 1, 2, 3, 4, ⋯ n−1 annimmt.

Aber eben so genähert wahr ist, wenn man hier in (I.) $\partial y_x$ und $\partial^2 y_x$ statt y setzt

2) $y_b - y_a = \varepsilon\cdot\Sigma\partial y_{a+b\cdot\varepsilon}$, und $\partial y_b - \partial y_a = \varepsilon\cdot\Sigma\partial^2 y_{a+b\cdot\varepsilon}$.

Dadurch kann man aber das mit $\varepsilon^2$ afficirte Glied in (I.) auf $\frac{1}{2}\varepsilon\cdot(y_b - y_a)$ reduziren, so wie das mit $\varepsilon^3$ affizirte Glied in (I.) auf $\frac{1}{6}\varepsilon^2\cdot(\partial y_b - \partial y_a)$. Substituirt man nun diese Werthe in (I.), und läßt man dann wieder alle mit $\varepsilon^2$ und höhern Potenzen von ε afficirten Glieder außer Acht, so hat man eine 2te Näherungs-Formel,

II. $$\int_{b\div a} y\cdot dx = \varepsilon\cdot\left[\Sigma y_{a+b\cdot\varepsilon} + \tfrac{1}{2}(y_b - y_a)\right].$$

Setzt man hier wieder $\partial y_x$, $\partial^2 y_x$ statt y, so erhält man immer nur genähert,

3) $$y_b - y_a = \varepsilon\cdot\left[\Sigma\partial y_{a+b\cdot\varepsilon} + \tfrac{1}{2}(\partial y_b - \partial y_a)\right],$$

4) $$\partial y_b - \partial y_a = \varepsilon\cdot\left[\Sigma\partial^2 y_{a+b\cdot\varepsilon} + \tfrac{1}{2}(\partial^2 y_b - \partial^2 y_a)\right].$$

Eliminirt man aber jetzt aus den Gleichungen (I. II. u. 4.) sowohl $\Sigma \partial y_{a+b\cdot\varepsilon}$ als auch $\Sigma \partial^2 y_{a+b\cdot\varepsilon}$, so ergiebt sich, wenn die mit $\varepsilon^2$ affizirten Glieder mitgezählt und nur die höheren Potenzen von $\varepsilon$ außer Acht gelassen werden, ein dritter genäherter Werth:

$$\text{III.} \quad \int_{a+a\varepsilon}^{b+a\varepsilon} y \cdot dx = \varepsilon \cdot \left[ \Sigma y_{a+b\cdot\varepsilon} + \tfrac{1}{2}(y_b - y_a) \right] - \tfrac{1}{12}\varepsilon^2 \cdot (\partial y_b - \partial y_a),$$

oder, weil dem b die n Werthe $0, 1, 2, 3, \cdots n-1$ gegeben werden müssen,

$$\int_{a+a\varepsilon}^{b+a\varepsilon} y \cdot dx =$$

$$\varepsilon \cdot \left[ \tfrac{1}{2} y_a + y_{a+\varepsilon} + y_{a+2\varepsilon} + y_{a+3\varepsilon} + \cdots + y_{b-\varepsilon} + \tfrac{1}{2} y_b \right] - \tfrac{1}{12}\varepsilon^2 \cdot (\partial y_b - \partial y_a),$$

wo vorausgesetzt wird, daß y und $\partial y_x$ für alle Werthe von x zwischen a und b bestimmte (und auch nicht unendlich-große) Werthe haben.

Nach diesen Näherungs-Formeln kann man nun bestimmte Integrale berechnen, wenn man auch die allgemeinen Integrale nicht hat. Sie sind desto genauer, je größer n, je kleiner also $\varepsilon$ genommen wird, und je weniger rasch die Werthe von $y_x$ in den Zwischenräume wachsen oder abnehmen. — In den meisten Fällen der Anwendung ist die Genauigkeit groß genug, wenn man auch das mit $\varepsilon^2$ affizirte Glied in (III.) weglässt, also bloß die (II.) nimmt. Und in diesem Falle bekommt man dann den Werth des bestimmten Integrals $\int y \cdot dx$ (genähert), auch wenn die Funktion $y_x$ selbst gar nicht gegeben seyn sollte, sondern nur diese $n+1$ Werthe $y_a, y_{a+\varepsilon}, y_{a+2\varepsilon} \cdots y_b$ derselben.

Anmerk. Man kann auch in der Gleichung (§. 35. ⊙) nach und nach statt h die verschiedenen Werthe

$$\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \cdots$$

und zu gleicher Zeit statt x nach und nach bezüglich die Werthe $a, a+\varepsilon, a+\varepsilon+\varepsilon_1, a+\varepsilon+\varepsilon_1+\varepsilon_2, a+\varepsilon+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3, \cdots$ setzen, (während man $\varepsilon+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_n = b-a$ nimmt) und zuletzt alle Gleichungen addiren, und es wird also wieder

genähert seyn (indem man alle mit den 2ten und höheren Potenzen von $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_n$ versehenen Glieder außer Acht läßt)

$$\int_{b \div a} y \cdot dx = y_a \cdot \varepsilon + y_{a+\varepsilon} \cdot \varepsilon_1 + y_{a+\varepsilon+\varepsilon_1} \cdot \varepsilon_2 + \cdots + y_{b-\varepsilon_n} \cdot \varepsilon_n.$$

## §. 37.

Da die Integral-Formeln des (§. 30.) bloß lehren, daß, wenn man zur Rechten des (=) Zeichens irgend besondere Integrale nimmt statt der allgemeinen, man irgend ein besonderes Integral habe, für das zur Linken angezeigte, — so fragt sich, ob jene Formeln gelten, wenn links und rechts lauter mit $x = a$ anfangende Integrale gesetzt werden. — Denkt man sich aber in den Gleichungen (1. 2. u. 3. des §. 30.) lauter mit $x = a$ anfangende Integrale, so können sie so geschrieben werden,

1) $$\int_{x \div a} A \cdot \varphi_x \cdot dx = A \int_{x \div a} \varphi_x \cdot dx;$$

2) $$\int_{x \div a} (\varphi_x + \psi_x) \cdot dx = \int_{x \div a} \varphi_x \cdot dx + \int_{x \div a} \psi_x \cdot dx;$$

3) $$\int_{x \div a} (\varphi_x \cdot \psi_x) \cdot dx =$$
$$\varphi_x \cdot \int_{x \div a} \psi_x \cdot dx - \int_{x \div a} \partial\varphi_x \cdot \left( \int_{x \div a} \psi_x \cdot dx \right) \cdot dx,$$

und da diese Gleichungen alle identisch $0 = 0$ werden, so oft $x = a$ gesetzt wird, so sind sie auch allgemein wahr.

Nimmt man aber statt $\int \psi \cdot dx$ nicht das mit $x = a$ anfangende Integral, sondern irgend ein anderes $\pi_x$, so daß also

$$\int \psi \cdot dx = \pi_x \quad \text{und} \quad \partial\pi_x = \psi_x$$

ist, so muß rechts in (3.) noch die Konstante $-\varphi_a \cdot \pi_a$ hinzugefügt werden, wenn die jetzige Gleichung

I. $$\int_{x \div a} (\varphi_x \cdot \psi_x) \cdot dx = (\varphi_x \cdot \pi_x - \varphi_a \cdot \pi_a) - \int_{x \div a} (\pi_x \cdot \partial\varphi_x) \cdot dx$$

wiederum für $x = a$ und daher auch für jeden andern Werth von $x$ richtig seyn soll.

Fängt endlich in der Gleichung (§. 30. Nr. 4.) das Integral nach z (zur Rechten) mit $z = a$ an, so muß das Inte-

gral (zur Linken) nach x, mit $x = \alpha$ anfangen, wo $\alpha$ den Werth von x vorstellt, welchen x als Funktion von z für $z = a$ annimmt, weil nur dann für $z = a$ die Gleichung selbst eine richtige (identisch) wird. Man hat also

$$\text{II.} \qquad \int_{x \div \alpha} \varphi_x \cdot dx = \int_{z \div a} (\varphi_x \cdot \partial x_z) \cdot dz,$$

sobald nur zwischen $\alpha$ und a dieselbe Gleichung statt findet, welche zwischen x und z vorausgesetzt worden ist.

## §. 38.

Ist f eine Funktion von x und y, so ist allemal, wenn $b, a, \beta$ und $\alpha$ von x und y unabhängig (konstant) sind,

$$\text{I.} \qquad \partial\left(\int_{b \div a} f \cdot dy\right)_x = \int_{b \div a} (\partial f_x) \cdot dy,$$

$$\text{II.} \qquad \int_{\beta \div \alpha}\left(\int_{b \div a} f \cdot dy\right) \cdot dx = \int_{b \div a}\left(\int_{\beta \div \alpha} f \cdot dx\right) \cdot dy,$$

d. h. „es ist einerlei, in welcher Ordnung man integrirt oder „differenziirt, sobald nur die Grenzen der Integrale nach denje„nigen Veränderlichen konstant sind, nach welchen das fernere „Differenziiren oder Integriren geschehen soll."

Sind aber die Grenzen b und a z. B. selbst noch Funktionen von x, so gelten beide Formeln nicht mehr; die (I.) dagegen geht dann in folgende über, nämlich in

$$\text{III.} \qquad \partial\left(\int_{b \div a} f \cdot dy\right)_x = \int_{b \div a} (\partial f_x) \cdot dy + f_b \cdot \partial b_x - f_a \cdot \partial a_x.$$

Denn es sey

$$1) \qquad \int_{b \div a} f \cdot dy = \varphi,$$

so ist, wenn man $x + h$ statt x schreibt,

$$2) \qquad \int_{b \div a} f_{x+h} \cdot dy = \psi_{x+h},$$

so lange b und a nach x konstant sind; dagegen

$$3) \qquad \int_{b_{x+h} \div a_{x+h}} f_{x+h} \cdot dy = \psi_{x+h},$$

wenn b und a noch Funktionen von x seyn sollten. Entwikkelt man diese Gleichungen links und rechts in Reihen nach h, und nimmt man links und rechts bloß die mit $h^1$ affizirten Glieder, so erhält man sogleich die Formeln (I. und III.).

Um die (II.) zu erweisen, setze man

$$\int f\cdot dy = \psi_{x,y} \quad \text{und} \quad \int \psi\cdot dx = \varphi_{x,y},$$

so daß man hat

$$\partial\varphi_x = \psi, \quad \text{und} \quad \partial\psi_y = f,$$

d. h. 4) $f = \partial(\partial\varphi_x)_y$ und daher auch 5) $f = \partial(\partial\varphi_y)_x$.

Nun folgt aus (4.)

6) $$\int_{b\div a} f\cdot dy = \partial(\varphi_{x,b})_x - \partial(\varphi_{x,a})_x,$$

also

7) $$\int_{\beta\div\alpha}\left(\int_{b\div a} f\cdot dy\right)\cdot dx = \varphi_{\beta,b} - \varphi_{\alpha,b} - \varphi_{\beta,a} + \varphi_{\alpha,a}.$$

Die Gleichung (5.) dagegen giebt

8) $$\int_{\beta\div\alpha} f\cdot dx = \partial(\varphi_{\beta,y})_y - \partial(\varphi_{\alpha,y})_y$$

und

9) $$\int_{b\div a}\left(\int_{\beta\div\alpha} f\cdot dx\right)\cdot dy = \varphi_{\beta,b} - \varphi_{\beta,a} - \varphi_{\alpha,b} + \varphi_{\alpha,a}.$$

Da nun die Ausdrücke rechts in (7. u. 9.) dieselben sind, so sind auch die Ausdrücke zur Linken einander gleich, und dies ist die Formel (II.).

Man sieht zugleich, daß die aus (6.) gefolgerte Gleichung (7.) unrichtig seyn würde, wenn b und a selbst noch Funktionen von x wären, daß daher dieser Beweis der Formel (II.) nur bindend ist, wenn b und a von x, und $\beta$ und $\alpha$ von y ganz und völlig unabhängig (konstant) sind. — (Vgl. II. Th. §§. 73 seqq.)

## §. 39.

Für mehrere Funktionen, deren allgemeines Integral nur in Form von unendlichen Reihen gefunden werden kann, hat man doch bestimmte Integrale zwischen bestimmten Grenzwerthen des Veränderlichen, namentlich zwischen den Grenzen 0 und 1, 0 und $\pi$, 0 und $\frac{1}{2}\pi$, 0 und $\infty$, $-\infty$ und $+\infty$, u. s. w. s. hinzustellen sich bemüht.

Folgende Resultate mögen hier Platz finden:

1) $$\int_{a\div 0} \frac{x^{2r}}{\sqrt{a^2-x^2}}\cdot dx = \frac{1^{r|2}}{2^{r|2}}\cdot\frac{\pi\cdot a^{2r}}{2}$$ *), wo $\pi = 3{,}14159\cdots$;

*) Wir schreiben immer $a^{m|d}$, um das Produkt

$$a(a+d)(a+2d)(a+3d)\cdots(a+(m-1)d)$$

aus m Faktoren, von denen der erste a ist, jeder folgende aber um d größer wird, zu bezeichnen. Wir verstehen dann unter $a^{1|d}$ jedesmal a selbst, so wie $a^{0|d}$ die Bedeutung 1 hat, was auch a und d seyn mögen.

2) $\int_{a\div 0} \frac{x^{2r+1}}{\sqrt{a^2-x^2}} \cdot dx = \frac{2^{r!2}}{3^{r!2}} \cdot a^{2r+1}$;

3) $\int_{a\div 0} x^{2r} \cdot \sqrt{a^2-x^2} \cdot dx = \frac{1^{r!2}}{4^{r!2}} \cdot \frac{a^{2r+2}}{4} \cdot \pi$;

4) $\int_{a\div 0} x^{2r+1} \cdot \sqrt{a^2-x^2} \cdot dx = \frac{2^{r!2}}{5^{r!2}} \cdot \frac{a^{2r+3}}{3}$.

Für den Fall, daß n eine ungerade positive ganze Zahl ist, findet sich noch

5) $\int_{a\div 0} (\sqrt{a^2-x^2})^n \cdot dx = \frac{1^{\frac{n+1}{2}!2}}{2^{\frac{n+1}{2}!2}} \cdot \frac{a^{n+1}}{2} \cdot \pi$;

6) $\int_{a\div 0} x^{2r} \cdot (\sqrt{a^2-x^2})^n \cdot dx =$

$$\frac{1^{r!2}}{(n+3)^{r!2}} \cdot a^{2r} \times \int_{a\div 0} (\sqrt{a^2-x^2})^n \cdot dx;$$

7) $\int_{a\div 0} x^{2r+1} \cdot (\sqrt{a^2-x^2})^n \cdot dx = \frac{2^{n!2}}{(n+4)^{r!2}} \cdot \frac{a^{n+2r+2}}{n+2}$.

Ferner, wenn m, n positiv ganz und zugleich $m-1<n$ ist:

8) $\int_{1\div 0} \frac{x^{m-1}}{1+x^n} \cdot dx = \frac{\pi}{n \cdot \sin\frac{m\pi}{n}}$;

9) $\int_{1\div 0} \frac{x^{m-1}}{(1-x^n)^{\frac{m}{n}}} \cdot dx = \int_0^1 x^{n-m-1} \cdot (1-x^n)^{\frac{m-n}{n}}$

$$= \frac{\pi}{n \cdot \sin\frac{m\pi}{n}};$$

10) $\int_{1\div 0} \frac{1}{\sqrt{\log\frac{1}{x}}} \cdot dx = \sqrt{\pi}$,

11) $\int_{1\div 0} \left(\log\frac{1}{x}\right)^{\frac{2n+1}{2}} \cdot dx = \frac{1^{n!1}}{2^{n+1}} \cdot \sqrt{\pi}$.

} (Euler)

wo $[\partial^n f_x]_{\partial x}$ einen Werth bedeutet, der zwischen dem größten und kleinsten der Werthe liegt, welche $\partial^n f_x$ annimmt, wenn statt x alle stetig neben einander liegenden Werthe zwischen 0 und x gesetzt werden; wo also $[\partial^n f_x]_{\partial x}$ den Werth von $\partial^n f_x$ bedeutet, welcher erhalten wird, wenn man $\partial x$ statt x setzt, wo $\partial$ unbekannt ist, aber zwischen 0 und 1 liegt.

Ferner findet man

$$\text{II. } f_{x+h} = f_x + \partial f_x \cdot h + \partial^2 f_x \cdot \frac{h^2}{2!} + \cdots + \partial^{n-1} f_x \cdot \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!} \cdot [\partial^n f_x]_{x+\partial h},$$

wo $[\partial^n f_x]_{x+\partial h}$ einen der Werthe bedeutet, welcher für $\partial^n f_x$ erhalten werden, wenn man statt x alle Werthe zwischen x und x+h setzt, so daß also wieder $[\partial^n f_x]_{x+\partial h}$ den Werth vorstellt, welchen $\partial^n f_x$ annimmt, wenn $x+\partial h$ statt x gesetzt wird, während $\partial$ unbekannt ist, aber nothwendig zwischen 0 und 1 liegt.

Um dies zu finden, nehme man von dem allgemeinen Maclaurinschen Lehrsatze (§. 19. II.) nur die n ersten Glieder, bezeichne die Summe aller übrigen Glieder durch $E_x$ und suche nun dieses $E_x$ aus dieser Gleichung zu finden. Differenziirt man aber diese Gleichung

$$1) \quad E_x = f_x - f_\alpha - \partial f_\alpha \cdot (x-\alpha) \cdots - \partial^{n-1} f_\alpha \cdot \frac{(x-\alpha)^{n-1}}{(n-1)!}$$

n mal hinter einander nach x, so erhält man nach und nach $\partial E_x$, $\partial^2 E_x$, $\partial^3 E_x$, ... zuletzt $\partial^{n-1} E_x$, alle so, daß diese Ausdrücke, wie $E_x$ selbst, für $x = \alpha$ der Null gleich werden. Und ganz zuletzt findet sich

$$2) \quad \partial^n E_x = \partial^n f_x.$$

Integrirt man also $\partial^n f_x$ n mal hinter einander und so, daß jedes neue Integral mit $x = \alpha$ anfängt, so bekommt man nach und nach wieder $\partial^{n-1} E_x$, $\partial^{n-2} E_x$ u. s. w. f. und zuletzt auch $E_x$. — Man wird aber diese Integration auf zweifache Weise vornehmen müssen; einmal wird man genau zur Gleichung (1.) zurückgeführt werden, von welcher man ausgegangen ist; und durch eine zweite Integration in neuer Form, wird man einen zweiten neuen Ausdruck für $E_x$ erhalten.

Nun ist aber, wenn man theilweise integrirt,

$$3) \quad \int (1 \cdot \int \varphi_x \cdot dx) \cdot dx = x \cdot \int \varphi_x \cdot dx - \int (x \cdot \varphi) \cdot dx;$$

und wenn man hier links und rechts noch einmal die Integrale nimmt, rechts aber theilweise integrirt, und namentlich da, wo doppelte Integral-

23) $\int_0^\infty e^{-ax} \cdot \cos bx \cdot dx = \frac{a}{a^2+b^2}$;

24) $\int_0^\infty e^{-ax} \cdot \sin bx \cdot dx = \frac{b}{a^2+b^2}$.

Und wenn a, b, c positiv sind:

25) $\int_0^\infty \frac{e^{-cx}-e^{-ax}}{x} \cdot dx = \log\left(\frac{a}{c}\right)$;

26) $\int_0^\infty \frac{e^{-cx}-e^{-ax}}{x} \cdot \cos bx \cdot dx = \frac{1}{2}\log\left(\frac{a^2+b^2}{c^2+b^2}\right)$;

27) $\int_0^\infty \frac{e^{-cx}-e^{-ax}}{x} \cdot \sin bx \cdot dx = \frac{1}{tg}\frac{a}{b} - \frac{1}{tg}\frac{c}{b}$;

28) $\int_0^\infty \frac{\sin bx}{x} \cdot dx = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \cdot dx = \frac{\pi}{2}$;

29) $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\sin x)^{2n} \cdot dx = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\cos x)^{2n} \cdot dx = \frac{1^{n|2}}{2^{n|2}} \cdot \frac{\pi}{2}$;

30) $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\sin x)^{2n+1} \cdot dx = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\cos x)^{2n+1} \cdot dx = \frac{2^{n|2}}{3^{n|2}}$.

Daß man solcher Resultate noch unendlich viele finden und hinstellen kann, versteht sich von selbst. — Die einen dieser Resultate finden sich aber durch allgemeine Integration, besonders aus der Anwendung der Reduktions-Formeln (welche in der Regel durch fortgesetzte theilweise Integration erhalten werden). Die anderen finden sich, indem man das allgemeine Integral in unendlichen Reihen ausdrückt, deren Glieder für den einen Grenzwerth sich summiren lassen, für den andern verschwinden. — Mehrere dieser Resultate sind besondere Fälle von anderen, gehen also aus jenen unmittelbar hervor. — Wiederum andere ergeben sich aus schon gefundenen dadurch, daß man letztere nach einem in ihnen noch vorkommenden Konstanten a, oder b, ꝛc. einmal oder mehrere mal differenziirt. Jedesmal kann man aber die neuen Resultate auf's neue mit einander verbinden.

## §. 40.

Wir fügen hier noch einige allgemeine Bemerkungen bei:

1) Ein bestimmtes Integral zwischen den Grenzen a und b wird gefunden, wenn man zwischen a und b beliebig viel beliebige Zwischen-Werthe, z. B. c, c′ und c″ sich denkt; nun dasselbe Integral zwischen den Grenzen a und c, dann zwischen

ben kann, den größten und kleinsten Werth von $\partial^n f_x$ vorstellen, unter allen Werthen, welche dieser letztere Differenzial-Koeffizient annimmt, zwischen $x = \alpha$ und $x = x$.

Weil aber

$$\int (x-z)^{n-1} \cdot dz = -\frac{(x-z)^n}{n} + C,$$

also $$\int_{x-\alpha} (x-z)^{n-1} \cdot dz = \frac{(x-\alpha)^n}{n}$$

ist, so reduziren sich die obigen Grenzen (9.), zwischen denen das Ergänzungs-Glied $E_x$ liegt, auf diese:

10) $$[\partial^n f_x]_g \cdot \frac{(x-\alpha)^n}{n!} \text{ und } [\partial^n f_x]_k \cdot \frac{(x-\alpha)^n}{n!};$$

und dadurch sind die beiden Sätze dieses (§.) außer Zweifel gesetzt, weil der erstere aus der hiesigen Gleichung hervorgeht, wenn man statt $x$ jetzt $\alpha + h$, statt $\alpha$ aber zuletzt wieder $x$ schreibt; während der zweite Satz aus dem hier bewiesenen ohne weiteres hervorgeht, wenn man bloß 0 statt $\alpha$ schreibt.

Diese von Lagrange gegebenen Grenzen der Taylor'schen und der Maclaurin'schen Reihe sind aber für die Analysis und ihre Anwendung von unberechenbarer Wichtigkeit.

wie solches aus dem Satze (§. 37. II.) hervorgeht, wenn $x \pm a = z$, oder $ax = z$ gesetzt wird.

5) Wenn in dem Integral

$$\int_a^b \varphi \cdot \psi \cdot dx$$

der Faktor $\psi$ für alle Werthe von x zwischen a und b immer positiv bleibt, und $\varphi_g$, $\varphi_k$ bezüglich den größten und kleinsten Werth vorstellen, welchen $\varphi$ für alle Werthe von x zwischen a und b annehmen kann, so ist der Werth des bestimmten Integrals

$$\int_a^b \varphi \cdot \psi \cdot dx$$

allemal kleiner als

$$\varphi_g \cdot \int_a^b \psi \cdot dx,$$

und doch immer größer als

$$\varphi_k \cdot \int_a^b \psi \cdot dx;$$

und zwar deshalb, weil für jeden Werth c zwischen a und b, nach der Voraussetzung,

$$\varphi_g \cdot \psi_c > \varphi_c \cdot \psi_c \text{ und } \varphi_k \cdot \psi_c < \varphi_c \cdot \psi_c$$

ist, während nach (§. 35. ♂.) die in Rede stehenden Integrale und Integral-Ausdrücke die Summe dieser Produkte für alle c zwischen a und b, noch mit dx multiplizirt, vorstellen.

## §. 41.

Nun ist man auch in den Stand gesetzt, bei dem Taylor'schen und Maclaurin'schen Lehrsatz die Grenzen festzusetzen, zwischen denen die Summe aller übrigen Glieder liegen muß, wenn die Reihen bei irgend einem Gliede abgebrochen werden.

Man findet nämlich nun:

I. $$f_x = [f_x]_0 + [\partial f_x]_0 \cdot x + [\partial^2 f_x]_0 \cdot \frac{x^2}{2!} + \cdots + [\partial^{n-1} f_x]_0 \cdot \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!} \cdot [\partial^n f_x]_{\geq x},$$

wo $[\partial^n f_x]_{\partial x}$ einen Werth bedeutet, der zwischen dem größten und kleinsten der Werthe liegt, welche $\partial^n f_x$ annimmt, wenn statt x alle stetig neben einander liegenden Werthe zwischen 0 und x gesetzt werden; wo also $[\partial^n f_x]_{\partial x}$ den Werth von $\partial^n f_x$ bedeutet, welcher erhalten wird, wenn man $\partial x$ statt x setzt, wo $\partial$ unbekannt ist, aber zwischen 0 und 1 liegt.

Ferner findet man

$$\text{II.}\quad f_{x+h} = f_x + \partial f_x \cdot h + \partial^2 f_x \cdot \frac{h^2}{2!} + \cdots + \partial^{n-1} f_x \cdot \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!} \cdot [\partial^n f_x]_{x+\partial h},$$

wo $[\partial^n f_x]_{x+\partial h}$ einen der Werthe bedeutet, welcher für $\partial^n f_x$ erhalten werden, wenn man statt x alle Werthe zwischen x und x+h setzt, so daß also wieder $[\partial^n f_x]_{x+\partial h}$ den Werth vorstellt, welchen $\partial^n f_x$ annimmt, wenn $x+\partial h$ statt x gesetzt wird, während $\partial$ unbekannt ist, aber nothwendig zwischen 0 und 1 liegt.

Um dies zu finden, nehme man von dem allgemeinen Maclaurinschen Lehrsatze (§. 19. II.) nur die n ersten Glieder, bezeichne die Summe aller übrigen Glieder durch $E_x$ und suche nun dieses $E_x$ aus dieser Gleichung zu finden. Differenziirt man aber diese Gleichung

$$1)\quad E_x = f_x - f_\alpha - \partial f_\alpha \cdot (x-\alpha) \cdots - \partial^{n-1} f_\alpha \cdot \frac{(x-\alpha)^{n-1}}{(n-1)!}$$

n mal hinter einander nach x, so erhält man nach und nach $\partial E_x$, $\partial^2 E_x$, $\partial^3 E_x$, ⋯ zuletzt $\partial^{n-1} E_x$, alle so, daß diese Ausdrücke, wie $E_x$ selbst, für $x = \alpha$ der Null gleich werden. Und ganz zuletzt findet sich

$$2)\quad \partial^n E_x = \partial^n f_x.$$

Integrirt man also $\partial^n f_x$ n mal hinter einander und so, daß jedes neue Integral mit $x = \alpha$ anfängt, so bekommt man nach und nach wieder $\partial^{n-1} E_x$, $\partial^{n-2} E_x$ u. s. w. f. und zuletzt auch $E_x$. — Man wird aber diese Integration auf zweifache Weise vornehmen müssen; einmal wird man genau zur Gleichung (1.) zurückgeführt werden, von welcher man ausgegangen ist; und durch eine zweite Integration in neuer Form, wird man einen zweiten neuen Ausdruck für $E_x$ erhalten.

Nun ist aber, wenn man theilweise integrirt,

$$3)\quad \int(1 \cdot \int \varphi_x \cdot dx) \cdot dx = x \cdot \int \varphi_x \cdot dx - \int (x \cdot \varphi) \cdot dx;$$

und wenn man hier links und rechts noch einmal die Integrale nimmt, rechts aber theilweise integrirt, und namentlich da, wo doppelte Integral-

zeichen erscheinen, zugleich (nach 3.) so theilweise integrirt, daß nur einfache Integrale entstehen, so erhält man

$$4)\quad \int\Big(\int\Big(\int \varphi_x\cdot dx\Big)\cdot dx\Big)\cdot dx = \frac{x^2}{2}\cdot\int\varphi_x\cdot dx - x\cdot\int x\cdot\varphi_x\cdot dx + \tfrac{1}{2}\int x^2\cdot\varphi_x\cdot dx.$$

Fährt man aber so fort, so erhält man zuletzt als Resultat der nfach hinter einander fortgesetzten Integration von $\varphi_x$, die Reihe von einfachen Integralen

$$5)\quad \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\cdot\int\varphi_x\cdot dx - \frac{x^{n-2}}{(n-2)!}\cdot\int x\cdot\varphi_x\cdot dx + \frac{x^{n-3}}{(n-3)!}\cdot\int\frac{x^2}{2}\cdot\varphi_x\cdot dx - \cdots \pm\int\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\cdot\varphi_x\cdot dx.$$

Nun kann man aber bei einem bestimmten Integral statt des Veränderlichen x jeden andern Buchstaben, z. B. z setzen, so daß man hat

$$\int_{x\div\alpha} x^n\cdot\varphi_x\cdot dx = \int_{x\div\alpha} z^n\cdot\varphi_z\cdot dz,$$

und deshalb auch wieder

$$x^b\cdot\int_{x\div\alpha} x^n\cdot\varphi_x\cdot dx = x^b\cdot\int_{x\div\alpha} z^n\cdot\varphi_z\cdot dz = \int_{x\div\alpha} x^b\cdot z^n\cdot\varphi_z\cdot dz.$$

Thut man dies, so nimmt die Reihe in (4.) zur Rechten die Form

$$6)\quad \tfrac{1}{2}\int_{x\div\alpha}(x^2\cdot\varphi_z + 2xz\cdot\varphi_z + z^2\cdot\varphi_z)\cdot dz \text{ oder } \tfrac{1}{2}\int_{x\div\alpha}(x-z)^2\cdot\varphi_z\cdot dz,$$

und die Reihe in (5.) diese Form

$$7)\quad \frac{1}{(n-1)!}\cdot\int_{x\div\alpha}(x-z)^{n-1}\cdot\varphi_z\cdot dz$$

an. Das Ergänzungs-Glied $E_x$, welches man durch nfach wiederholte Integration von $\partial^n f_x$ erhält, unter der Voraussetzung, daß jedes Integral mit $x=\alpha$ anfängt, ist daher durch ein einfaches Integral ausgedrückt, nämlich

$$8)\quad E_x = \frac{1}{(n-1)!}\cdot\int_{x\div\alpha}(x-z)^{n-1}\cdot\partial^n f_z\cdot dz.$$

Dieses Ergänzungs-Glied $E_x$ liegt daher, weil $(x-z)^{n-1}$ für alle Werthe von z zwischen $z=\alpha$ und $z=x$ immerfort das $(\pm)$ Zeichen des x behalten, also für positive Werthe von x immer positiv sind (für einen negativen Werth von x aber immer fort negativ, wo man dann $-E_x$ betrachten kann) (nach §. 40. Nr. 5.) zwischen den Grenzen

$$9)\quad \frac{1}{(n-1)!}[\partial^n f_z]_g\cdot\int_{x\div\alpha}(x-z)^{n-1}\cdot dz$$

und

$$\frac{1}{(n-1)!}[\partial^n f_z]_k\cdot\int_{x\div\alpha}(x-z)^{n-1}\cdot dz,$$

wenn $[\partial^n f_z]_g$ und $[\partial^n f_z]_k$, wofür man auch $[\partial^n f_x]_g$ und $[\partial^n f_x]_k$ schrei-

$$= \frac{\partial y_x}{y} + xy + \frac{b^x}{\log b} + c,$$

d. h. diese letztere Funktion giebt, wenn man sie nach allem x differenziirt, zum Differenzial-Koeffizienten genau die vorstehende, während unter y nicht eine bestimmte, sondern jede beliebige Funktion von x gedacht worden ist.

## §. 44.

Ist die zu integrirende Differenzial-Funktion selber noch, zwar der Form nach bestimmt, aber im Uebrigen unbestimmt, so kann man zuletzt (wie in dem vorigen Beispiel die Gleichung $a = 1$) allgemeine Gleichungen bekommen, welche den Namen „Bedingungs-Gleichungen der Integrabilität" führen. — Sind diese Gleichungen erfüllt, so ist das Integral in dem Sinne des (§. 43.) möglich; — außerdem nicht.

Versucht man es und integrirt man die Differenzial-Funktion

I. $$M_{x,y} + N_{x,y} \cdot \partial y_x$$

auf dem im (§. 43.) vorgezeichneten Wege, so erhält man als Bedingungs-Gleichung der Integrabilität die Gleichung

($\delta$) ... $$\partial M_y = \partial N_x$$ *).

---

*) Ist das gesuchte Integral von $M + N \cdot \partial y_x$ durch $f_{x,y}$ ausgedrückt, so ist also

$$\partial f_x + \partial f_y \cdot \partial y_x = M + N \cdot \partial y_x,$$

d. h. $$\partial f_x = M \text{ und } \partial f_y = N.$$

Differenziirt man nun die erste dieser Gleichungen nach y, die andere nach x, so erhält man

$$\partial^{1,1} f_{x,y} = \partial M_y \text{ und } \partial^{1,1} f_{x,y} = \partial N_x;$$

daher schon deshalb, wenn f existirt, auch $\partial M_y = \partial N_x$ seyn muß. — Ob aber, wenn die Gleichung $\partial M_y = \partial N_x$ existirt, auch eine Funktion $f_{x,y}$ als Integral von $M + N \cdot \partial y_x$ existiren werde, geht aus dieser so eben angestellten Betrachtung nicht, wohl aber aus dem oben bezeichneten Verfahren hervor. Nach diesem Verfahren sucht man nämlich das Integral f aus der Gleichung

$$\partial f_x + \partial f_y \cdot \partial y_x = M + N \cdot \partial y_x,$$

so daß man hat

$$\partial f_y = N, \text{ also } f = \int N \cdot dy + C_x,$$

# Höhere Analysis.

## Fünftes Kapitel.

### Fortsetzung der Integral-Rechnung. Integration der Differenzial-Funktionen und der Differenzial-Gleichungen.

§. 42.

Enthält ein Ausdruck f nicht bloß x und y, sondern auch noch einen oder mehrere der Differenzial-Koeffizienten $\partial y_x$, $\partial^2 y_x$, $\partial^3 y_x$, ꝛc. ꝛc., so heißt er, wenn y als eine völlig willkührliche Funktion von x gedacht wird, eine Differenzial-Funktion. Wenn man sich aber unter y gerade diejenige Funktion von x denkt, welche, wenn zu gleicher Zeit statt $\partial y_x$, $\partial^2 y_x$, $\partial^3 y_x$, ꝛc. die zugehörigen Funktionen von x gesetzt werden, den Ausdruck f zu Null macht, so daß man, um dieses auszudrücken, $f = 0$ schreiben kann, so hat man eine Differenzial-Gleichung (vgl. §. 15.). — Beide, Differenzial-Funktion und Differenzial-Gleichung, werden nach dem höchsten der Differenzial-Koeffizienten, die sie enthalten, in Ordnungen klassifizirt; und können eine unbekannte Funktion $y_x$, oder mehrere solche Unbekannte $z_x$, $v_x$, ꝛc. ꝛc., und deren Differenzial-Koeffizienten enthalten.

§. 43.

Eine Differenzial-Funktion, z. B. der zweiten Ordnung, wie etwa $\frac{1}{y} \cdot \partial^2 y_x - \frac{1}{y^2} \cdot \partial y_x^2 + x \cdot \partial y_x + ay + b^x$ oder $\varphi$, heißt in-

Für dieses Beispiel ist der integrirende Faktor $\varphi$ gegeben durch die Gleichung (1.), welche auch in der Form

2) $\varphi \cdot (\partial M_y - \partial N_x) + \partial\varphi_y \cdot M - \partial\varphi_x \cdot N = 0$

geschrieben werden kann.

Weil aber diese Gleichung (2.), aus welcher der integrirende Faktor $\varphi$ gefunden werden soll, selbst eine Differenzial-Gleichung ist, und noch dazu (nach §. 15.) eine Parzial-Gleichung, so wird sie bei dem praktischen Integriren doch sehr selten benützt werden können, um diesen integrirenden Faktor $\varphi$ zu finden.

Gewöhnlicher findet man daher einen solchen integrirenden Faktor $\varphi$ bloß durch Versuche, oder zwar aus der Gleichung (2.) (für unser Beispiel), indem man jedoch $\varphi$ von bestimmter Form voraussetzt, etwa als bloße Funktion von x allein, oder als bloße Funktion von y allein, u. dgl., und zusieht, ob nicht dieser Gleichung (2.) unter dieser Voraussetzung irgend wie genügt werden kann.

So z. B. genügt $y + x \cdot \partial y_x$ der Bedingungs-Gleichung (§. 44. ♂) der Integrabilität, und das Integral von $y + x \cdot \partial y_x$ ist $x \cdot y$. — Nimmt man jedoch $y - x \cdot \partial y_x$, so genügt diese Funktion derselben Bedingungs-Gleichung der Integrabilität nicht. Multiplizirt man aber diese Funktion mit $\frac{1}{x \cdot y}$, so daß man $\frac{1}{xy} \cdot (y - x \cdot \partial y_x)$ oder $\frac{1}{x} - \frac{\partial y_x}{y}$ erhält, so ist diese neue Funktion integrabel, und giebt zum Integral $\log x - \log y$.

## §. 46.

Findet man aus einer Differenzial-Gleichung, z. B. aus der Gleichung

1) $y \cdot \partial^2 y_x - \partial y_x^2 - x \cdot \partial y_x + y = 0$,

eine Differenzial-Gleichung der nächst niedrigern Ordnung z. B. die Gleichung

2) $\partial y_x + x - c \cdot y = 0$

mit einer willkührlichen, in der Gleichung (1.) nicht vorkommen-

6) $\partial f_x = \partial C_x$ und $\partial f_y = -\frac{1}{y^2} \cdot \partial y_x + \partial C_y$.

Die (5.) wird daher jetzt, wenn man diese Werthe von $\partial f_x$ und $\partial f_y$ substituirt, übergehen in

7) $\partial C_x + \partial C_y \cdot \partial y_x = x \cdot \partial y_x + ay + b^x$;

und aus dieser Gleichung muß nun C bestimmt werden.

Weil jedoch diese Gleichung noch für jede Funktion y von x gelten soll, so muß man wiederum die Koeffizienten von $\partial y_x$ links und rechts einander gleich setzen, so daß man bekommt

8) $\partial C_y = x$, also $C = \int x \cdot dy = x \cdot \int 1 \cdot dy = xy + C'$,

wo C' nach y konstant ist, also nur noch x enthalten kann.

Substituirt man aber diesen Werth statt C in die (7.), so erhält man zur Bestimmung von C' noch die Gleichung

9) $\partial C'_x = (a-1) \cdot y + b^x$,

welche Gleichung, da C', also auch $\partial C'_x$ kein y enthalten darf, einen Widerspruch anzeigt, wenn nicht $a-1=0$, also wenn nicht $a=1$ ist; und welche, wenn $a=1$ seyn sollte, sogleich noch

10) $C' = \int b^x \cdot dx = \frac{b^x}{\log b} + c$

liefert, wo c weder y', noch y, noch x enthalten darf, übrigens aber ganz willkührlich und unbestimmt bleibt.

Hieraus geht Folgendes hervor:

1) Die Aufgabe: „eine gegebene Differenzial-Funktion zu integriren" ist nicht immer möglich, und in dem vorliegenden Beispiel nur möglich, wenn $a=1$ seyn sollte.

2) Ist aber die Aufgabe selbst möglich, so erfordert ihre Lösung, wie dieses Beispiel zeigt, bloß wiederholte Integrationen, z. B. nach y', nach y, und nach x, letztere als eben so viele von einander unabhängige Veränderliche angesehen. Diese Integrationen hat aber das dritte Kapitel zu behandeln gelehrt.

Namentlich hat sich hiernach gefunden das Integral von

$\frac{y \cdot \partial^2 y_x - \partial y_x^2 + xy^2 \cdot \partial y_x + y^3 + y^2 \cdot b^x}{y^2}$ nach allem x,

=

$$= \frac{\partial y_x}{y} + xy + \frac{b^x}{\log b} + c,$$

d. h. diese letztere Funktion giebt, wenn man sie nach allem x differenziirt, zum Differenzial-Koeffizienten genau die vorstehende, während unter y nicht eine bestimmte, sondern jede beliebige Funktion von x gedacht worden ist.

## §. 44.

Ist die zu integrirende Differenzial-Funktion selber noch, zwar der Form nach bestimmt, aber im Uebrigen unbestimmt, so kann man zuletzt (wie in dem vorigen Beispiel die Gleichung $a = 1$) allgemeine Gleichungen bekommen, welche den Namen „Bedingungs-Gleichungen der Integrabilität" führen. — Sind diese Gleichungen erfüllt, so ist das Integral in dem Sinne des (§. 43.) möglich; — außerdem nicht.

Versucht man es und integrirt man die Differenzial-Funktion

I. $$M_{x,y} + N_{x,y} \cdot \partial y_x$$

auf dem im (§. 43.) vorgezeichneten Wege, so erhält man als Bedingungs-Gleichung der Integrabilität die Gleichung

(♂)··· $$\partial M_y = \partial N_x$$ *).

---

*) Ist das gesuchte Integral von $M + N \cdot \partial y_x$ durch $f_{x,y}$ ausgedrückt, so ist also

$$\partial f_x + \partial f_y \cdot \partial y_x = M + N \cdot \partial y_x,$$

d. h. $$\partial f_x = M \quad \text{und} \quad \partial f_y = N.$$

Differenziirt man nun die erste dieser Gleichungen nach y, die andere nach x, so erhält man

$$\partial^{1,1} f_{x,y} = \partial M_y \quad \text{und} \quad \partial^{1,1} f_{x,y} = \partial N_x;$$

daher schon deshalb, wenn f existirt, auch $\partial M_y = \partial N_x$ seyn muß. — Ob aber, wenn die Gleichung $\partial M_y = \partial N_x$ existirt, auch eine Funktion $f_{x,y}$ als Integral von $M + N \cdot \partial y_x$ existiren werde, geht aus dieser so eben angestellten Betrachtung nicht, wohl aber aus dem oben bezeichneten Verfahren hervor. Nach diesem Verfahren sucht man nämlich das Integral f aus der Gleichung

$$\partial f_x + \partial f_y \cdot \partial y_x = M + N \cdot \partial y_x,$$

so daß man hat

$$\partial f_y = N, \quad \text{also} \quad f = \int N \cdot dy + C_x,$$

Will man aber integriren die Differenzial-Funktion

II. $M_{x,y,z} + N_{x,y,z} \cdot \partial y_x + P_{x,y,z} \cdot \partial z_x$,

so erhält man, ganz nach (§. 43.) verfahrend, die drei Bedingungs-Gleichungen der Integrabilität:

1) $\partial M_z = \partial P_x$, 2) $\partial M_y = \partial N_x$, 3) $\partial N_z = \partial P_y$.

Eine vollständige Theorie dieser Bedingungs-Gleichungen der Integrabilität für Differenzial-Funktionen höherer Ordnungen findet man im „System der Mathem. Th. VI."

## §. 45.

Im Falle eine Differenzial-Funktion $\psi$ als solche nicht integrirt werden kann, in so ferne sie den Bedingungs-Gleichungen der Integrabilität nicht genügt, so existirt doch immer zum mindesten ein integrirender Faktor $\varphi$, so nämlich, daß die Differenzial-Funktion $\varphi \cdot \psi$ im Sinne des (§. 43.) integrirt werden kann; und die Bedingungs-Gleichungen der Integrabilität von $\varphi \cdot \psi$ bestimmen diesen Faktor $\varphi$.

Genügt z. B. $M + N \cdot \partial y_x$ der Bedingungs-Gleichung der Integrabilität (§. 44. $\sigma$), nämlich der Gleichung $\partial M_y = \partial N_x$ nicht, so suche man $\varphi_{x,y}$ so, daß der Gleichung

1) $\partial(M\varphi)_y = \partial(N\varphi)_x$

genügt ist, und die Funktion

$M\varphi + N\varphi \cdot \partial y_x$, d. h. $\varphi \cdot (M + N \cdot \partial y_x)$

ist dann offenbar integrabel.

---

wo $C_x$ irgend eine noch zu bestimmende Konstante (nach y) ist, während $\int N \cdot dy$ irgend ein besonderes Integral (nach y) vorstellt. — Weil aber noch $\partial f_x = M$ seyn muß, so giebt dies die Gleichung

$$\partial(\int N \cdot dy)_x + \partial C_x = M,$$

d. h. $$\partial C_x = M - \partial(\int N \cdot dy)_x.$$

Dieser Ausdruck zur Rechten darf nun kein y mehr enthalten, muß also, wenn er nach y differenziirt wird, Null geben, und dies ist die obige Bedingungs-Gleichung der Integrabilität. Zuletzt, wenn sie erfüllt ist, bekommt man noch C durch Integration nach x.

Für dieses Beispiel ist der integrirende Faktor $\varphi$ gegeben durch die Gleichung (1.), welche auch in der Form

2) $\varphi \cdot (\partial M_y - \partial N_x) + \partial \varphi_y \cdot M - \partial \varphi_x \cdot N = 0$

geschrieben werden kann.

Weil aber diese Gleichung (2.), aus welcher der integrirende Faktor $\varphi$ gefunden werden soll, selbst eine Differenzial-Gleichung ist, und noch dazu (nach §. 15.) eine Parzial-Gleichung, so wird sie bei dem praktischen Integriren doch sehr selten benützt werden können, um diesen integrirenden Faktor $\varphi$ zu finden.

Gewöhnlicher findet man daher einen solchen integrirenden Faktor $\varphi$ bloß durch Versuche, oder zwar aus der Gleichung (2.) (für unser Beispiel), indem man jedoch $\varphi$ von bestimmter Form voraussetzt, etwa als bloße Funktion von x allein, oder als bloße Funktion von y allein, u. dgl., und zusieht, ob nicht dieser Gleichung (2.) unter dieser Voraussetzung irgend wie genügt werden kann.

So z. B. genügt $y + x \cdot \partial y_x$ der Bedingungs-Gleichung (§. 44. ♂) der Integrabilität, und das Integral von $y + x \cdot \partial y_x$ ist $x \cdot y$. — Nimmt man jedoch $y - x \cdot \partial y_x$, so genügt diese Funktion derselben Bedingungs-Gleichung der Integrabilität nicht. Multiplizirt man aber diese Funktion mit $\frac{1}{x \cdot y}$, so daß man $\frac{1}{xy} \cdot (y - x \cdot \partial y_x)$ oder $\frac{1}{x} - \frac{\partial y_x}{y}$ erhält, so ist diese neue Funktion integrabel, und giebt zum Integral $\log x - \log y$.

## §. 46.

Findet man aus einer Differenzial-Gleichung, z. B. aus der Gleichung

1) $y \cdot \partial^2 y_x - \partial y_x^2 - x \cdot \partial y_x + y = 0,$

eine Differenzial-Gleichung der nächst niedrigern Ordnung z. B. die Gleichung

2) $\partial y_x + x - c \cdot y = 0$

mit einer willkührlichen, in der Gleichung (1.) nicht vorkommen-

den Konstante c; und hat diese Gleichung (2.) die Eigenschaft, daß wenn man sie differenziirt, also die Gleichung

3) $$\partial^2 y_x + 1 - c \cdot \partial y_x = 0$$

aus ihr bildet, dann aber aus (2. und 3.) diese Konstante c selbst eliminirt, allemal die gegebene Differenzial-Gleichung (1.) wieder hervorgeht, so nennt man diese Gleichung (2.) das allgemeine erste Integral der (1.)

Nimmt man nun von dieser Gleichung (2.) wiederum das allgemeine erste Integral, nämlich

4) $$y = \frac{1}{c} \cdot \left(x + \frac{1}{c}\right) + b \cdot e^{cx},$$

mit der neuen, in (2.) noch nicht vorkommenden, willkührlichen Konstante b, so heißt diese Gleichung (4.) auch das allgemeine zweite Integral der (1.). — In so ferne diese Gleichung (4.) zu gleicher Zeit eine Ur-Gleichung (§. 15.) ist, heißt sie auch das allgemeine Ur-Integral der Gleichung (2.) oder (1.).

Differenziirt man aber die Gleichung (4.) zweimal hintereinander, so daß man erhält

5) $\partial y_x = \frac{1}{c} + bc \cdot e^{cx}$ und 6) $\partial^2 y_x = bc^2 \cdot e^{cx}$;

und eliminirt man aus diesen Gleichungen (4. 5. und 6.) die beiden willkührlichen Konstanten b und c, so wird man wieder die Differenzial-Gleichung (1.) der 2ten Ordnung erhalten.

Werden dagegen der Konstante c, oder der Konstante b, oder beiden Konstanten b und c, besondere Werthe gegeben, so daß sie nicht mehr allgemein jeden (von x unabhängigen) Werth annehmen können, so nennt man dieselben Gleichungen (2. oder 4.) besondere (partikuläre) Integrale der gegebenen Differenzial-Gleichungen *).

---

*) Das Integral einer Differenzial-Gleichung mag ein allgemeines oder ein besonderes seyn, so folgt doch aus der hier gegebenen Definition, daß jede Funktion y von x, welche der Integral-Gleichung genügt, nothwendig auch die Differenzial-Gleichung identisch machen müsse. Ist daher

## §. 47.

Zuweilen läßt ſich eine Differenzial-Gleichung an ſich, oder doch eine Umformung derſelben, welche durch Einführung neuer Veränderlicher hervorgebracht iſt, in zwei Faktoren zerlegen, ſo daß ſie die Form

$$f \cdot \psi = 0$$

annimmt. Man kann dann $f = 0$ integriren, wenn $f = 0$ noch keine Ur-Gleichung iſt; und auch $\psi = 0$ integriren. Iſt aber $f = 0$ von einer niedrigern Ordnung als $\psi = 0$, ſo nennt man $f = 0$ einen ſingulären Werth der gegebenen oder umgeformten Gleichung $f \cdot \psi = 0$, und das allgemeine Integral von $\psi = 0$ wird dann auch das allgemeine Integral von $f \cdot \psi = 0$ genannt. — Sollte aber $f = 0$ zufällig als ein beſonderes Integral in dem allgemeinen Integral von $\psi = 0$ oder von $f \cdot \psi = 0$ ſtekken, ſo würde dann $f = 0$ den Namen eines ſingulären Werthes verlieren, eben weil es nun als ein beſonderes (partikuläres) Integral erkannt wird.

So iſt, z. B. von der gegebenen Differenzial-Gleichung der 1ſten Ordnung

1) $$x \cdot \partial y_x^2 - 4y \cdot \partial y_x + 4xy = 0,$$

das allgemeine Ur-Integral dieſes:

2) $$4a^2 \cdot y = a^4 + 2a^2x^2 + x^4,$$

und hat die willkührliche Konſtante a. — Man kann aber dieſelbe Differenzial-Gleichung (1.), wenn man ſtatt y lieber u einführt, ſo z. B. daß man

3) $$\sqrt{y - x^2} = u$$

ſetzt, umformen. Es iſt dann $y - x^2 = u^2$, und, wenn man dieſe Gleichung nach x differenziirt, noch

4) $$\partial y_x - 2x = 2u \cdot \partial u_x,$$

alſo daß man mittelſt der Gleichungen (3. u. 4.) die Differenzial-Koeffizienten $\partial y_x$, $\partial^2 y_x$, ſo wie y ſelbſt aus (1.) hinwegſchaffen kann. Dadurch geht die gegebene Gleichung (1.) in dieſe andere Gleichung

---

die Integral-Gleichung eine Ur-Gleichung, ſo hat man die Funktion y von x gefunden, welche der gegebenen Differenzial-Gleichung genügt.

5) $$u^3 \cdot \left[ x \cdot \partial u_x^2 - 2u \cdot \partial u_x - x \right] = 0$$

über, und nun genügt ihr auch $u = 0$, d. h.

6) $$\sqrt{y - x^2} = 0 \quad \text{oder} \quad y - x^2 = 0,$$

ohne daß diese letztere Gleichung $y = x^2$ in dem allgemeinen Ur-Integral (2.) enthalten wäre *). Die Gleichung $y - x^2 = 0$ ist daher ein singulärer Werth der gegebenen Differenzial-Gleichung **). — Hinsichtlich dieser singulären Werthe findet man das ausführlichste in dem „System der Mathem. Th. V. §. 270. §. 275. und §. 280.).

## §. 48.

Soll aber z. B. eine gegebene Differenzial-Gleichung der 2ten Ordnung $\varphi = 0$ (zwischen $x, y, \partial y_x$ und $\partial^2 y_x$) allgemein integrirt werden, so kann man wiederum zunächst den Maclaurin'schen Satz anwenden, nach welchem jede Funktion $y_x$, also auch jede, welche das gesuchte Integral bildet, in folgende Reihe verwandelt ist, nämlich

$$(\odot) \cdots y = [y_x]_\alpha + [\partial y_x]_\alpha \cdot (x - \alpha) + [\partial^2 y_x]_\alpha \cdot \frac{(x-\alpha)^2}{2!}$$
$$+ [\partial^3 y_x]_\alpha \cdot \frac{(x-\alpha)^3}{3!} + [\partial^4 y_x]_\alpha \cdot \frac{(x-\alpha)^4}{4!} + \cdots,$$

wo $\alpha$ irgend einen bestimmten Ziffernwerth vorstellt. Differenziirt man nun die gegebene Gleichung $\varphi = 0$ der 2ten Ordnung, hinter einander nach allem x, ohne Ende fort, so kann man aus den entstehenden Gleichungen nach und nach $\partial^2 y_x$, $\partial^3 y_x$, $\partial^4 y_x$, ꝛc. ꝛc. finden, ausgedrückt in $x$, $y_x$ und $\partial y_x$. Setzt man nun statt $x$ den Ziffernwerth $\alpha$, wie dies die Gleichung $(\odot)$ ver-

*) Man erkennt dies daran: Eliminirt man aus (2.) und (6.) den Veränderlichen y, so fällt durch keine Annahme der Konstanten a und b der Veränderliche x zugleich mit heraus, wie dies doch seyn müßte, wenn für irgend konstante Werthe von a und b die Gleichung (2.) in die Gleichung (6.) übergehen sollte.

**) In der That giebt diese Gleichung $y = x^2$, $\partial y_x = 2x$, $\partial^2 y_x = 2$; und diese Werthe, in die Differenzial-Gleichung (1.) gesetzt, machen sie identisch. Dieser Werth genügt also der gegebenen Differenzial-Gleichung (1.), wie vorauszusehen war, weil er einen ihrer Faktoren der Null gleich macht.

langt, so bleiben $[y_x]_\alpha$ und $[\partial y_x]_\alpha$ (die in allen den, für die Koeffizienten $[\partial^2 y_x]_\alpha$, $[\partial^3 y_x]_\alpha$, ꝛc. ꝛc. gefundenen Werthen wieder vorkommen) allein unbestimmt, und auch völlig willkührlich, jedoch (nach x) konstant. Also giebt die Gleichung (⊙) das Ur-Integral der gegebenen Differenzial-Gleichung der 2ten Ordnung, mit 2 willkührlichen Konstanten.

Dieselbe Gleichung (⊙) wird aber auch das Ur-Integral vorstellen, von jeder gegebenen Differenzial-Gleichung der nten Ordnung, nur daß diese letztere, und alle aus ihr durch fortgesetztes Differenziiren erhaltenen Gleichungen bloß $\partial^n y_x$, $\partial^{n+1} y_x$, $\partial^{n+2} y_x$, ꝛc. ꝛc. geben, in x, $y_x$, $\partial y_x$, $\partial^2 y_x$, ... $\partial^{n-1} y_x$ ausgedrückt, so daß die Werthe der n letztern, für $x = \alpha$, unbestimmt, übrigens nach x konstant, bleiben, und willkührlich gedacht werden können und müssen. Das Ur-Integral einer solchen Differenzial-Gleichung der nten Ordnung hat also dann n willkührliche Konstanten.

Das Ur-Integral einer Differenzial-Gleichung der 1sten Ordnung wird daher, eben deshalb, nur eine einzige willkührliche Konstante in sich aufnehmen, und doch ganz allgemein seyn, d. h. alle Funktionen $y_x$ enthalten, welche der gegebenen Differenzial-Gleichung genügen *).

## §. 49.

Obgleich diese Integrations-Formel (⊙), welche der Maclaurin'sche Lehrsatz direkt liefert, gerade wie die eben daher geholte Formel (§. 28.) ganz allgemein ist, und in jedem vorkommenden Falle das Integral giebt, so hat sie doch wiederum das Ueble, daß sie zu unendlichen Reihen auch in den Fällen führt, wo ein Integral in endlicher Form existirt. — Für das

*) Die nach (§. 47.) zuweilen existirenden singulären Werthe müssen offenbar einen dieser Koeffizienten in der Reihe (⊙) zur Rechten, auf die Form $\frac{0}{0}$ bringen, weil sonst dieser Werth in dem allgemeinen Integral stekken, also den Namen eines singulären Werthes nicht verdienen würde.

Integriren einer gegebenen Differenzial-Gleichung $\psi = 0$ in endlicher Form hat man nun folgende Regeln:

A. Genügt die Funktion $\psi$ den Bedingungs-Gleichungen der Integrabilität, existirt also ein Integral f von $\psi$ im Sinne des (§. 43.), so finde man solches f nach dem (§. 43.) und nehme $f = c$ als Integral-Gleichung, wo c eine willkührliche Konstante ist. Ja, hat man f schon ganz allgemein gefunden, so ist in f schon eine willkührliche Konstante enthalten, und dann kann man $f = 0$ nehmen als allgemeines erstes Integral von $\psi = 0$.

So findet sich das erste allgemeine Integral der Gleichung

1) $$y \cdot \partial^2 y_x + \partial y_x^2 + a^x = 0,$$

sogleich wie folgt, nämlich

$$y \cdot \partial y_x + \frac{a^x}{\log a} = c,$$

oder

2) $$y \cdot \partial y_x + \frac{a^x}{\log a} + c = 0.$$

Und von dieser letztern Gleichung findet sich wiederum sogleich das allgemeine Integral

3) $$\tfrac{1}{2} y^2 + \frac{a^x}{(\log a)^2} + c \cdot x + c' = 0,$$

wo c und c' zwei willkührliche Konstanten sind.

B. Sind in einer Gleichung die Veränderlichen getrennt, d. h. enthält sie lauter einzelne Glieder, in denen bloß x allein, oder bloß y allein vorkommt, so genügt sie allemal den Bedingungs-Gleichungen der Integrabilität, kann also dann allemal nach (A.) integrirt werden.

Dies ist z. B. in der Gleichung (A. 2.) der Fall gewesen, wo die Veränderlichen getrennt erscheinen. — Von der Gleichung

1) $$X_x + Y_y \cdot \partial y_x = 0 \text{ *)},$$

---

*) Sind dx, dy zusammengehörige unendlich-kleine Zuwachse von x und y, so ist

$$\partial y_x = \frac{dy}{dx},$$

und man kann daher der Gleichung (1.) auch die Form geben

$$X_x \cdot dx + Y_y \cdot dy = 0.$$

wo $X_x$ kein y, und $Y_y$ kein x enthalten sollen, findet man sonach sogleich das Integral

2) $\int X \cdot dx + \int Y \cdot dy^*) + c = 0.$

Aber auch von der Gleichung

I. $X_x + Y_y \cdot \partial y_x + Z_z \cdot \partial z_x = 0,$

findet man sogleich das Integral

II. $\int X \cdot dx + \int Y \cdot dy + \int Z \cdot dz + c = 0.$

C. Ist die Funktion $\psi$ nicht integrabel, so sucht man nach (§. 45.) einen integrirenden Faktor $\varphi$, so daß $\varphi \cdot \psi$ integrabel wird, — setzt statt der Gleichung $\psi = 0$, diese andere $\varphi \cdot \psi = 0$, und integrirt letztere nach (A. oder B.).

So integrirt sich die Gleichung

1) $\partial^2 y_x = A \cdot y^m$ oder $\partial^2 y_x - A \cdot y^m = 0,$

indem man sie mit dem integrirenden Faktor $\partial y_x$ multiplizirt und dann (nach A.) integrirt. Man erhält dann zunächst $\partial y_x \cdot \partial^2 y_x - A \cdot y^m \cdot \partial y_x = 0$, und hieraus

2) $\frac{1}{2}(\partial y_x)^2 - \frac{A}{m+1} \cdot y^{m+1} + c = 0$

als erstes allgemeines Integral.

Eben so integrirt sich die Gleichung

$$y - x \cdot \partial y_x = 0,$$

indem man mit $\frac{1}{xy}$ multiplizirt, wodurch man

$$\frac{1}{x} - \frac{\partial y_x}{y} = 0$$

erhält, und diese dann nach (B.) integrirt. Dadurch erhält man

$$log\, x - log\, y + c = 0, \text{ oder } log \frac{x}{y} + c = 0,$$

oder $\frac{x}{y} = e^{-c}$, oder $y = e^c \cdot x$, oder $y = C \cdot x$,

wo C eine willkührliche Konstante ist.

So integrirt sich

$$X_x \cdot Y_y + X'_x \cdot Y'_y \cdot \partial y_x = 0,$$

indem man mit $\frac{1}{Y_y \cdot X'_x}$ multiplizirt, und die entstehende Gleichung dann nach (B.) integrirt, so daß man

*) Eigentlich muß stehen $\int (Y \cdot \partial y_x) \cdot dx$; allein nach (§. 30. Nr. 4.) ist solches Integral $= \int Y \cdot dy$.

$$\int \frac{X}{X'} \cdot dx + \int \frac{Y'}{Y} \cdot dy + c = 0$$

als allgemeines Integral erhält.

So integrirt sich aber auch noch die Gleichung

$$X'_x \cdot Y_y \cdot Z_z + X_x \cdot Y'_y \cdot Z_z \cdot \partial y_x + X_x \cdot Y_y \cdot Z'_z \cdot \partial z_x = 0,$$

indem man solche mit $X \cdot Y \cdot Z$ dividirt. Man erhält dann

$$\int \frac{X'}{X} \cdot dx + \int \frac{Y'}{Y} \cdot dy + \int \frac{Z'}{Z} \cdot dz + c = 0.$$

D. Diese Methoden (A. B. C.) kann man zuweilen dann erst anwenden, wenn in die gegebenen Differenzial-Gleichungen neue Veränderliche eingeführt worden sind, so daß sie dadurch eine, für diese Anwendungen bequemere, Form erhalten. Darüber sehe man jedoch weiter unten (§. 51.). —

## §. 50.

Weil die allgemeinen Integrations-Methoden bei Differenzial-Gleichungen noch weniger leisten, als bei den Integrationen entwikkelt gegebener Funktionen, so hat man hier noch mehr Ursachen, besondere Formen besonders zu betrachten.

Unter allen Differenzial-Gleichungen heben sich aber als besonders wichtig hervor die *linearen* (welche man auch die Gleichungen vom *ersten Grade* nennt, und die dabei von beliebiger *Ordnung* seyn können). Dies sind die Gleichungen von der Form

$$\partial^n y_x + A_x \cdot \partial^{n-1} y_x + B_x \cdot \partial^{n-2} y_x + \cdots + P_x \cdot \partial y_x + Q_x \cdot y = X_x,$$

wo die Koeffizienten A, B, C, ··· P, Q, so wie X beliebige und gegebene Funktionen von x (aber ohne y), auch beliebig konstant (und daher zum Theil auch Null) seyn können.

Diese linearen Gleichungen werden *reducirte* genannt, wenn $X = 0$ ist; sie heißen *vollständige*, wenn X nicht 0 ist.

I. Die *reducirte* lineare Gleichung der ersten Ordnung

$$1) \qquad \partial y_x + A_x \cdot y = 0$$

integrirt sich sogleich, mittelst des integrirenden Faktors $\frac{1}{y}$, und giebt

$$\int \frac{\partial y_x}{y} \cdot dx + \int A_x \cdot dx + c = 0,$$

oder $$\log y + \int A_x \cdot dx + c = 0,$$

oder 2) $$y = C \cdot e^{-\int A_x \cdot dx}.$$

II. Will man aber die vollständige lineäre Gleichung der ersten Ordnung

1) $$\partial y_x + A_x \cdot y = X_x$$

integriren, so setzt man die Form des Integrals so voraus, wie solche in (I.) so eben für den Fall gefunden worden, daß $X = 0$ ist; man setzt also

2) $$y = C \cdot e^{-\int A_x \cdot dx},$$

betrachtet aber C als eine noch unbekannte Funktion von x, welche so bestimmt werden muß, daß die Gleichung (2.) der (1.) genügt. Man differenziirt also die Gleichung (2.) unter dieser Voraussetzung, substituirt diese Werthe von y und $\partial y_x$, die man aus (2.) erhält, in die Gleichung (1.), und letztere geht dadurch über in

$$e^{-\int A_x \cdot dx} \cdot \partial C_x = X,$$

woraus $$\partial C_x = X \cdot e^{\int A_x \cdot dx},$$

also $$C = \int X \cdot e^{\int A_x \cdot dx} \cdot dx$$

hervorgeht.

Durch dieses Verfahren konnte man im (§. 46.) die Gleichung (2.) integriren, welche zu den vollständigen lineären Gleichungen der ersten Ordnung gehört.

III. Mit der reducirten lineären Gleichung der 2ten Ordnung

1) $$\partial^2 y_x + A_x \cdot \partial y_x + B_x \cdot y = 0$$

hat man sich zwar vielfach beschäftigt, aber in wenigen besonderen Fällen nur, ihre Integration in endlicher Form bewirkt.

Sind jedoch die Koeffizienten A und B (nach x) konstant, so setzt man

2) $y = e^{mx}$, also $\partial y_x = m \cdot e^{mx}$, $\partial^2 y_x = m^2 \cdot e^{mx}$;

und die Gleichung (1.) geht über in

3) $$m^2 + A \cdot m + B = 0,$$

und giebt für m zwei Werthe $m_1$ und $m_2$ (welche die Form

$p \pm q \cdot \sqrt{-1}$ haben werden, wo $q = 0$ oder q nicht Null ist). Dann nimmt man

4) $y = C_1 \cdot e^{m_1 \cdot x} + C_2 \cdot e^{m_2 \cdot x}$,

wo $C_1$ und $C_2$ zwei willkührliche Konstanten sind. Und diese Gleichung (4.) genügt der (1.), hat zwei willkührliche Konstanten, und ist daher das gesuchte allgemeine Integral.

Sind die beiden Werthe $m_1$ und $m_2$ einander gleich und $= m$, so nimmt das allgemeine Integral (4.) diese Form an:

5) $y = e^{mx} \cdot (a + b \cdot x)$ *),

wo a und b die beiden willkührlichen Konstanten sind. Und sind die beiden Werthe $m_1$ und $m_2$ wirklich imaginär, also $= p \pm q \cdot \sqrt{-1}$, so giebt man dem allgemeinen Integral (4.) bequemer diese Form

(nach den Formeln $e^{\pm q \cdot \sqrt{-1}} = \cos q \pm \sqrt{-1} \cdot \sin q$),

nämlich

6) $y = e^{px} \cdot (a \cdot \cos qx + b \cdot \sin qx)$,

oder auch

7) $y = a \cdot e^{px} \cdot (\cos qx + b)$, oder $y = a \cdot e^{px} \cdot \sin(qx + b)$,

wo (in 6. und in 7.) a und b die beiden willkührlichen Konstanten vorstellen.

IV. Kann man aber die reduzirte lineäre Gleichung der 2ten Ordnung

1) $\partial^2 y_x + A \cdot \partial y_x + B \cdot y = 0$,

es mögen die Koeffizienten A und B konstant oder Funktionen von x seyn, integriren, so findet sich das allgemeine Integral derselben doch immer von der Form

2) $y = a \cdot R_x + b \cdot S_x$ **),

---

*) Man findet dies, wenn man anfänglich $m_1 = m$ und $m_2 = m + h$ setzt, dann $e^{m_2 \cdot x}$ in $e^{m \cdot x} \cdot e^{hx}$, d. h. in $e^{m \cdot x} \cdot (1 + hx + \frac{h^2 x^2}{2!} + \cdots)$ verwandelt, dadurch das Resultat (4.) in $y = e^{mx} \cdot (C_1 + C_2 + C_2 hx + \cdots)$ umformt, dann $C_1 + C_2 = a$, $C_2 \cdot h = b$ setzt; zuletzt aber 0 statt h schreibt.

**) Man findet dies, wenn man den integrirenden Faktor sucht, unter der Voraussetzung, daß er bloß x und nicht y, noch weniger aber $\partial y_x$ ent-

wo a und b zwei willkührliche Konstanten vorstellen; und dann kann man auch allemal die vollständige lineäre Gleichung

3) $\partial^2 y_x + A \cdot \partial y_x + B \cdot y = X_x$

integriren, indem man genau wie in (II.) die Gleichung (2.) als das Integral der (3.) ansieht, der Form nach, und nun noch die unbestimmten Koeffizienten a und b (als Funktionen von x) dergestalt zu bestimmen sucht, daß der Gleichung (3.) wirklich genügt wird.

Zu dem Ende differenziirt man die Gleichung (2.) und erhält

4) $\partial y_x = a \cdot \partial R_x + b \cdot \partial S_x + (R \cdot \partial a_x + S \cdot \partial b_x)$;

setzt den eingeklammerten Theil $= 0$, so daß man zur Bestimmung von a und b einstweilen die Gleichung

$\alpha$) $R \cdot \partial a_x + S \cdot \partial b_x = 0$

hat, dagegen $\partial y_x$ in (4.) genau so wird, wie wenn a und b noch konstant wären, nämlich

5) $\partial y_x = a \cdot \partial R_x + b \cdot \partial S_x$.

Hernach differenziirt man diese Gleichung (5.) noch einmal, und bekommt

6) $\partial^2 y_x = a \cdot \partial^2 R_x + b \cdot \partial^2 S_x + (\partial R_x \cdot \partial a_x + \partial S_x \cdot \partial b_x)$,

wo der nicht eingeklammerte Theil zur Rechten genau derselbe ist, wie wenn a und b noch konstant wären.

Da nun, nach der Voraussetzung, die Werthe aus (2. 5. und 6.), wenn man aus (6.) den eingeklammerten Theil wegläßt, bezüglich statt y, $\partial y_x$ und $\partial^2 y_x$ gesetzt, der Gleichung (1.) genügen, also, in die (3.) substituirt, den Ausdruck zur Linken in (3.) der Null gleich machen, so geht diese Gleichung (3.) jetzt sogleich über in

$\beta$) $\partial R_x \cdot \partial a_x + \partial S_x \cdot \partial b_x = X$.

Aus den Gleichungen ($\alpha$. und $\beta$.) findet man nun sogleich $\partial a_x$ und $\partial b_x$ als bekannte Funktionen von x, etwa

---

hält. Diese Voraussetzung findet sich bestätigt. Denkt man sich die Gleichung mit diesem integrirenden Faktor dann multiplizirt und integrirt, so sieht man, daß das Integral allemal diese Form annehmen müsse, auch wenn man es nicht wirklich herstellen kann.

7) $\partial a_x = X'$ und $\partial b_x = X''$,

und daraus dann

8) $a = \int X' \cdot dx + c$, $b = \int X'' \cdot dx + c'$,

wo c und c' die beiden willkührlichen Konstanten sind.

Das Integral der Gleichung (3.) ist dann

9) $y = R_x \cdot \int X' \cdot dx + S_x \cdot \int X'' \cdot dx + c \cdot R_x + c' \cdot S_x$.

Sind die Koeffizienten A und B konstant, so ist (nach III.) entweder

$$R = e^{m_1 \cdot x} \text{ und } S = e^{m_2 \cdot x},$$

wenn beide Wurzelwerthe der Gleichung $m^2 + Am + B = 0$ reell und ungleich sind,

oder $R = e^{mx}$ und $S = x \cdot e^{m \cdot x}$,

wenn beide Werthe von m reell und gleich sind,

oder $R = e^{px} \cdot \cos qx$ und $S = e^{px} \cdot \sin qx$,

wenn beide Werthe von m imaginär und $= p \pm q \cdot \sqrt{-1}$ sind.

Anmerkung.

1) Man kann danach leicht lineäre Differenzial-Gleichungen, welche reduzirt sind und konstante Koeffizienten haben, von jeder beliebigen Ordnung integriren.

2) Wenn man das Integral der reduzirten Gleichung

$\alpha$) $\partial^n y_x + A \cdot \partial^{n-1} y_x + \cdots + P \cdot \partial y_x + Q \cdot y = 0$

mit konstanten oder veränderlichen Koeffizienten gefunden hat, welches immer von der Form

$\beta$) $y = C_1 \cdot R_1 + C_2 \cdot R_2 + C_3 \cdot R_3 + \cdots + C_n \cdot R_n$

seyn wird, so kann man daraus leicht auch das allgemeine Integral der vollständigen lineären Gleichung

$\gamma$) $\partial^n y_x + A \cdot \partial^{n-1} y_x + \cdots + P \cdot \partial y_x + Q \cdot y = X$

finden, indem man das Integral ($\beta$.) auch jetzt noch, der Form nach, beibehält, aber die Koeffizienten $C_1$, $C_2$, $C_3 \cdots C_n$ als noch unbestimmte Funktionen von x dergestalt zu bestimmen sucht, daß die Gleichung ($\beta$.) wirklich auch der Gleichung ($\gamma$.) genügt. Zu dem Ende differenziirt man die Gleichung ($\beta$.) n—1 mal hinter einander, setzt aber in jedem Differenzial den Theil desselben, welcher die Differenzial-Koeffizienten $\partial(C_1)_x$,

$\partial(C_2)_x$, $\partial(C_3)_x$, ··· $\partial(C_n)_x$ enthält, der Null gleich (da aus den so entstehenden $n-1$ Gleichungen diese unbestimmten n Funktionen $C_1$, $C_2$, $C_3$, ··· $C_n$ ihre Bestimmung erhalten können, so ist dies offenbar erlaubt), damit nicht bloß y, sondern auch noch $\partial y_x$, $\partial^2 y_x$, $\partial^3 y_x$, ··· $\partial^{n-1} y_x$ jetzt noch der Form nach genau dieselben sind und bleiben, wie vorher, wo $C_1$, $C_2$, $C_3$, ··· $C_n$ konstant waren. Zuletzt findet man durch nochmaliges Differenziiren auch $\partial^n y_x$ und zwar einen Theil, der genau so ist, wie wenn alle diese C konstant sind, und noch den Theil, welcher die Differenzial-Koeffizienten $\partial(C_1)_x$, $\partial(C_2)_x$, ··· $\partial(C_n)_x$ enthält. Substituirt man nun diese Werthe statt y, $\partial y_x$, $\partial^2 y_x$, ··· $\partial^{n-1} y_x$ und $\partial^n y_x$ in die gegebene Differenzial-Gleichung ($\gamma$.), so wird, vermöge der Voraussetzung, links alles der Null gleich bis auf den letzt erwähnten Theil von $\partial^n y_x$, so daß die Gleichung ($\gamma$.) nun übergeht in

$$\delta)\quad \partial^n(R_1)_x \cdot \partial(C_1)_x + \partial^n(R_2)_x \cdot \partial(C_2)_x + \cdots + \partial^n(R_n)_x \cdot \partial(C_n)_x = X.$$

Diese nte Gleichung in Verbindung mit den obigen $n-1$ Gleichungen zwischen den Differenzial-Koeffizienten $\partial(C_1)_x$, $\partial(C_2)_x$, $\partial(C_3)_x$, ··· $\partial(C_n)_x$, geben nun, da sie algebraische einfache Gleichungen sind, diese n letztgenannten Differenzial-Koeffizienten, durch bloße algebraische Auflösung, jeden als eine gegebene Funktion von x, so daß nach den Integrations-Regeln des 3ten Kapitels, diese Koeffizienten $C_1$, $C_2$, $C_3$, ··· $C_n$, jeder noch mit einer willkührlichen Konstante, gefunden werden.

Diese Methode, das Integral einer vollständigen lineären Gleichung aus dem allgemeinen Integral des besondern Falles, wenn $X = 0$ gesetzt wird, abzuleiten, verdankt man dem Lagrange, und man sagt, er habe „die Konstanten variiren lassen," weshalb man sie auch die Methode der Variation der Konstanten nennt. Sie ist offenbar nichts weiter als eine Anwendung der Methode der unbestimmten Koeffizienten, welche in den Elementen, wie in spätern Untersuchungen immer mit Vortheil da angewandt werden kann, wo man die Form

der gesuchten Ausdrücke kennt, oder doch vermuthet, und daher voraussetzt.

## §. 51.

Oft lassen sich gegebene Differenzial-Gleichungen durch Einführung neuer Veränderlichen in solche verwandeln, deren Integration man bereits durchgesetzt hat. — Man muß zu dem Ende folgende Versuche anstellen:

I. Man wird in die gegebene Differenzial-Gleichung $\psi = 0$, statt der Differenzial-Koeffizienten $\partial y_x$, $\partial^2 y_x$, ꝛc. ꝛc. nach (§. 16.) Ausdrücke setzen, welche ihnen bezüglich gleich sind, aber die Differenzial-Koeffizienten $\partial x_y$, $\partial^2 x_y$, ꝛc. ꝛc. enthalten; oder

II. Man wird, wie im Beispiel zu (§. 47.) geschehen, einen neuen Veränderlichen u statt y einführen, so daß die Differenzial-Gleichung nicht mehr y, $\partial y_x$, $\partial^2 y_x$, ꝛc. ꝛc., sondern bloß x und u, $\partial u_x$, $\partial^2 u_x$, ꝛc. ꝛc. enthält; oder

III. Man wird einen neuen Veränderlichen u einführen, wiederum, wie so eben beschrieben ist, mittelst einer beliebig angenommenen Gleichung (zwischen x und u, oder zwischen y und u, oder) zwischen x, y und u, aber so, daß u an die Stelle des unabhängigen Veränderlichen tritt, also daß die neue Differenzial-Gleichung bloß u, y, $\partial y_u$, $\partial^2 y_u$, ꝛc. ꝛc. enthält; oder endlich

IV. Man wird zwei neue Veränderliche u und v einführen (durch zwei Gleichungen zwischen x, y, u und v), und so eine neue Differenzial-Gleichung sich verschaffen zwischen u, v, $\partial v_u$, $\partial^2 v_u$, ꝛc., oder zwischen v, u, $\partial u_v$, $\partial^2 u_v$, ꝛc. ꝛc.

1stes Beispiel zu I. Hat man z. B. die Gleichung $\partial^2 y_x = ay$ mittelst des integrirenden Faktors $\partial y_x$ integrirt, und

$$(\partial y_x)^2 = 2ay^2 + c$$

zum ersten Integral erhalten, und wollte man nun diese letztere Gleichung auf's neue integriren, so würde man statt $\partial y_x$ das nach (§. 16.) ihm gleiche $\frac{1}{\partial x_y}$ setzen, dann bloß eine Gleichung zwischen y und $\partial x_y$ haben (ohne x), solche also nach $\partial x_y$ algebraisch auflösen können, und dadurch

$\partial x_y$

$$\partial x_y = \frac{1}{\sqrt{ay^2+c}}$$

erhalten, woraus dann sogleich

$$x = \int \frac{1}{\sqrt{ay^2+c}} \cdot dy = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot log(y \cdot \sqrt{a} + \sqrt{ay^2+c})$$

folgt *).

2^tes Beispiel zu I. Hätte man z. B. die Gleichung

$$\partial^2 y_x + A_y \cdot \partial y_x^2 + (B_y \cdot x - Y_y) \cdot \partial y_x^3 = 0,$$

so würde man, wenn nach (§. 16.) $\frac{1}{\partial x_y}$ statt $\partial y_x$, und $-\frac{\partial^2 x_y}{\partial x_y^3}$ statt $\partial^2 y_x$ gesetzt würde, sogleich erhalten die Gleichung

$$\partial^2 x_y - A_y \cdot \partial x_y - B_y \cdot x + Y_y = 0,$$

welche linear, vollständig und von der 2^ten Ordnung ist, also sogleich integrirt werden kann nach (§. 50.), so oft man von der reduzirten linearen Gleichung

$$\partial^2 x_y - A_y \cdot \partial x_y - B_y \cdot x = 0$$

ein allgemeines Integral gefunden hat, also namentlich, wenn A und B nicht bloß kein x, sondern auch kein y enthalten sollten.

1^stes Beispiel zu II. Gesetzt es wäre zu integriren die Gleichung

1) $$(y - a \cdot x) \cdot \partial y_x + 1 = 0,$$

so setzt man

2) $$y - a \cdot x = u,$$

so daß, indem man dem (§. 17.) gemäß verfährt,

$$\partial y_x - a = \partial u_x$$

wird, und eliminirt nun aus diesen 3 Gleichungen sowohl y als auch $\partial y_x$; und man erhält

3) $$u \cdot \partial u_x + a \cdot u + 1 = 0$$

als die neue Gleichung, welche an die Stelle der (1.) tritt. Diese giebt nach (I.)

$$-\frac{u}{1+a \cdot u} = \partial x_u, \quad \text{also} \quad x = -\int \frac{u}{1+a \cdot u} \cdot du,$$

d. h. $$x = -\frac{1}{a^2}(1 + a \cdot u) + \frac{1}{a^2} \cdot log(1 + a \cdot u) + c,$$

---

*) Dieses Verfahren ist offenbar allemal mit Nutzen anzuwenden, so oft die gegebene Differenzial-Gleichung von der ersten Ordnung ist, und außer $\partial y_x$ und y, nicht selbst noch x enthält. — So wie man nämlich nach (§. 16.) $\frac{1}{\partial x_y}$ statt $\partial y_x$ setzt, so hat man bloß eine Gleichung zwischen $\partial x_y$ und y, kann solche nach $\partial x_y$ algebraisch auflösen, und erhält

$$\partial x_y = Y_y, \quad \text{also} \quad x = \int Y \cdot dy + C.$$

oder, wenn man statt u wiederum seinen Werth $y-a\cdot x$ setzt,

$$a^2x+c = -\left(1+a(y-ax)\right)+log\left(1+a(y-ax)\right),$$

wo c die willkührliche Konstante vorstellt.

2tes Beispiel zu II. Es sey zu integriren die Gleichung

$$M_{x,y}+N_{x,y}\cdot\partial y_x = 0,$$

wo M und N homogene Funktionen von x und y sind von der rten Dimension, d. h. so sind, daß wenn man $y = x\cdot u$ setzt, dann

$$M = x^r\cdot U_u$$
$$N = x^r\cdot U'_u$$

wird, wo $U_u$ und $U'_u$ bloße Funktionen von u vorstellen. In diesem Falle wird man $y = x\cdot u$ setzen, und hat dann

$$\partial y_x = u+x\cdot\partial u_x.$$

Setzt man nun diese Werthe in die gegebene Differenzial-Gleichung, so geht sie über in

$$(U+u\cdot U')+U'x\cdot\partial u_x = 0,$$

und diese kann nun mittelst des integrirenden Faktors $\frac{1}{x\cdot(U+u\cdot U')}$ integrirt werden, weil sie dann übergeht in

$$\frac{1}{x}+\frac{U'\cdot\partial u_x}{U+u\cdot U'} = 0,$$

in welcher die Veränderlichen getrennt sind, so daß sie liefert

$$log\,x+\int\frac{U'}{U+u\cdot U'}\cdot du = c\ *).$$

3tes Beispiel zu II. Wäre z. B. gegeben die Gleichung

$$\partial^2y_x+A_x\cdot\partial y_x+B_x = 0,$$

so würde man

$$\partial y_x = u$$

setzen, und

$$\partial^2y_x = \partial u_x$$

haben, so daß nun die gegebene Gleichung in

---

*) Dieses Verfahren ist besonders wohl zu merken, weil es allemal gilt, so oft M und N homogene Funktionen einer und derselben Dimension sind.

$$\partial u_x + A_x \cdot u + B_x = 0$$

übergeht, welche vollständig lineär aber von der ersten Ordnung ist, daher nach (§. 50. II.) ohne weiteres integrirt wird. Hat man aber u mit einer willkührlichen Konstante gefunden, so folgt aus $\partial y_x = u$ sogleich noch

$$y = \int u \cdot dx + c,$$

welches das allgemeine Ur-Integral der gegebenen Differenzial-Gleichung der zweiten Ordnung ist.

Sind z. B. A und B auch nach x konstant, so hat man

$$x = \frac{1}{A} \cdot log \frac{c'}{A \cdot u + B}, \quad \text{oder} \quad \frac{c'}{A \cdot u + B} = e^{A \cdot x},$$

also

$$u = C \cdot e^{-Ax} - \frac{B}{A},$$

wo C die willkührliche Konstante ist.

Und dann ist noch

$$y = \int \left( C \cdot e^{-Ax} - \frac{B}{A} \right) \cdot dx,$$

d. h.

$$y = -\frac{C}{A} e^{-Ax} - \frac{B}{A} x + c;$$

oder

$$A \cdot y + c + B \cdot x + C \cdot e^{-Ax} = 0$$

das vollständige Ur-Integral der gegebenen Differenzial-Gleichung, wo c und C die beiden willkührlichen Konstanten sind.

1stes Beispiel zu III. Ist z. B. gegeben die lineäre Gleichung

$$\partial^2 y_x + \left( \frac{A}{x^3} + \frac{2}{x} \right) \cdot \partial y_x + B \cdot \frac{y}{x^4} = \frac{X}{x^4},$$

wo A und B (nach x) konstant seyn sollen, so setze man

$$x = \frac{1}{u} = u^{-1},$$

so daß

$$\partial x_u = -\frac{1}{u^2}$$

wird. — Hernach hat man nach (§. 16.) und (§. 17.)

$$\partial y_x = \frac{\partial y_u}{\partial x_u} = -u^2 \cdot \partial y_u,$$

$$\partial^2 y_x = \frac{\partial (\partial y_x)_u}{\partial x_u} = \frac{\partial \left( -u^2 \cdot \partial y_u \right)_u}{\partial x_u} = u^4 \cdot \partial^2 y_u + 2u^3 \cdot \partial y_u.$$

Substituirt man daher diese Werthe in die gegebene Differenzial-Gleichung, so geht sie über in

$$\partial^2 y_u - A \cdot \partial y_u + B \cdot y = \frac{X_{(1:u)}}{u^4};$$

und diese Gleichung ist jetzt lineär, wie die gegebene, hat aber lauter konstante Koeffizienten A, B, kann daher nach (§. 50.) ohne weiteres integrirt werden.

2tes Beispiel zu III. Ist gegeben die Differenzial-Gleichung der 1sten Ordnung

$$\partial y_x + A \cdot \frac{1}{x^2} \cdot y = X_x,$$

so setze man wieder, wenn A konstant ist,

$$x = \frac{1}{u}, \text{ also } \partial x_u = -\frac{1}{u^2};$$

und man hat nun

$$\partial y_x = \frac{\partial y_u}{\partial x_u} = -u^2 \cdot \partial y_u.$$

Die gegebene Gleichung wird nun

$$\partial y_u - A \cdot y = -X_{1:u} : u^2,$$

und diese letztere ist wiederum linear, hat aber einen konstanten Koeffizienten, ist also einfacher als die gegebene.

Beispiel zu IV. Ist gegeben die Gleichung

$$m \cdot x + n \cdot y + p + (a \cdot x + b \cdot y + c) \cdot \partial y_x = 0,$$

so setze man

α) $m \cdot x + n \cdot y + p = u$ und $a \cdot x + b \cdot y + c = v$.

Soll nun die neue Gleichung bloß u, v und $\partial y_u$ enthalten, so muß man nicht vergessen, daß nach (§. 16.)

β) $$\partial y_x = \frac{\partial y_u}{\partial x_u}$$

ist, und man muß, um nach (§. 17.) eliminiren zu können, die beiden Gleichungen (α.) nach allem u differenziiren, so daß man erhält

γ) $m \cdot \partial x_u + n \cdot \partial y_u = 1$ und $a \cdot \partial x_u + b \cdot \partial y_u = \partial v_u$.

Findet man nun hieraus $\partial x_u$ und $\partial y_u$, und setzt man diese Werthe in (β), so hat man das für $\partial y_x$ zu setzende, nämlich

δ) $$\partial y_x = \frac{m \cdot \partial v_u - a}{b - n \cdot \partial v_u}.$$

Die gegebene Differenzial-Gleichung wird nun

$$u + v \cdot \frac{m \cdot \partial v_u - a}{b - n \cdot \partial v_u} = 0,$$

oder $$(b \cdot u - a \cdot v) - (n \cdot u - m \cdot v) \cdot \partial v_u = 0;$$

und da diese Gleichung nach u und v homogen ist, so kann sie nun nach Anleitung des vorhergehenden (2ten Beispiels zu II.) weiter behandelt und integrirt werden.

## §. 52.

Zuweilen führt man auch neue Veränderliche in der Absicht ein, um die gegebene Differenzial-Gleichung in zwei Gleichungen zu zerlegen, von denen jede sich integriren läßt. — Hat man dann zwei Ur-Gleichungen z. B. zwischen x, y und u, so

kann man u aus beiden eliminiren, und bekommt eine Gleichung zwischen x und y. — Hat man aber 3 Ur-Gleichungen zwischen x, y, u, v, so kann man u und v eliminiren, und bekommt dann die Gleichung zwischen x und y.

Beispiel. Ist gegeben die Gleichung

$$\partial y_x + P_x \cdot y + Q_x = 0,$$

(welche als lineäre Gleichung bereits nach (§. 50. II.) integrirt werden kann), so kann man auch in ihr $y = u \cdot v$, also $\partial y_x = u \cdot \partial v_x + v \cdot \partial u_x$ setzen, und man erhält dann

$$u \cdot \partial v_x + v \cdot \partial u_x + P_x \cdot uv + Q_x = 0,$$

oder

$$u \cdot (\partial v_x + P_x \cdot v) + v \cdot \partial u_x + Q_x = 0.$$

Nimmt man nun, außer $y = u \cdot v$ noch die zweite Gleichung zwischen v und x an, nämlich

$$\partial v_x + P_x \cdot v = 0, \text{ welche } v = e^{-\int P \cdot dx} \text{ giebt,}$$

so wird die gegebene Differenzial-Gleichung bloß

$$\partial u_x = -\frac{Q}{v} = -Q \cdot e^{\int P \cdot dx},$$

so daß man sogleich

$$u = -\int (Q \cdot e^{\int P \cdot dx}) \cdot dx$$

erhält. — Dann ist aber $y = u \cdot v$, also

$$y = -e^{-\int P \cdot dx} \times \int (Q \cdot e^{\int P \cdot dx}) \cdot dx$$

das verlangte allgemeine Integral.

Das Verfahren (§. 50. II.) führt aber genau zu denselben Rechnungen.

## §. 53.

Sind zwei Gleichungen zwischen t, x, y, $\partial x_t$, $\partial y_t$, $\partial^2 x_t$, $\partial^2 y_t$, ꝛc. ꝛc. zu integriren, so stehen zwei Wege offen; entweder

1) man eliminirt aus beiden gegebenen Gleichungen eine der unbekannten Funktionen, z. B. x, mit allen ihren Differenzial-Koeffizienten $\partial x_t$, $\partial^2 x_t$, ꝛc. ꝛc., nach (§§. 17. 18.), und integrirt dann die entstehende Gleichung (zwischen t, y und deren Differenzial-Koeffizienten) nach den vorstehenden (§§.); oder

2) man integrirt die gegebenen Gleichungen direkt ohne vorher zu eliminiren, entweder in so ferne sie den Bedingungs-Gleichungen der Integrabilität genügen, wie z. B. die Gleichung

$$T_t + X_x \cdot \partial x_t + Y_y \cdot \partial y_t = 0,$$

aber, weil sie mittelst eines integrirenden Faktors leicht integrabel gemacht werden können, wie z. B. die Gleichung

$$\partial x_t \cdot \partial^2 y_t - \partial y_t \cdot \partial^2 x_t = 0,$$

welche, mit $\frac{1}{\partial x_t^2}$ multiplizirt, in

$$\frac{\partial x_t \cdot \partial^2 y_t - \partial y_t \cdot \partial^2 x_t}{\partial x_t^2} = 0$$

übergeht, und, wenn man sie integrirt,

$$\frac{\partial y_t}{\partial x_t} + c = 0, \quad \text{oder} \quad \partial y_t = c \cdot \partial x_t$$

giebt. Diese letztere kann dann sogleich wieder integrirt werden, weil sie ebenfalls den Bedingungs-Gleichungen der Integrabilität genügt, und giebt

$$y = c \cdot x + c'.$$

Anmerk. 1. Dasselbe kann man leicht auf mehr Differenzial-Gleichungen zwischen mehreren unbekannten Funktionen ausdehnen.

Anmerk. 2. Die in der gemeinen Algebra schon gegebene Regel, daß man nämlich aus den gegebenen Gleichungen durch algebraische Kombinationen erst neue und bequemere Gleichungen bildet, ehe man an das weitere Geschäft des Auflösens (oder Integrirens) geht, findet natürlich auch hier statt.

Hat man z. B. die Gleichungen

1) $\partial^2 x_t = X$ und 2) $\partial^2 y_t = Y$

zu integriren, so kann man die (1.) mit $\partial x_t$ die (2.) mit $\partial y_t$ multipliziren, und beide Resultate addiren, so daß man erhält

3) $\partial x_t \cdot \partial^2 x_t + \partial y_t \cdot \partial^2 y_t = X \cdot \partial x_t + Y \cdot \partial y_t$.

Man kann aber auch die (2.) mit x multipliziren, die (1.) dagegen mit y, und letzteres vom ersteren subtrahiren, und man wird erhalten

4) $x \cdot \partial^2 y_t - y \cdot \partial^2 x_t = Y \cdot x - X \cdot y$;

und wenn man dann von den Gleichungen (1. 2. 3. oder 4.) irgend zwei nimmt, so hat man die beiden gegebenen (1. u. 2.) vollständig ersetzt.

In den Gleichungen (3. und 4.) sind aber die Ausdrücke zur Linken integrabel; es ist nämlich

$$\int(\partial x_t \cdot \partial^2 x_t + \partial y_t \cdot \partial^2 y_t) \cdot dt = \tfrac{1}{2}(\partial x_t)^2 + \tfrac{1}{2}(\partial y_t)^2,$$

und $$\int(x \cdot \partial^2 y_t - y \cdot \partial^2 x_t) \cdot dt = x \cdot \partial y_t - y \cdot \partial x_t;$$

sollte daher einer der beiden Ausdrücke zur Rechten in den Gleichungen (3. und 4.) ebenfalls integrabel seyn (was von X und Y, d. h. von deren Bedeutung abhängt), sollte etwa

$$\int(X \cdot \partial x_t + Y \cdot \partial y_t) \cdot dt = \varphi_{x,y}, \text{ oder } \int(x \cdot Y - y \cdot X) \cdot dt = \psi_{x,y}$$

seyn (ohne daß nämlich die für x und y gesuchten Funktionen von t bekannt zu seyn brauchten, also während x und y jede beliebige Funktion von t vorstellen, worin eben der Begriff der Integrabilität einer Differenzial-Funktion liegt, nach (§§. 43. 44.)), so hat man, wenn man links und rechts in (3. oder 4.) wirklich die Integrale (nach t) nimmt, sogleich eine oder zwei Integral-Gleichungen, jede mit einer willkührlichen Konstante; und von diesen Integral-Gleichungen (welche noch immer Differenzial-Gleichungen, aber doch nur solche von der ersten Ordnung sind) ersetzt jede einzelne, eine der gegebenen Differenzial-Gleichungen der zweiten Ordnung (1. und 2.).

Ist also z. B.

$$X = 2xy + y^2 \text{ und } Y = x^2 + 2xy;$$

so ist

$$\int(X \cdot \partial x_t + Y \cdot \partial y_t) \cdot dt = x^2 \cdot y + x \cdot y^2 = xy \cdot (x + y);$$

und die Gleichung (3.) giebt sogleich

$$(\partial x_t)^2 + (\partial y_t)^2 = 2xy \cdot (x + y) + c,$$

wo c die willkührliche Konstante ist.

Für dieselbe Bedeutung von X und Y ist dagegen der Ausdruck zur Rechten in (4.) nicht integrabel. Man muß daher zu der Gleichung (5.) eine der beiden Gleichungen (1. oder 2.), oder eine aus diesen Gleichungen gebildete noch hinzunehmen, wenn man die Gleichungen (1. u. 2.) vollständig ersetzt haben will.

Nimmt man aber $X = x$, $Y = y$, so ist

$$\int(X \cdot \partial x_t + Y \cdot \partial y_t) \cdot dt = \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}y^2 + c$$

und

$$\int(Y \cdot x - X \cdot y) \cdot dt = \int 0 \cdot dt = c';$$

und die Gleichungen (3. u. 4.) geben nun sogleich die beiden neuen Gleichungen

5) $(\partial x_t)^2 + (\partial y_t)^2 = x^2 + y^2 + c$

und 6) $x \cdot \partial y_t - y \cdot \partial x_t = c'$,

wo c und c' die beiden eingehenden willkührlichen Konstanten sind.

Diese letzteren beiden Gleichungen sind nun beide nur noch von der ersten Ordnung und ersetzen die beiden gegebenen Differenzial-Gleichungen (1. u. 2.) der zweiten Ordnung ganz und vollkommen. — Gelingt es, aus ihnen, durch ähnliches oder anderes Verfahren, abermals 2 Integral-Gleichungen zu ziehen, so hat man 2 Ur-Gleichungen zwischen x, y und t; und die durch die Gleichungen (1. u. 2.) gegebenen Funktionen x und y von t sind nun endlich gefunden, d. h. in gewöhnlichen algebraischen Formen gegeben.

Findet sich z. B. aus den Neben-Bedingungen der Aufgabe, daß $c' = 0$ seyn muß, so ist die Gleichung (6.), oder

$$\frac{\partial y}{y} - \frac{\partial x}{x} = 0$$

sogleich wieder integrabel und giebt

$$\log y - \log x = \log C,$$

d. h.

7) $$\frac{y}{x} = C, \quad \text{oder} \quad y = C \cdot x.$$

Setzt man diesen Werth von y, und den zugehörigen Werth von

$$\partial y_t \quad \text{aus} \quad \partial y_t = C \cdot \partial x_t$$

in die Gleichung (5.), so geht solche über in

8) $$(\partial x_t)^2 = x^2 + \frac{c}{1+C^2} = x^2 + k^2,$$

wenn der Kürze wegen $\frac{c}{1+C^2}$ durch $k^2$ bezeichnet wird.

Diese Gleichung (8.) giebt dann, nach Anleitung des (1sten Beispiels zu I. des §. 51.), sogleich

$$\partial t_x = \frac{1}{\sqrt{x^2+k^2}}$$

und dann

$$t = \int \frac{1}{\sqrt{x^2+k^2}} \cdot dx = \log(x + \sqrt{x^2+k^2}) + C',$$

oder 9) $x+\sqrt{x^2+k^2} = e^{t-C'}$,

wo $C'$ die neue Konstante ist.

Die Gleichungen (7. und 9.) sind nun die beiden Ur-Gleichungen, welche x und y als die gesuchten Funktionen von t vollends finden lassen.

Was aber hier beispielsweise für 2 gegebene Gleichungen nachgewiesen worden ist, das läßt sich offenbar auf 3 und mehr Gleichungen, aus denen 3 und mehr Funktionen algebraisch entwikkelt (d. h. welche integrirt) werden sollen, ausdehnen.

# Höhere Analyſis.

## Sechſtes Kapitel.

### Variations-Rechnung. Größte und kleinſte Werthe.

### §. 54.

Jede nach Potenzen von $x$ fortlaufende gegebene oder geſuchte Reihe, z. B.

1) $\quad a+b\cdot x+c\cdot x^2+d\cdot x^3+e\cdot x^4+\cdots,$

welche, für $x=0$ in a übergeht, betrachten wir als eine Funktion von $x$, bezeichnen ſie durch $a_x$, und denken ſie uns nach dem Maclaurin'ſchen Lehrſatze (§. 19.) nach Potenzen von $x$ entwikkelt, ſo daß ſie dann die Form

2) $\quad a+\delta a\cdot\frac{x}{1}+\delta^2 a\cdot\frac{x^2}{2!}+\delta^3 a\cdot\frac{x^3}{3!}+\delta^4 a\cdot\frac{x^4}{4!}+\cdots$

annimmt, wo $\delta a$, $\delta^2 a$, $\delta^3 a$, $\delta^4 a$, ꝛc. ꝛc. die Koeffizienten der Maclaurin'ſchen Reihe, alſo nach (§. 19.) die Werthe der Differenzial-Koeffizienten

$$\partial a_x,\ \partial^2 a_x,\ \partial^3 a_x,\ \partial^4 a_x,\ \text{ꝛc. ꝛc.}$$

für $x=0$, vorſtellen. — Dieſe Koeffizienten der jetzigen Form (2.) der Reihe $a_x$, alſo die durch $\delta a$, $\delta^2 a$, $\delta^3 a$, $\delta^4 a$, ꝛc. ꝛc. bezeichneten Koeffizienten, nennen wir die Variations-Koeffizienten von a, und, wenn irgendwo ſtatt a die ganze Reihe (1.) oder (2.) geſetzt wird (welche für $x=0$ wieder in a übergeht), ſo ſagen wir a ſey (durch $x$) variirt.

Die Variations-Rechnung beschäftigt sich mit der Aufsuchung dieser Variations-Koeffizienten in jedem gegebenen Einzelfalle. — Sie ist daher, den so eben gegebenen Definitionen zu Folge, nichts anders als eine einfache Anwendung des Maclaurin'schen Lehrsatzes *).

## §. 55.

I. Ist $f_x$ eine Funktion von x, und wird statt x die Reihe

$$x_\alpha \text{ oder } x + \alpha\cdot\delta x + \frac{\alpha^2}{2!}\cdot\delta^2 x + \frac{\alpha^3}{3!}\cdot\delta^3 x + \cdots$$

gesetzt, so geht auch f in eine solche Reihe über, welche nach (§. 54.) durch

$$f_\alpha \text{ oder } f + \alpha\cdot\delta f + \frac{\alpha^2}{2!}\cdot\delta^2 f + \frac{\alpha^3}{3!}\cdot\delta^3 f + \cdots$$

bezeichnet wird; und dann findet sich, weil

$$\delta f = [\partial f_\alpha]_0;\quad \delta^2 f = [\partial^2 f_\alpha]_0,\ \text{ꝛc. ꝛc.}$$

ist, sogleich nach (§. 11.)

1) $\delta f = \partial f_x\cdot\delta x;$

2) $\delta^2 f = \partial^2 f_x\cdot\delta x^2 + \partial f_x\cdot\delta^2 x;$

u. s. w. f.

---

*) Vergleicht man die Reihen (1. u. 2.) direkt mit einander, so erhält man in diesem Einzelfalle sogleich

$$\delta a = b;\quad \delta^2 a = 2c;\quad \delta^3 a = 3!d = 6d;\quad \delta^4 a = 4!e = 24e;\ \text{ꝛc.}$$

Differenziirt man aber die Reihe (I.) oder $a_\alpha$ hinter einander, so erhält man

$$\partial a_\alpha = b + 2c\cdot x + 3d\cdot x^2 + 4e\cdot x^3 + \cdots$$
$$\partial^2 a_\alpha = 2c + 2\cdot 3\cdot d\cdot x + 3\cdot 4\cdot e\cdot x^2 + \cdots$$
$$\partial^3 a_\alpha = 3!d + 2\cdot 3\cdot 4\cdot e\cdot x + \cdots$$
$$\partial^4 a_\alpha = 4!e + \cdots$$

u. s. w. f.

Setzt man nun hier $x = 0$, wodurch diese Differential-Koeffizienten in die der Maclaurin'schen Reihe übergehen, also in diejenigen, welche wir so eben Variations-Koefflzienten nannten und durch $\delta a$, $\delta^2 a$, $\delta^3 a$, $\delta^4 a$, ꝛc. ꝛc. bezeichneten, so erhält man genau dasselbe, was durch die direkte Vergleichung erhalten worden ist.

II. Ist f eine Funktion von x und y, und werden statt x und y die Reihen

$$x_\varkappa \text{ oder } x+\varkappa\cdot\delta x+\frac{\varkappa^2}{2!}\cdot\delta^2 x+\frac{\varkappa^3}{3!}\cdot\delta^3 x+\cdots$$

und $$y_\varkappa \text{ oder } y+\varkappa\cdot\delta y+\frac{\varkappa^2}{2!}\cdot\delta^2 y+\frac{\varkappa^3}{3!}\cdot\delta^3 y+\cdots$$

gesetzt, so geht auch f in eine solche nach Potenzen von $\varkappa$ fortlaufende Reihe

$$f_\varkappa \text{ oder } f+\varkappa\cdot\delta f+\frac{\varkappa^2}{2!}\cdot\delta^2 f+\frac{\varkappa^3}{3!}\cdot\delta^3 f+\cdots$$

über; aber diesmal ist

1) $\delta f = \partial f_x\cdot\delta x+\partial f_y\cdot\delta y;$

2) $\delta^2 f = \partial^2 f_x\cdot\delta x^2+2\cdot\partial^{1,1} f_{x,y}\cdot\delta x\cdot\delta y+\partial^2 f_y\cdot\delta y^2+\partial f_x\cdot\delta^2 x+\partial f_y\cdot\delta^2 y;$

u. s. w. f.

III. Ist f eine Funktion von x, y und z, und werden statt x, y, z die Reihen $x_\varkappa$, $y_\varkappa$, $z_\varkappa$ gesetzt, so geht auch f in eine solche Reihe $f_\varkappa$ über, aber die einzelnen (Variations-) Koeffizienten dieser Reihe sind jetzt

1) $\delta f = \partial f_x\cdot\delta x+\partial f_y\cdot\delta y+\partial f_z\cdot\delta z;$

2) $\delta^2 f = \partial^2 f_x\cdot\delta x^2+\partial^2 f_y\cdot\delta y^2+\partial^2 f_z\cdot\delta z^2$
$+2\cdot\partial^{1,1} f_{x,y}\cdot\delta x\cdot\delta y+2\cdot\partial^{1,1} f_{x,z}\cdot\delta x\cdot\delta z$
$+2\cdot\partial^{1,1} f_{y,z}\cdot\delta y\cdot\delta z+\partial f_x\cdot\delta^2 x+\partial f_y\cdot\delta^2 y+\partial f_z\cdot\delta^2 z;$

u. s. w. f.

IV. Ist $f=\partial^n y_x$, und wird nun statt y eine Reihe $y_\varkappa$ gesetzt, so geht auch f in eine Reihe $f_\varkappa$ über, und die (Variations-) Koeffizienten dieser Reihe sind

$$\delta f=\partial^n(\delta y)_x;\quad \delta^2 f=\partial^n(\delta^2 y)_x;\quad \delta^3 f=\partial^n(\delta^3 y)_x;\ \text{ꝛc. ꝛc.}$$

d. h.

$$\delta(\partial^n y_x)=\partial^n(\delta y)_x;\ \delta^2(\partial^n y)_x=\partial^n(\delta^2 y)_x;\ \text{ꝛc. ꝛc.}$$

V. Ist $f=\partial^{n,n} z_{x,y}$, und wird nun statt z die Reihe $z_\varkappa$ gesetzt, so geht auch f in eine Reihe $f_\varkappa$ über, deren (Variations-) Koeffizienten durch nachstehende Gleichungen bestimmt sind, nämlich durch

$$\delta f = \partial^{m,n}(\delta z)_{x,y}, \quad \delta^2 f = \partial^{m,n}(\delta^2 z)_{x,y}, \text{ ꝛc. ꝛc.}$$

§. h. $\delta(\partial^{m,n} z_{x,y}) = \partial^{m,n}(\delta z)_{x,y}$, $\delta^2(\partial^{m,n} z_{x,y}) = \partial^{m,n}(\delta^2 z)_{x,y}$, ꝛc. ꝛc.

VI. Iſt $f = \int_{x \div a} y_x \cdot dx$, und wird nun ſtatt y die Reihe $y_\infty$ geſetzt, ſo geht auch f in eine ſolche Reihe $f_\infty$ über, deren (Variations-) Koeffizienten durch die Gleichungen

$$\delta f = \int_{x \div a} (\delta y) \cdot dx; \quad \delta^2 f = \int_{x \div a} (\delta^2 y) \cdot dx; \text{ ꝛc. ꝛc.}$$

beſtimmt ſind.

VII. Iſt $f = \int_{b \div a} y_x \cdot dx$; und wird nun ſtatt y eine ſolche Reihe $y_\infty$ geſetzt, deren (Variations-) Koeffizienten $\delta y$, $\delta^2 y$, ꝛc., wie immer, ganz beliebig, alſo ſelbſt wieder Funktionen von x ſeyn können; — werden aber zugleich auch ſtatt b und a ſolche Reihen $b_\infty$ und $a_\infty$ geſetzt, ſo geht f wiederum in eine ſolche Reihe $f_\infty$ über, deren (Variations-) Koeffizienten aber jetzt

1) $\delta f = \int_{b \div a} (\delta y) \cdot dx + y_b \cdot \delta b - y_a \cdot \delta a$;

2) $\delta^2 f = \int_{b \div a} (\delta^2 y) \cdot dx + \delta y_b \cdot \delta b - \delta y_a \cdot \delta a +$
$\partial y_b \cdot (\delta b)^2 - \partial y_a \cdot (\delta a)^2 + y_b \cdot \delta^2 b - y_a \cdot \delta^2 a$ *);

VIII. Iſt f eine Funktion von x, oder von x und y, oder von x, y und z, und gehen dieſe letzteren in die Reihen $x_\infty$, $y_\infty$, $z_\infty$ über, ſo geht f nach (I. II. III.) ebenfalls in eine ſolche Reihe $f_\infty$ über, deren (Variations-) Koeffizienten hier durch $\delta f$, $\delta^2 f$, $\delta^3 f$, ꝛc. bezeichnet ſeyn mögen. — Sind nun etwa x, y, z, und vielleicht auch $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$, $\delta^2 x$, $\delta^2 y$, $\delta^2 z$, ꝛc. ſelbſt noch Funktionen von t, und denkt man ſich zuletzt noch t in

$$t_\infty, \text{ d. h. in } t + \varkappa \cdot \delta t + \frac{\varkappa^2}{2!} \cdot \delta^2 t + \frac{\varkappa^3}{3!} \cdot \delta^3 t + \cdots$$

übergehend, ſo wird die Reihe, in welche f nun übergeht, wiederum anders. Bezeichnet man ſie durch $f_{(\infty)}$ und die (Varia-

*) Wo $y_b$, $y_a$, $\partial y_b$, $\partial y_a$ das bedeuten, was aus $y_x$ und $\partial y_x$ hervorgeht, wenn b, a ſtatt x geſetzt werden, während $\partial y_b$, $\partial y_a$ ebenfalls das bedeuten, was aus $\partial y$, im Falle ſolches eine Funktion von x iſt, hervorgeht, wenn b, a ſtatt x geſetzt werden.

tions-) Koeffizienten dieſer letztern, um ſie von den kurz vorher betrachteten zu unterſcheiden, durch $\delta(f)$, $\delta^2(f)$, $\delta^3(f)$, ꝛc. ꝛc., ſo findet man

1) $\delta(f) = \delta f + \partial f_{(t)} \cdot \delta t$;

2) $\delta^2(f) = \delta^2 f + 2\partial(\delta f)_t \cdot \delta t + \partial^2 f_{(t)} \cdot (\delta t)^2 + \partial f_{(t)} \cdot \delta^2 t$ *);

u. ſ. w. f.

IX. Iſt f irgendwie zuſammengeſetzt, und variiren die Beſtandtheile unter der Vorausſetzung und mit der Einſchränkung, daß $f_x$ ſo wie $f_\infty$ allemal Null, oder doch Konſtant (d. h. $f_x = f$) ſeyn ſoll, ſo hat man nothwendig

$$\delta f = 0; \quad \delta^2 f = 0, \quad \delta^3 f = 0, \text{ ꝛc. ꝛc.}$$

Dieſe IX Nummern enthalten die wichtigſten Einzelfälle der Variations-Rechnung. — Sollten die Fälle noch zuſammengeſetzter ſeyn, ſo laſſen ſich die Variations-Koeffizienten aus den hier entwikkelten jedesmal leicht zuſammenſetzen.

Was aber die hier aufgezählten Beyſpiele betrifft, ſo gehen die Reſultate alle aus dem im vorhergehenden (§. 54.) Geſagten hervor, nämlich, daß $\delta f$ der Werth von $\delta f_x$ iſt für $x = 0$; und daß eben ſo $\delta^2 f$, $\delta^3 f$, ꝛc. ꝛc. die Werthe von $\delta^2 f_x$, $\delta^3 f_x$, ꝛc. ꝛc. ſind für $x = 0$.

Die Fälle (I. II. III.) laſſen ſich noch insbeſondere ſo anſehen: da nämlich z. B. in (III.) $f_x = f_{x_x, y_x, z_x}$ iſt, ſo kann man ſich in $f_{x,y,z}$ unter x, y, z bereits dieſe $x_x$, $y_x$, $z_x$ vorgeſtellt denken; dann $f_{x,y,z}$ unter dieſer letzteren Vorausſetzung nach allem x differenziiren (nach den Formeln des §. 11.), ſtatt der Differenzial-Koeffizienten $\delta x_x$, $\delta y_x$, $\delta z_x$, ꝛc. aber ſogleich die für $x = 0$ hervorgehenden Werthe $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$, ꝛc. ꝛc. ſetzen, während für $x = 0$ die $x_x$, $y_x$, $z_x$ ſich wieder auf die bloßen x, y, z zurückziehen, ſo daß in den End-Reſultaten x, y, z nicht mehr $x_x$, $y_x$, $z_x$ vorſtellen, ſondern das, was ſie wirklich ſind. Nach dieſer Anſicht geſchieht das Variiren genau nach denſelben Regeln, nach welchen das Differenziiren dem (§. 11.) gemäß ſtatt findet.

Was dagegen die Fälle (IV. — VI.) betrifft, ſo gehen ſie insbeſondere aus den Sätzen (§. 10. und §. 38. I.) hervor, nach denen es einerley iſt, ob

*) Differenziirt man nämlich $\delta f_{(t)}$ nach allem x, ſo kann man erſtlich nach dem x differenziiren, welches in x, y, z ſteckt [und dies giebt, nach unſerer jetzigen Bezeichnung $\partial \delta f_{(t)}$ oder $\partial(\delta f)_{(t)}$], dann aber nach dem x, welches in t ſelbſt noch ſteckt (dies letztere giebt aber $\partial^2 f_{(t)} \cdot \delta t$); daher hat man (wie in 1.) $\delta(\partial f_{(t)}) = \delta \cdot \partial f_t + \partial^2 f_{(t)} \cdot \delta t$.

man zuerst nach $x$ und dann nach $\varkappa$, oder in umgekehrter Ordnung differenziirt, oder differenziirt und integrirt, wenn nur, im letztern Fall, die Grenzen des Integrals nicht selbst noch veränderlich sind.

Der Fall (VII.) geht aus (§. 38. II.) hervor.

Der Fall (VIII.) geht daraus hervor, daß der Differenzial-Koeffizient nach allem $x$, allemal gleich ist der Summe der Differenzial-Koeffizienten, welche nach dem $x$ genommen sind, das in einzelnen beliebig genommenen Theilen vorkommt, wenn nur zuletzt nach allem $x$ wirklich differenziirt sich findet (vgl. §. 11.). In dieser Ansicht steckt aber, genau genommen, auch der Fall (VII.), so wie auch noch die Fälle (II. und III.) darin stekken.

Ist aber eine nach $x$ fortlaufende Reihe, wie z. B. die für $f_{x-i}$ existirende der Null gleich für jedes $x$, so ist auch jeder einzelne der Koefficienten dieser Reihe nothwendig der Null gleich, und dies sagt der Satz (IX.).

## §. 56.

In den Rechnungen der (§§. 54. 55.) ist $x$ beliebig groß oder beliebig klein. In der nachfolgenden Anwendung denken wir uns aber $x$ allemal unendlich-klein (vgl. §. 20.).

1) Soll nämlich, während $t$ ganz unabhängig gedacht ist, eine Rechnungs-Form hingestellt werden, welche zu gleicher Zeit die beiden Werthe von $t$ ausdrückt, die dem $t$ nächst vorangehen und nächst folgen, so schreibe man bloß $t \pm x$, denke sich $x$ unendlich-klein, und abwechselnd negativ und positiv. Schreibt man in diesem Falle

$$t_x \text{ oder } t + x \cdot \delta t + \frac{x^2}{2!} \cdot \delta^2 t + \frac{x^3}{3!} \cdot \delta^3 t \text{ ꝛc. ꝛc.} \quad \text{statt } t \pm x,$$

so muß man $\delta t = 1$, dagegen $\delta^2 t = \delta^3 t = \text{ꝛc. ꝛc.} = 0$ sich denken.

2) Ist aber $x$ von $t$ abhängig, etwa eine Funktion von $t$, so nehmen die Werthe von $x$, welche zu den nächstanliegenden Werthen $t \pm x$ von $t$ gehören, nach dem Taylor'schen Lehrsatze die Form einer nach ganzen Potenzen von $x$ fortlaufenden Reihe an. Bezeichnet man solche durch

$$x_x \text{ oder } x + x \cdot \delta x + \frac{x^2}{2!} \cdot \delta^2 x + \frac{x^3}{3!} \cdot \delta^3 x + \cdots,$$

so ist dasmal

$\delta x = \delta x_t$, $\delta^2 x = \delta^2 x_t$, $\delta^3 x = \delta^3 x_t$ *) ꝛc. ꝛc.

3) Iſt f von x und von t abhängig, und etwa wieder x von t abhängig, wie in (2.), ſo ſind die zu den nächſt-anliegenden Werthen $t + \varkappa$ von t gehörigen Werthe von f offenbar ebenfalls in eine nach ganzen Potenzen von $\varkappa$ fortlaufende Reihe zu entwikkeln, welche durch

$$f_\varkappa \text{ oder } f + \varkappa \cdot \delta f + \frac{\varkappa^2}{2!} \cdot \delta^2 f + \frac{\varkappa^3}{3!} \cdot \delta^3 f + \cdots$$

bezeichnet werden kann, und wo man nun die durch $\delta f$, $\delta^2 f$, $\delta^3 f$, ꝛc. ꝛc. bezeichneten Koeffizienten auf dem Wege der Variations-Rechnung, alſo der (§§. 54. u. 55.) finden und entwikkeln muß.

4) Iſt f irgend wie von t, x, y, z, ꝛc. abhängig, und dieſe t, x, y, z wiederum entweder von einander unabhängig, oder ſelbſt wieder irgend wie von einander abhängig, — ſo laſſen ſich die den unabhängigen t, x, ꝛc. nächſt anliegenden Werthe durch die Reihen $t_\varkappa$, $x_\varkappa$, ꝛc. ꝛc., aber auch die zugehörigen Werthe der abhängigen Veränderlichen y, z, ꝛc. durch die Reihen $y_\varkappa$, $z_\varkappa$, ꝛc. bezeichnen, und die (Variations-) Koeffizienten $\delta y$, $\delta z$, $\delta^2 y$, $\delta^2 z$, ꝛc. ꝛc. werden dann von denen $\delta t$, $\delta x$, $\delta^2 t$, $\delta^2 x$, ꝛc. ꝛc. abhängig ſeyn und nach (§§. 54. 55.) gefunden werden können. Aber auch die zugehörigen, dem f nächſt anliegenden Werthe von f, werden durch die Reihe $f_\varkappa$ vorgeſtellt, und deren (Variations-) Koeffizienten $\delta f$, $\delta^2 f$, ꝛc. werden wiederum nach den (§§. 54. 55.) in die erſtern $\delta t$, $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$, ꝛc. auszudrücken ſeyn.

5) Die Reihe $f_\varkappa$ ſtellt alſo zwei dem f nächſt anliegende Werthe, oder 2 Reihen ſolcher Werthe von f vor, welche man erhält, wenn $\varkappa$ unendlich-klein und abwechſelnd negativ und poſitiv gedacht iſt, und welche zu nächſt größern und nächſt kleinern Werthen der unabhängigen Veränderlichen gehören. — Sind nun dieſe Werthe $f_\varkappa$ alle beide größer wie f ſelbſt, ſo nennt man f in Bezug auf dieſe beiden Werthe $f_\varkappa$ ein Minimum (Kleinſtes). Sind aber alle beide Werthe $f_\varkappa$ kleiner

*) Wäre etwa bloß $x = a \cdot t$, ſo wäre $\delta x_t = a$, $\delta^2 x_t$, $\delta^3 x_t$, $\delta^4 x_t$, ꝛc. dagegen $= 0$, und dann wäre $\delta x = a$, $\delta^2 x = \delta^3 x = \delta^4 x =$ ꝛc. ꝛc. $= 0$.

nur als f, so nennt man f selbst in Bezug auf diese beiden Werthe $f_x$ ein Maximum (Größtes). Sind aber die beiden, zu positivem und negativem aber unendlich-kleinem x gehörigen Werthe von f so, daß der eine davon größer als f, der andere aber kleiner als f ist, so wird dasmal f selbst weder ein Minimum noch ein Maximum genannt.

6) Es ist also f ein Minimum in Bezug auf diese beiden Werthe $f_x$, wenn die Differenz

$$(\odot) \quad \ldots \; f_x - f, \text{ d. h. die Reihe } x \cdot \delta f + \frac{x^2}{2!} \cdot \delta^2 f + \frac{x^3}{3!} \cdot \delta^3 f + \ldots$$

mit x selbst das (+ oder —) Zeichen nicht wechselt, sondern jedesmal positiv ist; dagegen ist f ein Maximum, wenn dieselbe Differenz oder Reihe $(\odot)$ ebenfalls mit x selbst das (+ oder —) Zeichen nicht wechselt, aber jedesmal negativ ist.

7) Weil jedoch x unendlich-klein gedacht ist, so ändert jede nach x fortlaufende Reihe ihr (+ oder —) Zeichen, wenn das erste Glied derselben, welches nicht Null ist, dieses Zeichen ändert. Also muß

$$\delta f = 0$$

seyn, wenn f ein Maximum oder Minimum soll werden können, in Bezug auf diese beiden Werthe $f_x$; weil, wenn $\delta f$ nicht Null ist, die Reihe $(\odot)$ mit dem Gliede $x \cdot \delta f$, also mit x zugleich ihr (+ oder —) Zeichen ändern würde.

8) Die Gleichung $\delta f = 0$ kann oft in 2 und mehr Gleichungen zerfallen, der Natur der einzelnen Aufgabe zu Folge. Hat man aber aus dieser Gleichung $\delta f = 0$ alle Werthe der unabhängigen Veränderlichen gefunden, welche durch dieselbe bestimmt werden können, so substituire man diese in $\delta^2 f$. — Wird dann $\delta^2 f$ negativ, so ist f gegen $f_x$ ein Maximum; wird aber $\delta^2 f$ positiv, so ist f gegen $f_x$ ein Minimum.

9) Sollten dieselben Werthe, welche $\delta f = 0$ machen, auch $\delta^2 f$ zu Null machen, so müßte man die Untersuchung bis zu $\delta^3 f$ fortführen, übrigens jedesmal die in (6.) erwähnte Entscheidung herbeizuführen trachten.

10) Weil für gewisse Werthe der Unabhängigen, die durch

$\delta^2 f$, $\delta^3 f$, ꝛc. bezeichneten Koeffizienten der für $f_x$ gefundenen Maclaurin'schen Reihe auch die Form $\frac{1}{0}$ annehmen können (vgl. Anmerk. zu §. 19.), so wird nun in diesem Falle die Differenz

$$f_x - f$$

direkt untersuchen, ob sie für die aus $\delta f = 0$ hervorgegangenen Werthe der Unabhängigen immerfort positiv oder immerfort negativ bleibt, nöthigenfalls also die nach gebrochenen Potenzen von $x$ fortlaufende Reihe auffinden, in welche sich (für diese Ausnahmswerthe der Unabhängigen) die Differenz $f_x - f$ wird entwickeln lassen.

11) Und weil die Werthe der Unabhängigen, welche $f_x - f$ immerfort positiv oder immerfort negativ machen, man mag $x$ positiv oder negativ (nur jedesmal unendlich klein) nehmen, — weil also diese Werthe der Unabhängigen auch bereits $\delta f$ auf die Form $\frac{1}{0}$ bringen können nach (Anmerk. zu §. 19.), so wird man, um keine Werthe zu übergehen, welche $f$ gegen $f_x$ zu einem Maximum oder Minimum machen können, auch jedesmal noch

$$\delta f = \tfrac{1}{0}$$

d. h. den Nenner von $\delta f$ der Null gleich setzen müssen, und die hieraus sich ergebenden Werthe prüfen, ob sie $f_x - f$ immerfort positiv oder immerfort negativ machen.

Anmerk. Näheres findet man in der „Lehre vom Größten und Kleinsten", Berlin 1824; ferner im „System der Mathem." Vter und VIIter Theil.

# B. Höhere Geometrie.

# Höhere Geometrie.

## Erstes Kapitel.

### Von den Projektionen, Koordinaten und von der Verwandlung dieser letzteren.

§. 1.

I. Ein Punkt M wird auf eine gegebene Ebene E projicirt, wenn man sich von M aus, auf die Ebene E eine senkrechte Linie $MM_1$ herabgefällt denkt; der Punkt $M_1$ in der Ebene E heißt die Projektion des Punktes M auf diese Ebene E.

II. Ein Punkt M wird dagegen auf eine gerade Linie L projicirt, wenn man sich durch M und L eine Ebene denkt, und in dieser Ebene von M aus auf L eine senkrechte Linie $MM'$ zieht; der Punkt $M'$ heißt dann die Projektion des Punktes M auf die Linie L.

III. Eine gerade Linie MN wird auf eine Ebene E oder auf eine gerade Linie L projicirt, wenn man ihre Endpunkte M und N nach (I.) oder nach (II.) auf die Ebene E, oder auf die Linie L projicirt. — Sind dann $N_1$ und $N'$ für den Punkt N, was in (I. oder II.) $M_1$ und $M'$ für den Punkt M, so heißt die gerade Linie $M_1N_1$ die Projektion der Linie MN auf die Ebene E; während die Gerade $M'N'$ die Projektion der Linie MN auf die Linie L genannt wird. — Dabei ist es nicht nöthig, daß die Linie MN und die Linie L, auf welche erstere projicirt gedacht wird, in einer und derselben Ebene liegen.

IV. Denkt man sich in einer Ebene zwei auf einander senkrechte Axen (Fig. 1.) OX und OY, und in derselben Ebene

einen Punkt M, so wie seine Projektionen M′ und M″ auf diese Axen, so nennt man die Linien OM′ oder MM″, und OM″ oder MM′, die Koordinaten des Punktes M. — Drückt man sie aber in Zahlen aus und setzt man denselben noch ein (+) oder (—) Zeichen vor, um anzudeuten, daß der Punkt M rechts oder links von OY, oben oder unten von OX ist, so hat man die positiven oder negativen Zahlen, welche wir die Koordinaten-Werthe nennen wollen. Ferner sagt man auch: „der Koordinaten-Werth des Punktes M ist Null," wenn M in der Axe selber liegt. — Und will man beide Koordinaten von einander unterscheiden, so nennt man die eine die Abscisse, die andre die Ordinate.

Sind nun x und y die Koordinaten-Werthe des Punktes M, und bezeichnet man die Winkel

MOX und MOY durch $\alpha$ und $\beta$ *),

so ist allemal

1) $x = OM \cdot \cos\alpha$; 2) $y = OM \cdot \cos\beta$;

so daß x und $\cos\alpha$, desgleichen y und $\cos\beta$, zugleich positiv, negativ oder Null werden. — Und da ferner, x und y mögen positiv, negativ oder Null seyn, allemal

3) $x^2 + y^2 = OM^2$

ist, so folgt, wenn man aus (1. 2. u. 3.) x und y eliminirt, noch

4) $\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 = 1$,

wo die Winkel $\alpha$, $\beta$, spitze, stumpfe oder rechte Winkel sind.

Ferner folgt aus (1. und 2.), wenn man OM eliminirt,

5) $\frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = \frac{y}{x}$.

Weil jedoch allemal, wo auch der Punkt M liegen mag, entweder

$\alpha + \beta = 90^0$, oder $\alpha - \beta = 90^0$, oder $\beta - \alpha = 90^0$,

oder $360 - (\alpha + \beta) = 90^0$

ist, so ist allemal

*) In dieser und in allen folgenden Untersuchungen werden immer nur spitze, rechte oder stumpfe also immer hohle Winkel verstanden, nie erhabene.

mit

6) $\cos\beta = \pm\sin\alpha$, je nachdem $\beta$ { spitz / stumpf }.

Wenn man also diesen Werth in (5.) substituirt, so hat man allemal

7) $tg\,\alpha = \pm\frac{y}{x}$, je nachdem $\beta$ { spitz / stumpf } *).

V. (Aufgabe, im körperlichen Raume.) Denkt man sich 3 auf einander senkrechte Axen OX, OY und OZ (Fig. 2.), und dann irgend wo im Raume einen Punkt $M_1$ und diesen auf die 3 Ebenen XOY, XOZ, YOZ projicirt, so daß $M_1'$, $M_1''$ und $M_1'''$ seine 3 Projektionen sind, so hat man 3 neue Ebenen $M_1'MM_1'''$, $M_1''MM_1'$ und $M_1'''MM_1''$, welche bezüglich mit den 3 vorhergenannten parallel laufen, so daß alle 6 Ebenen ein rechtwinkliches Parallelepipedum bilden.

In diesem Körper steht aber die Kante $OM'$ senkrecht auf der Wand $MM_1'M'M_2'$, also auch senkrecht auf der Linie $MM'$. Aus demselben Grunde steht die Kante $OM''$ senkrecht auf $MM''$, und die Kante $OM'''$ senkrecht auf $MM'''$. — Diese 3 auf einander senkrechten Kanten $OM' = MM_3' = M_1M''' = M_2M''$, ferner $OM'' = MM_2'' = M_1M' = M_3M'''$, und noch $OM''' = MM_1''' = M_2M'' = M_3M'$ heißen nun wieder die drei Koordinaten des Punktes M. Drückt man sie aber in Zahlen aus, und setzt man diesen noch ein (+) oder (—) Zeichen vor, um anzudeuten, daß der Punkt M rechts oder links der Ebene YOZ, diesseits oder jenseits der Ebene XOZ, ober- oder unterhalb der Ebene XOY liegt, so hat man die Koordinaten-Werthe des Punktes M,

*) Zählt man die Winkel $\alpha$ von OX in der (Bogen-) Richtung nach OY hin, und in derselben (Bogen-) Richtung weiter, von 0° bis zu 360°, so ist allemal, es mag $\beta$ spitz oder stumpf seyn,

$$\cos\beta = +\sin\alpha = \sin\alpha;$$

folglich wird dann in jedem Falle

$$tg\,\alpha = +\frac{y}{x} = \frac{y}{x}.$$

Wir nehmen aber den Winkel $\alpha$, wie in der vorstehenden Note gesagt ist.

von denen einer oder der andere auch Null werden kann, im Falle der Punkt M in einer dieser Koordinaten-Ebenen selbst liegen sollte.

Bezeichnet man diese 3 Koordinaten-Werthe des Punktes M durch x, y und z, und setzt man die Winkel

$$MOX = \alpha, \quad MOY = \beta \text{ und } MOZ = \gamma,$$

so hat man allemal, vermöge der rechtwinklichen Dreiecke,

1) $x = OM \cdot \cos\alpha$; 2) $y = OM \cdot \cos\beta$; 3) $z = OM \cdot \cos\gamma$,

so daß z. B. x und $\cos\alpha$ zu gleicher Zeit positiv, negativ oder Null werden; desgleichen y und $\cos\beta$; und eben so werden auch z und $\cos\gamma$ zu gleicher Zeit positiv, negativ oder Null seyn.

Weil aber $OM_1^2 = x^2 + y^2$, und $OM^2 = OM_1^2 + MM_1^2$ ist, so hat man allemal

4) $$OM^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

und dies gilt auch dann noch, wenn x, y oder z beliebig positiv und negativ seyn sollten. Eliminirt man endlich aus den Gleichungen (1. — 4.) die x, y und z, so erhält man noch

5) $$\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1,$$

die Winkel $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ mögen spitz, recht oder stumpf seyn. Sind also $\alpha$ und $\beta$ gegeben, so ist der Winkel $\gamma$ zwar nicht mit gegeben, aber doch $(\cos\gamma)^2$, so daß nur noch unbestimmt bleibt, ob $\cos\gamma$ positiv oder negativ, d. h. ob $\gamma$ spitz oder stumpf ist.

VI. Ist (in der Ebene) (Fig. 1.) alles wie in (IV.), aber außerdem in derselben Ebene noch ein Punkt N gegeben, durch seine Koordinaten-Werthe $x'$ und $y'$. Werden ferner die Winkel

$$NOX = \alpha' \text{ und } NOY = \beta'$$

gesetzt, so hat man noch (genau nach IV.)

1) $x' = ON \cdot \cos\alpha'$; 2) $y' = ON \cdot \cos\beta'$;

3) $$ON^2 = x'^2 + y'^2;$$

und 4) $$\cos\alpha'^2 + \cos\beta'^2 = 1,$$

so wie 5) $$\frac{\cos\beta'}{\cos\alpha'} = \frac{y'}{x'}$$

und 6) $tg\,\alpha' = \pm\frac{y'}{x'}$, je nachdem $\beta'$ { spitz / stumpf }.

endlich OD, OY und OV mit einander bilden, nach derselben Formel:

2) $\cos\alpha' = \cos\varphi \cdot \cos(90^0 + \psi) + \sin\varphi \cdot \sin(90^0 + \psi) \cdot \cos\gamma''$;

3) $\cos\beta = \cos(90^0 + \varphi) \cdot \cos\psi + \sin(90^0 + \varphi) \cdot \sin\psi \cdot \cos\gamma''$;

4) $\cos\beta' = \cos(90^0 + \varphi) \cdot \cos(90^0 + \psi) + \sin(90^0 + \varphi) \cdot \sin(90^0 + \psi) \cdot \cos\gamma''$.

Um den Winkel $\gamma = \text{UOZ}$ zu bestimmen, betrachte man das körperliche Dreieck, welches OU, OZ und OD mit einander machen. Da OZ senkrecht auf der Ebene XOY steht, so steht OZ auch senkrecht auf OD, und die Ebene ZOD senkrecht auf der Ebene XOY; also ist der Winkel unsers jetzigen körperlichen Dreiecks, der an OD liegt, $= 90^0 - \gamma''$, die ihm gegenüber liegende Seite $\text{UOZ} = \gamma$; die beiden andern Seiten UOD und ZOD sind dagegen bezüglich $\psi$ und $90^0$; und dieselbe Formel giebt daher

5) $\cos\gamma = \cos\psi \cdot \cos 90^0 + \sin\psi \cdot \sin 90^0 \cdot \cos(90^0 - \gamma'')$.

Desgleichen findet sich durch ganz analoge Betrachtung

6) $\cos\gamma' = \cos(90^0 + \psi) \cdot \cos 90^0 + \sin(90^0 + \psi) \cdot \sin 90^0 \cdot \cos(90^0 - \gamma'')$.

Und weil OW senkrecht steht auf der Ebene UOV, so steht OW auch senkrecht auf OD, und die Ebene WOD senkrecht auf der Ebene UOV, also daß der Winkel an OD, in dem körperlichen Dreieck, welches von OD, OW und OX gebildet wird, $= 90^0 + \gamma''$ ist; die diesem Winkel gegenüber liegende Seite ist WOX oder $\alpha''$, und die beiden andern Seiten sind WOD oder $90^0$ und XOD oder $\varphi$; und man hat daher

7) $\cos\alpha'' = \cos 90^0 \cdot \cos\varphi + \sin 90^0 \cdot \sin\varphi \cdot \cos(90^0 + \gamma'')$.

Und auf ganz analoge Weise zeigt sich in dem von OD, OW und OY gebildeten Dreieck, in welchem der Winkel an OD, $= 90^0 + \gamma''$ ist,

8) $\cos\beta'' = \cos 90^0 \cdot \cos(90^0 + \varphi) + \sin 90 \cdot \sin(90^0 + \varphi) \cdot \cos(90^0 + \gamma'')$.

und MN ihre Werthe aus (VI. 3.) und aus VII. 3. und 3'.) so ergiebt sich

$$\cos\delta = \frac{x \cdot x' + y \cdot y'}{OM \cdot ON} = \frac{x}{OM} \cdot \frac{x'}{ON} + \frac{y}{OM} \cdot \frac{y'}{ON}$$

d. h. wenn man statt x und x', y und y', ihre Werthe aus (IV. 1. 2.) und (VI. 1. 2.) substituirt,

7) $\cos\delta = \cos\alpha \cdot \cos\alpha' + \cos\beta \cdot \cos\beta'$ *).

Ist $\delta$ ein rechter Winkel, ist also $\cos\delta = 0$, so hat man noch

8) $\cos\alpha \cdot \cos\alpha' + \cos\beta \cdot \cos\beta' = 0.$

VII. Gerades rechtwinkliges Axen-System. Ist aber alles wie in (V.) und außerdem wiederum noch ein zweiter Punkt N gegeben durch seine Coordinaten-Werthe x', y' und z', werden dann durch M drei neue Axen MX', MY', MZ' parallel mit den alten OX, OY, OZ gelegt, so sind die neuen Koordinaten-Werthe desselben Punktes N nothwendig

$$x' - x, \quad y' - y \text{ und } z' - z.$$

Werden nun die Winkel

$$NOX = \alpha', \quad NOY = \beta', \quad NOZ = \gamma'$$

gesetzt, und nennt man die 3 Winkel, welche die Richtung MN (nicht die entgegengesetzte Richtung NM) mit diesen 3 neuen Axen MX', MY', MZ' macht, bezüglich

$$\alpha_0, \quad \beta_0 \text{ und } \gamma_0,$$

so hat man außer den Gleichungen (1.—5. der V.) noch folgende Gleichungen

1) $x' = ON \cdot \cos\alpha'$; 2) $y' = ON \cdot \cos\beta'$;

3) $z' = ON \cdot \cos\gamma'$;

4) $ON^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$;

5) $\cos\alpha'^2 + \cos\beta'^2 + \cos\gamma'^2 = 1$;

und

1') $x' - x = MN \cdot \cos\alpha_0$; 2') $y' - y = MN \cdot \cos\beta_0$;

3') $z' - z = MN \cdot \cos\gamma_0$;

*) Diese Formel stellt in gleicher Zeit den Beweis der Sätze
weil $\alpha = \alpha$ und $\alpha' = \alpha'$ und $\cos 0 = 1$ und $\cos 90° = 0$ ist.

und r immer absolut (d. h. nicht negativ), so ist für jede Lage des Punktes M, also wenn x, y positiv, negativ oder Null sind, doch allemal

1) $r \cdot \cos\varphi = x$, und 2) $r \cdot \sin\varphi = y$;

und natürlich dann auch, wenn $\varphi$ eliminirt wird,

3) $x^2 + y^2 = r^2$,

welche letztere Gleichung jedoch aus (§. 1. IV.) schon bekannt ist.

Und wollte man statt M. MOX $= \varphi$ lieber den Nebenwinkel $= \theta$ einführen, so hätte man natürlich

4) $x = -r \cdot \cos\theta$; 5) $y = r \cdot \sin\theta$.

VII. (Dasselbe im körperlichen Raume.) Aber auch im körperlichen Raume kann man statt der rechtwinklichen Koordinaten-Werthe x, y, z eines Punktes M (Fig. 2.), die sich auf die 3 auf einander senkrechten Axen OX, OY, OZ beziehen, Polar-Koordinaten einführen, die jedoch hier von verschiedener Art seyn können.

A. Ist nämlich alles wie im (§. 1. V.) vorausgesetzt, so kann man erstlich den Winkel $\theta$ in Rechnung bringen, welchen die Ebene MOX mit der Ebene XOY macht, dann den Winkel MOX $= \varphi$, und endlich die Linie OM $= r$, welche wiederum der Radius-Vektor genannt wird. — Nimmt man $\theta$ von 0 bis $2\pi$, dagegen $\varphi$ von 0 bis $\pi$, und r absolut (d. h. nie negativ), so ist für jede beliebige Lage des Punktes M, also wenn die Koordinaten-Werthe x, y, z positiv, negativ oder Null sind, wenn nur r absolut, d. h. nicht negativ gedacht wird

1) $x = r \cdot \cos\varphi$, 2) $y = r \cdot \sin\varphi \cdot \cos\theta$, 3) $z = r \cdot \sin\varphi \cdot \sin\theta$.

Dabei ist, wie schon bekannt, aber aus diesen 3 Gleichungen auf's neue hervorgeht,

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Es ist nämlich $y = \pm M'M_1 = MM' \cdot \cos\theta$ und eben so

$$z = \pm MM_1 = MM' \cdot \sin\theta;$$

zuletzt aber $MM' = OM \cdot \sin\varphi = r \cdot \sin\varphi$; und daraus folgern die obigen Gleichungen (1. — 3.) ohne weiteres.

B. Eine zweite Gattung Polar-Koordinaten hat man, wenn man den Winkel $M_1OX = \vartheta$, dann den Winkel

Nennt man daher $\gamma$, $\beta$, $\alpha$ die drei Winkel, welche eine Ebene E mit den drei Ebenen XOY, XOZ, YOZ macht, so hat man nothwendig nach (§. I. V. 5.)

$$\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1.$$

III. Denkt man sich irgend eine Figur f in einer Ebene E, und alle Punkte ihres Umfanges auf irgend eine Ebene XOY projicirt, so entsteht auf letzterer Ebene eine zweite Figur $f_1$, welche man die Projektion der Figur f auf diese Ebene XOY nennt. Ist nun $\gamma$ der Winkel, welchen die Ebenen E und XOY mit einander machen, so ist allemal

$$f_1 = f \cdot \cos\gamma.$$

Von Rechtecken mCnp, rpBq, AaBs, ꝛc. ꝛc. (Fig. 3.), deren Seiten zum Theil mit der Durchschnitts-Linie DS der Ebenen E und XOY parallel laufen, zum Theil auf dieser Durchschnitts-Linie senkrecht stehen, gilt der Satz offenbar, weil dann das Rechteck f und seine Projektion $f_1$ gleiche Grundlinien b, aber verschiedene Höhen h und $h_1$ haben, jedoch so daß $h_1 = h \cdot \cos\gamma$ ist. Also gilt der Satz auch von den Hälften ABr, ꝛc. ꝛc. dieser Rechtecke, und dann auch von jedem beliebigen Dreieck ABC, weil jedes Dreieck in Bezug auf die beliebige Durchschnitts-Linie DS aus lauter solchen Rechtecken und solchen halben Rechtecken durch Addition oder Subtraktion zusammengesetzt, und $\cos\gamma$ zuletzt als ein gemeinschaftlicher Faktor herausgesetzt werden kann. — Aber nun gilt der Satz auch ganz allgemein von jeder Figur f, weil jede Figur in Dreiecke zerlegbar ist.

IV. Denkt man sich nun in einer Ebene E, welche mit den 3 Ebenen XOY, XOZ und YOZ die Winkel $\gamma$, $\beta$, $\alpha$ macht, eine beliebige Figur f, und diese Figur auf die 3 letztgenannten Ebenen projicirt; bezeichnet man ferner diese 3 Projektionen durch $f_1$, $f_2$ und $f_3$, so hat man nach (III.)

1) $f_1 = f \cdot \cos\gamma$; $f_2 = f \cdot \cos\beta$; $f_3 = f \cdot \cos\alpha$.

Quadrirt und addirt man daher diese 3 Gleichungen, so erhält man

2) $f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 = f^2$;

d. h. das Quadrat des Inhalts der Figur f ist gleich der Summe der Quadrate der Inhalte ihrer 3 Projektionen, auf beliebige 3 auf einander senkrechte Ebenen gedacht.

## §. 3.

I. Wenn zwei gerade Linien H und L nicht in einer und derselben Ebene liegen, so können sie auch keinen Winkel mit einander bilden. Wir aber sagen in der Folge: zwei solche Linien H und L, die gar nicht in einer Ebene liegen, bilden unter sich den Winkel $\mu$, wenn $\mu$ der Winkel ist, den eine durch einen Punkt p von H mit der Linie L parallel gedachte Linie pl, mit der Linie H bildet *). — In diesem Sinne kann man also im (§. 1. VII.) sagen: $\alpha_0$, $\beta_0$, $\gamma_0$ seyen die Winkel, welche die Richtung MN (aber nicht die entgegengesetzte Richtung NM) mit den 3 Axen OX, OY, OZ macht, obgleich sie im Allgemeinen keiner dieser 3 Axen begegnen wird.

II. Sind M, N, P, Q beliebige und beliebig viel Punkte, entweder alle in einer Ebene, oder im Raume beliebig vertheilt, und denkt man sich die Linien MN, NP, PQ, QM gezogen; sind ferner $\mu$, $\nu$, $\pi$, $\varrho$ die Winkel, welche diese Richtungen MN, NP, PQ, QM, (wo man nicht die entgegengesetzten Richtungen, z. B. nicht PN statt der Richtung NP nehmen darf,) mit einer beliebigen Geraden OX (und nicht mit der entgegengesetzten Richtung XO) macht, so ist allemal

$$MN \cdot \cos\mu + NP \cdot \cos\nu + PQ \cdot \cos\pi + QM \cdot \cos\varrho = 0.$$

Denn man denke sich zuerst die Punkte M, N, P, Q mit OX in einer und derselben Ebene, wie etwa in (Fig. 11.), so hat man

$MN \cdot \cos\mu = M'N'$, weil $\mu$ hier spitz gedacht ist,
$NP \cdot \cos\nu = -N'P'$, weil $\nu$ nach der Annahme stumpf ist,
$PQ \cdot \cos\pi = P'Q'$, weil $\pi$ spitz genommen werden muß,
$QM \cdot \cos\varrho = -Q'M'$, weil $\varrho$ stumpf gedacht werden muß;

und hier fällt nun die Richtigkeit des Satzes in die Augen.

Aber gerade so bleibt die Sache, wenn M, N, P, Q beliebig im Raume vertheilt sind, und OX wiederum beliebig im Raume liegt; weil sich jede

*) Da alle Linien, welche mit L parallel gedacht sind, auch unter sich parallel seyn müssen, so folgt, daß wenn man den Punkt p in H immer anders und anders nimmt, der Winkel $\mu$ doch immer derselbe bleiben wird.

Linie z. B. MN auf die OX gerade so projicirt, wie auf die durch einen Punkt von MN gelegte Parallele mit OX. Um dies letztere recht anschaulich zu machen, darf man sich nur durch die Punkte M und N Ebenen auf OX senkrecht gelegt denken. Diese sind mit einander parallel, ihr Abstand ist $= MN$; derselbe ist aber auch der Projektion von MN auf die durch M mit OX parallel gedachte Gerade gleich. Und beide senkrechten Abstände sind offenbar einander gleich.

III. Hat man wiederum in der Ebene zwei auf einander senkrechte Axen OX und OY (Fig. 4.), und sind x und y die Koordinaten irgend eines in derselben Ebene liegenden Punktes M; führt man ferner in derselben Ebene zwei neue auf einander senkrechte Axen OU und OV ein, dadurch daß man die Winkel $\alpha$, $\beta$ giebt, welche OU mit OX, OY macht, und die Winkel $\alpha'$, $\beta'$ giebt, welche OV mit OX, OY macht, so hat man erstlich nach (§. 1. VI. 8.), wenn in (§. 1. VI. 7.) VOU oder XOY statt $\delta$ gesetzt wird,

$$1) \quad \begin{cases} \cos\alpha \cdot \cos\alpha' + \cos\beta \cdot \cos\beta' = 0, \\ \cos\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha' \cdot \cos\beta' = 0, \end{cases}$$

so wie ohnedies allemal (nach §. 1. IV. 4.)

$$2) \quad \cos\alpha^2 + \cos\beta^2 = 1 \text{ und } \cos\alpha'^2 + \cos\beta'^2 = 1.$$

Sind nun u, v die Koordinaten desselben Punktes M in Bezug auf diese neuen Axen OU und OV genommen, so ist, wenn man OP, PM und MQ auf OX projicirt, und bedenkt, daß die Winkel, welche diese Richtungen mit OX machen, bezüglich $\alpha$, $\alpha'$ und $180^0 - MOX$ sind, und daß

$$\cos(180^0 - MOX) = -\cos MOX = -\frac{x}{OM}$$

ist, nach dem so eben bewiesenen Satze (II.):

$$3) \quad u \cdot \cos\alpha + v \cdot \cos\alpha' - x = 0 \text{ oder } x = u \cdot \cos\alpha + v \cdot \cos\alpha';$$

und dann auch, wenn dieselben Linien auf OY projicirt werden,

$$4) \quad u \cdot \cos\beta + v \cdot \cos\beta' - y = 0 \text{ oder } y = u \cdot \cos\beta + v \cdot \cos\beta';$$

und diese zwei Gleichungen sind es daher, welche zwischen den alten Koordinaten x und y, und den neuen Koordinaten u und v eines und desselben Punktes M statt finden müssen. Dieselben zwei Gleichungen behalten aber auch ihre Gültigkeit, wenn

statt x, y, u, v, nicht die Koordinaten, sondern die Koordinaten-Werthe gesetzt werden *).

Denkt man sich OU und OV als die alten Axen und OX und OY als die neuen, so muß man auf denselben Wege, wenn OQ, QM und OM auf OU und OV projicirt werden, erhalten

5) $u = x \cdot \cos\alpha + y \cdot \cos\beta$,

6) $v = x \cdot \cos\alpha' + y \cdot \cos\beta'$.

Dieselben Resultate (5. 6.) erhält man aber auch, wenn man die Gleichungen (3. 4.) nach u und nach v algebraisch auflöst.

IV. (Dasselbe im körperlichen Raume.) Sind x, y, z die alten Koordinaten eines beliebigen Punktes M (Fig. 2.), wie in (§. 1. V.); denkt man sich aber 3 neue Koordinaten-Axen OU, OV, OW durch denselben Punkt O, wiederum auf einander senkrecht, übrigens aber beliebig, und gegeben durch die

---

*) Ist $\delta$ der Winkel, den OM und OX unter sich machen, und $\delta'$ der Winkel, den OM und OY unter sich bilden; sind ferner $\varepsilon$ und $\varepsilon'$ die Winkel, welche OM mit OU und OV bildet; so hat man nach (§. 1. VI. 7.)

1) $\cos\delta = \cos\varepsilon \cdot \cos\alpha + \cos\varepsilon' \cdot \cos\alpha'$,

2) $\cos\delta' = \cos\varepsilon \cdot \cos\beta + \cos\varepsilon' \cdot \cos\beta'$.

Setzt man nun der Kürze wegen OM $= r$, so hat man nach (§. 1. IV. 1. und 2.)

$$\cos\delta = \frac{x}{r}, \quad \cos\delta' = \frac{y}{r}, \quad \cos\varepsilon = \frac{u}{r}, \quad \cos\varepsilon' = \frac{v}{r},$$

wenn x, y, u, v die Koordinaten-Werthe vorstellen. Substituirt man aber diese letzteren Werthe statt $\cos\delta$, $\cos\delta'$, $\cos\varepsilon$, $\cos\varepsilon'$ in die Gleichungen (1. u. 2.), so ergeben sich sogleich die obigen Gleichungen des Textes, welche also ganz allgemein gelten. — Wir wählten im Texte die Vorstellung der Projektionen, in so ferne sie uns ein Gedächtniß-Hilfsmittel zu seyn scheint, um danach die Gleichungen schnell reproduciren zu können.

Hat man nicht mehr jeden Fall, sondern nur die Lage der Axen im Auge, wie sie gerade in (Fig. 4.) ist, so kann man $\beta = 90 - \alpha$, $\beta' = \alpha$ und $\alpha' = 90 + \alpha$ nehmen, und es ist dann

$$\cos\alpha' = -\sin\alpha, \quad \cos\beta = \sin\alpha \quad \text{und} \quad \cos\beta' = \cos\alpha;$$

und die Gleichungen zwischen x, y, u und v sehen in diesem Falle so aus, nämlich

$$x = u \cdot \cos\alpha - v \cdot \sin\alpha,$$

$$y = u \cdot \sin\alpha + v \cdot \cos\alpha,$$

desgleichen

$$u = x \cdot \cos\alpha + y \cdot \sin\alpha,$$

$$v = -x \cdot \sin\alpha + y \cdot \cos\alpha.$$

Winkel $\left\{\begin{matrix}\alpha, \beta, \gamma\\ \alpha', \beta', \gamma'\\ \alpha'', \beta'', \gamma''\end{matrix}\right\}$ welche $\left\{\begin{matrix}OU\\ OV\\ OW\end{matrix}\right\}$ mit den 3 Axen

OX, OY, OZ machen, so hat man erstlich nach (§. 1. V. 5.)

$$(A)\cdots\left\{\begin{matrix}\cos\alpha^2+\cos\beta^2+\cos\gamma^2 = 1\\ \cos\alpha'^2+\cos\beta'^2+\cos\gamma'^2 = 1\\ \cos\alpha''^2+\cos\beta''^2+\cos\gamma''^2 = 1\\ \text{und}\\ \cos\alpha^2+\cos\alpha'^2+\cos\alpha''^2 = 1\\ \cos\beta^2+\cos\beta'^2+\cos\beta''^2 = 1\\ \cos\gamma^2+\cos\gamma'^2+\cos\gamma''^2 = 1\end{matrix}\right\}$$

und dann noch nach (§. 1. VII. 8.), weil OU, OV, OW paarweise auf einander senkrecht stehen, und eben so auch OX, OX, OZ auf einander senkrecht stehen,

$$(B)\cdots\left\{\begin{matrix}\cos\alpha\cdot\cos\alpha'+\cos\beta\cdot\cos\beta'+\cos\gamma\cdot\cos\gamma' = 0\\ \cos\alpha\cdot\cos\alpha''+\cos\beta\cdot\cos\beta''+\cos\gamma\cdot\cos\gamma'' = 0\\ \cos\alpha'\cdot\cos\alpha''+\cos\beta'\cdot\cos\beta''+\cos\gamma'\cdot\cos\gamma'' = 0\\ \text{und}\\ \cos\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha'\cdot\cos\beta'+\cos\alpha''\cdot\cos\beta'' = 0\\ \cos\alpha\cdot\cos\gamma+\cos\alpha'\cdot\cos\gamma'+\cos\alpha''\cdot\cos\gamma'' = 0\\ \cos\beta\cdot\cos\gamma+\cos\beta'\cdot\cos\gamma'+\cos\beta''\cdot\cos\gamma'' = 0\end{matrix}\right\}$$

Es seyen nun u, v, w die 3 neuen Koordinaten desselben Punktes M, auf diese 3 neuen Axen bezogen, namentlich sey (Fig. 2.) Mm senkrecht auf OU, also $Om = u$. Denkt man sich nun die 4 Punkte O, $M'$, $M_1$, M auf OU projicirt, so hat man, weil $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ die Winkel sind, welche die Richtungen $OM'$, $M'M_1$, $M_1M$ mit OU machen, und weil

$$OM\cdot\cos(180-MOU) = -OM\cdot\cos MOU = -u$$

ist, (nach dem Satze II.)

$$x\cdot\cos\alpha+y\cdot\cos\beta+z\cdot\cos\gamma-u = 0.$$

Wiederholt man dasselbe in Bezug auf die beiden andern Axen OV, OW, so hat man zuletzt die 3 Gleichungen

$$(C)\cdots\left\{\begin{matrix}u = x\cdot\cos\alpha+y\cdot\cos\beta+z\cdot\cos\gamma\\ v = x\cdot\cos\alpha'+y\cdot\cos\beta'+z\cdot\cos\gamma'\\ w = x\cdot\cos\alpha''+y\cdot\cos\beta''+z\cdot\cos\gamma''\end{matrix}\right\}$$

Und

Und ganz auf dieſelbe Weiſe, wenn man die 3 auf einander folgenden Koordinaten u, v, w und MO auf die Axen OX, OY, OZ projicirt, erhält man dann noch nach (II.)

$$(D)\cdots\begin{cases} x = u\cdot\cos\alpha + v\cdot\cos\alpha^{I} + w\cdot\cos\alpha^{II} \\ y = u\cdot\cos\beta + v\cdot\cos\beta^{I} + w\cdot\cos\beta^{II} \\ z = u\cdot\cos\gamma + v\cdot\cos\gamma^{I} + w\cdot\cos\gamma^{II} \end{cases}$$

während die Gleichungen (C. und D.) auch ſogleich aus einander ſich ergeben, wenn man die erſteren nach x, y, z, oder die anderen nach u, v, w algebraiſch auflöſt, zuletzt aber die Gleichungen (A) und (B) berückſichtigt.

Und obgleich dieſe Darſtellungsweiſe die Richtigkeit dieſer Gleichungen bloß in dem Falle erkennen läßt, daß x, y, z, u, v, w alle poſitiv ſind, d. h. wirklich Linien vorſtellen, ſo iſt ſolche doch ſehr geeignet, die im Gedächtniß verloren gegangenen Gleichungen ſchnell und ſicher zu reproduciren.

Will man aber dieſelben Gleichungen (C. und D.) als allgemein gültige (zwiſchen den Koordinaten-Werthen) nachweiſen, ſo ſetze man der Kürze wegen

$$OM = r,$$

hat dann, es mögen x, y, z, u, v, w poſitiv, negativ oder Null ſeyn, wenn $\delta$, $\delta^{I}$, $\delta^{II}$ und $\varepsilon$, $\varepsilon^{I}$, $\varepsilon^{II}$ die Winkel ſind, welche OM mit den Axen OX, OY, OZ und OU, OV, OW macht, allemal nach (§. 1. V.)

$$x = r\cdot\cos\delta;\quad y = r\cdot\cos\delta^{I};\quad z = r\cdot\cos\delta^{II};$$
$$u = r\cdot\cos\varepsilon;\quad v = r\cdot\cos\varepsilon^{I};\quad w = r\cdot\cos\varepsilon^{II};$$

zugleich aber auch nach (§. 1. VII. 7.)

$$\cos\delta = \cos\varepsilon\cdot\cos\alpha + \cos\varepsilon^{I}\cdot\cos\alpha^{I} + \cos\varepsilon^{II}\cdot\cos\alpha^{II}$$
$$\cos\delta^{I} = \cos\varepsilon\cdot\cos\beta + \cos\varepsilon^{I}\cdot\cos\beta^{I} + \cos\varepsilon^{II}\cdot\cos\beta^{II}$$
$$\cos\delta^{II} = \cos\varepsilon\cdot\cos\gamma + \cos\varepsilon^{I}\cdot\cos\gamma^{I} + \cos\varepsilon^{II}\cdot\cos\gamma^{II}.$$

Subſtituirt man nun in dieſe 3 letzteren Gleichungen ſtatt $\cos\delta$, $\cos\delta^{I}$, $\cos\delta^{II}$, $\cos\varepsilon$, $\cos\varepsilon^{I}$, $\cos\varepsilon^{II}$ ihre Werthe

$$\frac{x}{r},\ \frac{y}{r},\ \frac{z}{r},\ \frac{u}{r},\ \frac{v}{r},\ \frac{w}{r}$$

aus den nächſt vorhergehenden Gleichungen, ſo erhält man wiederum die obigen Gleichungen (D). — Auf demſelben Wege

kann man aber auch die Gleichungen (C) direkt und allgemein erhalten.

V. Wenn alles wie so eben in (IV.) vorausgesetzt wird, so werden die Ebenen UOV und XOY einander sich schneiden, in einer Durchschnittslinie D'OD (Fig. 12.), und daselbst einen Winkel mit einander bilden, den wir spitz uns denken wollen, und welcher nach (§. 2. I.) gleich ist dem Winkel WOZ oder $\gamma''$. Sind nun noch die Winkel $XOD = \varphi$, $YOD = 90° + \varphi$ und $UOD = \psi$, so wie $VOD = 90° + \psi$ gegeben, so daß durch $\varphi$ die Lage von OD in der Ebene XOY, durch $\psi$ dagegen die Lage von OU in der Ebene UOV gegeben ist, — so ist die Lage der 3 neuen Axen OU, OV, OW durch die 3 Winkel $\gamma''$, $\varphi$ und $\psi$ nothwendig gegeben, und es muß daher möglich seyn, die Kosinusse

$\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, $\cos\alpha'$, $\cos\beta'$, $\cos\gamma'$, $\cos\alpha''$ und $\cos\beta''$

in die Winkel $\gamma''$, $\varphi$ und $\psi$ auszudrücken, während wir jedoch hier $\gamma''$ als einen spitzen Winkel genommen haben.

Es bilden aber OD, OX und OU ein körperliches (oder sphärisches) Dreieck, in welchem der Winkel an OD, $= \gamma''$, die gegenüberliegende Seite $XOU = \alpha$, und die beiden andern Seiten $\varphi$ und $\psi$ sind; also hat man nach einer bekannten Formel der sphärischen Trigonometrie (Element. Mathem. Th. III. Kap. 7.) *)

1) $\cos\alpha = \cos\varphi \cdot \cos\psi + \sin\varphi \cdot \sin\psi \cdot \cos\gamma''$.

Desgleichen findet sich aus den körperlichen (sphärischen) Dreiecken, welche OD, OX und OV, dann OD, OY und OU,

---

*) Sind in dem sphärischen Dreieck ABC (Fig. 6.) die Seiten (d. h. die Linien-Winkel BOC, AOC und AOB) bezüglich a, b, c; und ist der, der Seite a gegenüberliegende sphärische Winkel (d. h. der Winkel der beiden in OA sich schneidenden Ebenen BOA und COA) $= \alpha$, so ist allemal

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos\alpha.$$

In den folgenden Untersuchungen des Textes, werden alle körperlichen Dreiecke betrachtet, welche um OD (Fig. 12.) herum liegen, so daß in der vorliegenden Formel immer der Winkel an OD statt $\alpha$ gesetzt wird. Dieser Winkel ist aber bald $\gamma''$, bald $180° - \gamma''$, bald $90° - \gamma''$, bald $90° + \gamma''$. —

endlich OD, OY und OV mit einander bilden, nach derselben Formel:

2) $\cos\alpha' = \cos\varphi \cdot \cos(90^0+\psi) + \sin\varphi \cdot \sin(90^0+\psi) \cdot \cos\gamma''$;

3) $\cos\beta = \cos(90^0+\varphi) \cdot \cos\psi + \sin(90^0+\varphi) \cdot \sin\psi \cdot \cos\gamma''$;

4) $\cos\beta' = \cos(90^0+\varphi) \cdot \cos(90^0+\psi) + \sin(90^0+\varphi) \cdot \sin(90^0+\psi) \cdot \cos\gamma''$.

Um den Winkel $\gamma = UOZ$ zu bestimmen, betrachte man das körperliche Dreieck, welches OU, OZ und OD mit einander machen. Da OZ senkrecht auf der Ebene XOY steht, so steht OZ auch senkrecht auf OD, und die Ebene ZOD senkrecht auf der Ebene XOY; also ist der Winkel unsers jetzigen körperlichen Dreiecks, der an OD liegt, $= 90^0 - \gamma''$, die ihm gegenüber liegende Seite $UOZ = \gamma$; die beiden andern Seiten UOD und ZOD sind dagegen bezüglich $\psi$ und $90^0$; und dieselbe Formel giebt daher

5) $\cos\gamma = \cos\psi \cdot \cos 90^0 + \sin\psi \cdot \sin 90^0 \cdot \cos(90^0 - \gamma'')$.

Desgleichen findet sich durch ganz analoge Betrachtung

6) $\cos\gamma' = \cos(90^0+\psi) \cdot \cos 90^0 + \sin(90^0+\psi) \cdot \sin 90^0 \cdot \cos(90^0 - \gamma'')$.

Und weil OW senkrecht steht auf der Ebene UOV, so steht OW auch senkrecht auf OD, und die Ebene WOD senkrecht auf der Ebene UOV, also daß der Winkel an OD, in dem körperlichen Dreieck, welches von OD, OW und OX gebildet wird, $= 90^0 + \gamma''$ ist; die diesem Winkel gegenüber liegende Seite ist WOX oder $\alpha''$, und die beiden andern Seiten sind WOD oder $90^0$ und XOD oder $\varphi$; und man hat daher

7) $\cos\alpha'' = \cos 90^0 \cdot \cos\varphi + \sin 90^0 \cdot \sin\varphi \cdot \cos(90^0 + \gamma'')$.

Und auf ganz analoge Weise zeigt sich in dem von OD, OW und OY gebildeten Dreieck, in welchem der Winkel an OD, $= 90^0 + \gamma''$ ist,

8) $\cos\beta'' = \cos 90^0 \cdot \cos(90^0+\varphi) + \sin 90 \cdot \sin(90^0+\varphi) \cdot \cos(90^0+\gamma'')$.

Diese Gleichungen (1.—8.) lassen sich aber, nach gehöriger Reduktion, auch so schreiben:

1) $\cos\alpha = \cos\varphi\cdot\cos\psi + \sin\varphi\cdot\sin\psi\cdot\cos\gamma''$;
2) $\cos\beta = -\sin\varphi\cdot\cos\psi + \cos\varphi\cdot\sin\psi\cdot\cos\gamma''$;
3) $\cos\gamma = \sin\psi\cdot\sin\gamma''$;
4) $\cos\alpha' = -\cos\varphi\cdot\sin\psi + \sin\varphi\cdot\cos\psi\cdot\cos\gamma''$;
5) $\cos\beta' = \sin\varphi\cdot\sin\psi + \cos\varphi\cdot\cos\psi\cdot\cos\gamma''$;
6) $\cos\gamma' = \cos\psi\cdot\sin\gamma''$;
7) $\cos\alpha'' = -\sin\varphi\cdot\sin\gamma''$;
8) $\cos\beta'' = -\cos\varphi\cdot\sin\gamma''$.

Und in der That genügen diese Werthe zur Rechten, wenn sie in die 12 Gleichungen (A. und B. der IV.) substituirt werden, diesen Gleichungen vollständig.

Eliminirt man aber aus diesen 8 Gleichungen die beiden Winkel $\varphi$ und $\psi$, so bleiben 6 Gleichungen übrig, zwischen den 9 Winkeln $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$, $\alpha''$, $\beta''$, $\gamma''$, wodurch 6 dieser Winkel in die 3 übrigen ausgedrückt sind, während diese letztern unbestimmt bleiben müssen, weil offenbar die Lage der 3 neuen Axen gegen die alten, 3 Bestimmungs-Stücke (nämlich die Lage von OD in der Ebene XOY, die Lage der Ebene DOUV gegen die Ebene XOY, und in dieser Ebene DOUV die Lage der erstern Axe OU gegen OD) erfordert.

Von den 12 Gleichungen (A. und B. der IV.) sind daher je 6 nothwendige trigonometrische Folgerungen aus den 6 übrigen.

VI. Man kann in der Ebene (Fig. 1.) statt der beiden Koordinaten-Werthe x und y eines Punktes M, auch seine Polar-Koordinaten einführen. So nennt man nämlich den Winkel $MOX = \varphi$ (den man gewöhnlich in Bogen-Länge für den Radius 1 ausdrückt, so daß $\sin\varphi = \frac{e^{\varphi i} - e^{-\varphi i}}{2i}$ und $\cos\varphi = \frac{e^{\varphi i} + e^{-\varphi i}}{2}$ ist) und die Länge der Linie $OM = r$, die man den Radius-Vektor nennt. — Nimmt man den Winkel $\varphi$ in der Richtung von OX nach OY, und von 0 bis $2\pi$,

und r immer absolut (d. h. nicht negativ), so ist für jede Lage des Punktes M, also wenn x, y positiv, negativ oder Null sind, doch allemal

1) $r \cdot \cos\varphi = x$, und 2) $r \cdot \sin\varphi = y$;

und natürlich dann auch, wenn $\varphi$ eliminirt wird,

3) $x^2 + y^2 = r^2$,

welche letztere Gleichung jedoch aus (§. I. IV.) schon bekannt ist.

Und wollte man statt W. $MOX = \varphi$ lieber den Nebenwinkel $= \theta$ einführen, so hätte man natürlich

4) $x = -r \cdot \cos\theta$; 5) $y = r \cdot \sin\theta$.

VII. (Dasselbe im körperlichen Raume.) Aber auch im körperlichen Raume kann man statt der rechtwinklichen Koordinaten-Werthe x, y, z eines Punktes M (Fig. 2.), die sich auf die 3 auf einander senkrechten Axen OX, OY, OZ beziehen, Polar-Koordinaten einführen, die jedoch hier von verschiedener Art seyn können.

A. Ist nämlich alles wie im (§. 1. V.) vorausgesetzt, so kann man erstlich den Winkel $\theta$ in Rechnung bringen, welchen die Ebene MOX mit der Ebene XOY macht, dann den Winkel $MOX = \varphi$, und endlich die Linie $OM = r$, welche wiederum der Radius-Vektor genannt wird. — Nimmt man $\theta$ von 0 bis $2\pi$, dagegen $\varphi$ von 0 bis $\pi$, und r absolut (d. h. nie negativ), so ist für jede beliebige Lage des Punktes M, also wenn die Koordinaten-Werthe x, y, z positiv, negativ oder Null sind, wenn nur r absolut, d. h. nicht negativ gedacht wird

1) $x = r \cdot \cos\varphi$, 2) $y = r \cdot \sin\varphi \cdot \cos\theta$, 3) $z = r \cdot \sin\varphi \cdot \sin\theta$.

Dabei ist, wie schon bekannt, aber aus diesen 3 Gleichungen auf's neue hervorgeht,

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Es ist nämlich $y = \pm M'M_1 = MM' \cdot \cos\theta$ und eben so

$$z = \pm MM_1 = MM' \cdot \sin\theta;$$

zuletzt aber $MM' = OM \cdot \sin\varphi = r \cdot \sin\varphi$; und daraus folgern die obigen Gleichungen (1. — 3.) ohne weiteres.

B. Eine zweite Gattung Polar-Koordinaten hat man, wenn man den Winkel $M_1OX = \vartheta$, dann den Winkel

$\text{MOM}_1 = \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{2}\pi - \gamma \\ \gamma - \frac{1}{2}\pi \end{matrix} \right\}$, je nachdem z $\left\{ \begin{matrix} \text{positiv} \\ \text{negativ} \end{matrix} \right\}$ ist,

endlich wieder OM = r (absolut gedacht) in Rechnung bringt. Nimmt man wiederum $\vartheta$ von 0 bis zu 360°, so hat man allemal, die Koordinaten-Werthe x, y, z mögen positiv, negativ oder Null seyn,

4) $x = r \cdot \sin\gamma \cdot \cos\vartheta$; 5) $y = r \cdot \sin\gamma \cdot \sin\vartheta$;

6) $z = r \cdot \cos\gamma$;

und natürlich noch immer

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

welches letztere aus den Gleichungen (4.—6.) noch in's Besondere hervorgeht.

Statt $\gamma$ führt man auch wohl den Winkel $\text{MOM}_1 = \psi$ ein, so daß $\frac{1}{2}\pi - \gamma = \psi$, also $\sin\gamma = \cos\psi$ ist, so lange z positiv. Die Gleichungen (4.—6.) sehen dann auch so aus:

7) $x = r \cdot \cos\psi \cdot \cos\vartheta$; 8) $y = r \cdot \cos\psi \cdot \sin\vartheta$;

9) $z = r \cdot \sin\psi$;

allein sie gelten nur, so lange z positiv ist; und sollen sie allgemein gelten, so muß man sich vornehmen, den allemal spitzen Winkel $\psi$ negativ in Rechnung zu bringen, so oft z negativ ist.

# Höhere Geometrie.

## Zweites Kapitel.

**Wie Linien in einer Ebene durch Gleichungen zwischen den Koordinaten-Werthen eines beliebigen ihrer Punkte ausgedrückt werden.**

### §. 4.

Von den geraden Linien.

Nimmt man in einer unendlichen geraden Linie Ll (Fig. 5.), welche mit den Axen OX und OY die Winkel $\alpha$ und $\beta$ bildet, 3 Punkte A, B, M, und drückt man sie durch ihre Koordinaten-Werthe ($x'$, $y'$ für A; ferner $x''$, $y''$ für B; endlich $x$, $y$ für M) aus, so hat man nach (§. 1. VI. 5. u. 6.), wie auch die Punkte gegen einander liegen mögen,

$$1)\quad \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = \frac{y''-y'}{x''-x'} = \frac{y-y'}{x-x'} = \frac{y-y''}{x-x''},$$

wo $2)\ \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = \pm tg\,\alpha$ ist, je nachdem $\beta$ $\left\{\begin{matrix}\text{spitz}\\ \text{stumpf}\end{matrix}\right\}$,

oder wo allemal $\frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = tg\,\alpha$ ist, wenn $\alpha$ ringsherum bis zu $360^0$ gezählt wird (vgl. Note zu §. 1. IV. 7.).

I. Denkt man sich nun die Linie Ll durch die beiden Punkte A und B gegeben, oder durch einen dieser beiden Punkte und durch die Winkel $\alpha$ und $\beta$ (d. h. durch den Winkel $\alpha$ und

durch die Angabe, ob $\beta$ spitz oder stumpf ist); und repräsentirt M jeden beliebigen dritten Punkt derselben Geraden, so macht man aus (1.) und (2.), indem man mit dem Nenner weg multiplizirt, entweder

3) $y - y' = A \cdot (x - x')$,

oder 4) $y - y'' = A \cdot (x - x'')$,

wo 5) $A = \frac{y'' - y'}{x'' - x'} = \pm tg\,\alpha$, je nachdem $\beta$ { spitz / stumpf } *),

bekannt und gegeben ist.

Jede dieser beiden Gleichungen (3. oder 4.) giebt auch noch die Gleichung

6) $y = A \cdot x + B$,

wo A die Bedeutung der (5.) hat, während dagegen B gegeben ist durch die Gleichung

7) $B = y' - A \cdot x' = y'' - A \cdot x'' = \frac{y' \cdot x'' - y'' \cdot x'}{x'' - x'}$.

Jede dieser Gleichungen (3. 4. 6.) liefert zu jedem beliebig gedachten x, den zugehörigen Koordinaten-Werth y (oder umgekehrt), und diese als zusammengehörig gefundenen Koordinaten-Werthe x und y gehören dann allemal einem Punkte an, der in der geraden Linie Ll liegt.

Jede dieser Gleichungen (3. 4. 6.) ist daher der Repräsentant aller Punkte der Linie Ll, und deshalb der ganzen (unendlichen) Linie Ll selbst, und jede dieser Gleichungen wird daher die Gleichung der geraden Linie Ll genannt.

II. Umgekehrt: alle Punkte, welche aus irgend einer algebraischen Gleichung der ersten Ordnung

(C) ... $p \cdot y + q \cdot x + r = 0$, oder $y = a \cdot x + b$,

wo a, b statt $-\frac{q}{p}$ und $-\frac{r}{p}$ gesetzt worden sind, auf die so eben gedachte Weise hervorgehen, liegen nothwendig in einer und derselben geraden Linie.

*) Zählt man den Winkel $\alpha$ in der (Bogen-) Richtung von OX nach OY hin von 0 bis 360° (was wir hier nicht thun), so ist allemal $A = +tg\,\alpha = tg\,\alpha$, es mag $\beta$ spitz oder stumpf seyn.

Denn nimmt man drei verschiedene Werthe x', x'' und x statt x, und berechnet man sich die drei zugehörigen und durch y', y'' und y bezeichneten Koordinaten-Werthe aus der gegebenen Gleichung (C), so hat man

$$y' = a \cdot x' + b$$
$$y'' = a \cdot x'' + b$$
$$y = a \cdot x + b.$$

Subtrahirt man je zwei dieser letztern Gleichungen von einander und dividirt man die entstehenden Gleichungen durch einander, um b und a zu eliminiren, so erhält man

$$\frac{y-y'}{x-x'} = \frac{y-y''}{x-x''} = \frac{y''-y'}{x''-x'},$$

d. h. die Verhältnisse der Katheten (Fig. 5.) in den rechtwinklichen Dreiecken ABC, AMD und BME sind einander gleich, also auch W. MBE = W. BAC, woraus folgt, daß die Richtung BM mit der Richtung AB zusammenfällt.

Ist in der Gleichung

$$p \cdot y + q \cdot x + r = 0, \quad \text{oder} \quad y = a \cdot x + b,$$

$q = 0$, also $a = 0$ und $y = -\frac{r}{p} = b$, so läuft die durch diese Gleichung vorgestellte Gerade mit der Abscissen-Axe OX parallel. — Ist aber $p = 0$, also $a = \frac{1}{0}$ oder $\frac{1}{a} = 0$, so daß die Gleichung selbst in $q \cdot x + r = 0$, oder $x = -\frac{r}{q} = c$ übergeht, so läuft die durch diese Gleichung vorgestellte Gerade mit der Ordinaten-Axe OY parallel.

III. A. Ist

1) $$y = a \cdot x + b$$

die Gleichung einer Geraden Ll, so ist die Gleichung der mit ihr parallelen und durch O hindurchgehenden Linie $L_1l_1$ (Fig. 5.), im Falle $x_1$ und $y_1$ die Koordinaten-Werthe eines beliebigen ihrer Punkte vorstellen, nothwendig

2) $$y_1 = a \cdot x_1,$$

weil jedesmal $a = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha}$ ist, und die Winkel $\alpha$, $\beta$, welche die Linien Ll und $L_1l_1$ mit den Axen machen, genau dieselben bleiben.

Allgemeiner ausgedrückt: Es sind die durch die Gleichungen

$$p \cdot y + q \cdot x + r = 0$$

und

$$p' \cdot y + q' \cdot x + r' = 0$$

vorgeſtellten Geraden mit einander parallel, wenn $\frac{q}{p} = \frac{q'}{p'}$, oder $\frac{p}{p'} = \frac{q}{q'}$, oder $p \cdot q' - q \cdot p' = 0$ iſt.

B. Die Gleichung einer ebenfalls mit der Ll parallelen Linie $L_2l_2$ (Fig. 5.), die aber durch einen gegebenen Punkt $A_1$ oder $(x, y)$ *) hindurch geht, iſt aber

3) $$y_2 - y = a \cdot (x_2 - x),$$

wenn $x_2$, $y_2$ die Koordinaten-Werthe eines jeden beliebigen ihrer Punkte vorſtellen.

C. Denkt man ſich durch O eine Linie $L_3l_3$ ſenkrecht auf $L_1l_1$ (oder auf Ll, oder auf $L_2l_2$), ſo iſt ihre Gleichung allemal

4) $$y_3 = -\frac{1}{a} \cdot x_3,$$

wenn $x_3$, $y_3$ die Koordinaten-Werthe eines jeden beliebigen der Punkte dieſer Senkrechten $L_3l_3$ vorſtellen.

Denn es ſind die Winkel $\alpha'$, $\beta'$, welche dieſe Senkrechte $L_3l_3$ mit den Axen macht, von den Winkeln $\alpha$ und $\beta$ bezüglich um 90° verſchieden, alſo daß $tg\,\alpha' = cotg\,\alpha = \frac{1}{tg\,\alpha}$ ſeyn wird, wenigſtens dem abſoluten Werthe nach. Der Lage der Linien $L_1l_1$ und $L_3l_3$ nach müſſen aber die zu einerlei Abſciſſen-Werth $x_1 = x_3$ gehörigen Ordinaten-Werthe $y_1$ und $y_3$ verſchiedene (+) oder (−) Zeichen haben; daher in (4.) $-\frac{1}{a}$ ſtehen muß, weil in (2.) $+a$ ſteht.

Allgemeiner ausgedrückt: die durch die Gleichungen

$$p \cdot y + q \cdot x + r = 0$$

und

$$p' \cdot y + q' \cdot x + r' = 0$$

vorgeſtellten Geraden ſtehen auf einander ſenkrecht, wenn

$\frac{q}{p} = -\frac{p'}{q'}$, oder $\frac{q}{p} + \frac{p'}{q'} = 0$, oder $p \cdot p' + q \cdot q' = 0$ iſt.

D. Sind aber $x_4$ und $y_4$ die Koordinaten-Werthe eines jeden beliebigen Punktes der Linie $L_4l_4$, welche durch einen gegebenen Punkt $(x, y)$ gehen, zugleich aber auf der Ll ſenkrecht

*) Wenn wir ſagen: $(x, y)$ iſt ein gegebener Punkt, ſo verſtehen wir darunter, daß $x$ und $y$ die Koordinaten-Werthe dieſes Punktes ſind.

stehen soll, so ist ihre Gleichung, da diese Linie mit der $L_1l_1$ parallel läuft, nothwendig

$$5) \qquad y_4 - y = -\frac{1}{a} \cdot (x_4 - x).$$

IV. Sind zwei gerade Linien $L_1l_1$ und $L_2l_2$ gegeben durch die beiden Gleichungen

1) $y_1 = a \cdot x_1 + b$ oder $y_1 - q = a \cdot (x_1 - p)$

2) $y_2 = a' \cdot x_2 + b'$ oder $y_2 - n = a' \cdot (x_2 - m)$ *),

so sind diese Linien mit einander parallel, wenn $a = a'$ nach (III. A. B.); dagegen schneiden sie sich, wenn a verschieden ist von $a'$.

Sind im letztern Falle (Fig. 7.) x und y die Koordinaten-Werthe ihres Durchschnitts-Punktes D, so müssen diese Werthe, da der Punkt beiden Geraden angehört, beiden Gleichungen (1. und 2.) genügen, wenn sie bezüglich statt $x_1$ und $y_1$, und statt $x_2$ und $y_2$ gesetzt werden. Für diese Werthe x und y hat man daher gleichzeitig

$$y = a \cdot x + b \quad \text{und} \quad y = a' \cdot x + b',$$

und löst man diese beiden Gleichungen algebraisch auf, so findet sich

$$(\odot) \cdots \qquad x = -\frac{b - b'}{a - a'} \quad \text{und} \quad y = \frac{a \cdot b' - a' \cdot b}{a - a'},$$

so daß also der Durchschnitts-Punkt D bestimmt ist.

Denkt man sich durch den Ursprung O der Koordinaten zwei Linien $L_3l_3$ und $L_4l_4$ mit den obigen beiden $L_1l_1$ und $L_2l_2$ bezüglich parallel, so sind ihre Gleichungen nach (III. A.) bezüglich

3) $y_3 = a \cdot x_3$ — und 4) $y_4 = b' \cdot x_4$;

und da diese letzteren beiden Linien unter sich genau denselben Winkel $\psi$ bilden, welchen die ersteren beiden unter sich machen, so folgt, daß dieser Winkel $\psi$ nur von den Werthen von a, a' keineswegs aber von den Zahlen b, b' abhängt.

Will man diesen Winkel $\psi$ finden, so nehme man in jeder

*) Nimmt man diese Formen zur Rechten, so ist (p, q) ein Punkt der ersteren Linie, und (m, n) ein Punkt der zweiten Geraden (nach I).

der Linien $L_3l_3$ und $L_4l_4$ einen Punkt, etwa $P_3$ und $P_4$, so daß beide Punkte dieselbe Abscisse $= 1$ haben; finde aus den Gleichungen (3. u. 4.) die Ordinaten-Werthe dazu, daraus (nach §. 1. VI. 3′.) die Entfernungen $OP_3$, $OP_4$ und $P_3P_4$, und dann aus der trigonometrischen Gleichung

$$\overline{P_3P_4}^2 = \overline{OP_3}^2 + \overline{OP_4}^2 - 2\overline{OP_3}\cdot\overline{OP_4}\cdot\cos\psi$$

diesen $\cos\psi$. — Man findet

$$\overline{OP_3} = +\sqrt{1+a^2}, \qquad \overline{OP_4} = +\sqrt{1+a'^2},$$

$$\overline{P_3P_4} = \pm(a-a'),$$

wo das (+) oder (—) Zeichen so genommen werden muß, daß $\overline{P_3P_4}$ nicht negativ wird. — Und daraus

$$(\mathfrak{C}) \cdots \qquad \cos\psi = \frac{1+a\cdot a'}{\sqrt{1+a^2}\cdot\sqrt{1+a'^2}};$$

also auch

$$(\mathfrak{C}_1) \cdots \qquad \sin\psi = \frac{\pm(a-a')}{\sqrt{1+a^2}\cdot\sqrt{1+a'^2}},$$

wo die beiden Quadrat-Wurzeln nicht negativ genommen werden dürfen, und wo im Zähler von $\sin\psi$ das (+) oder (—) Zeichen so genommen werden muß, daß dieser Zähler nicht negativ wird, weil $\sin\psi$ nie negativ werden kann. — Daraus folgt dann weiter

$$(\mathfrak{C}_2) \cdots \qquad tg\,\psi = \frac{\pm(a-a')}{1+a\cdot a'},$$

wo der Zähler nicht negativ werden darf, so daß $\psi$ spitz oder stumpf ist, je nachdem der Nenner $1+a\cdot a'$ positiv oder negativ wird, wie schon aus ($\mathfrak{C}$) erhellet. — Unter $\psi$ ist aber derjenige der beiden Nebenwinkel verstanden worden, dessen beide Schenkel sich nach der positiven Seite der Abscissen-Werthe erstrekken.

Wird etwa die zweite Linie $L_2l_2$ erst und so gesucht, daß sie mit der ersten $L_1l_1$ den gegebenen Winkel $\psi$ bildet, so muß man die gefundenen Gleichungen ($\mathfrak{C}$) benutzen, um aus $a$ und $\psi$ den Koeffizienten $a'$ zu erhalten. — Ist dabei $\psi$ nicht ein rechter Winkel, so erhält man für $a'$ immer 2 Werthe, welche beide

der Aufgabe genügen, wenn nicht die Richtung der Schenkel des Winkels $\psi$ gegen die Axen OX und OY vorgeschrieben ist *).

V. Ist gegeben die Gleichung einer geraden Linie Ll (Fig. 5.), nämlich

1) $$y = a \cdot x + b,$$

und außerdem noch ein Punkt, z. B. $A_1$ durch seine Koordinaten-Werthe $x'$ und $y'$; und soll nun die Länge $A_1B_1$ der auf Ll senkrechten Linie $A_1B_1$ gefunden werden, so findet man zuerst die Gleichung der (unendlichen) geraden und auf Ll senkrechten Linie $L_4l_4$, nämlich nach (II.),

2) $$y_4 - y' = -\frac{1}{a} \cdot (x_4 - x'),$$

dann nach (III.) die Koordinaten-Werthe $x$ und $y$ ihres Durchschnitts-Punktes $B_1$ mit der ersten Linie, welche also aus den beiden Gleichungen

3) $$y = a \cdot x + b \text{ und } y - y' = -\frac{1}{a} \cdot (x - x')$$

hervorgehen; und dann nach (§. 1. VI. 3'.) die Entfernung $A_1B_1$ mittelst der Gleichung

$$A_1B_1 = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2};$$

so daß sich findet, wenn man $y - y'$ aus (3.) hier substituirt:

4) $$A_1B_1 = \frac{x - x'}{a} \cdot \sqrt{1 + a^2},$$

während, wenn man aus (3.) $y$ eliminirt,

5) $$x - x' = \frac{y' - a \cdot x' - b}{a + \frac{1}{a}}$$

sich dazu findet, so daß zuletzt

6) $$A_1B_1 = \frac{y' - a \cdot x' - b}{\sqrt{1 + a^2}}$$

wird.

---

*) Ist $\psi$ ein rechter Winkel und gegeben, so hat man $1 + a \cdot a' = 0$, also $a' = -\frac{1}{a}$, wie solches bereits in (III.) gefunden worden ist.

VI. Iſt gegeben die Gleichung $y = a \cdot x + b$ für eine gerade Linie, während $x$ und $y$ die, auf rechtwinkliche Axen OX und OY ſich beziehenden Koordinaten-Werthe eines beliebigen M ihrer Punkte vorſtellen, und ſind $\varphi$, $r$ die Polar-Koordinaten deſſelben Punktes M (Fig. 1.), ſo daß man nach (§. 3. VI.)

$$x = r \cdot \cos\varphi, \quad y = r \cdot \sin\varphi$$

hat; und ſubſtituirt man dieſe Werthe ſtatt $x$ und $y$ in die Gleichung $y = a \cdot x + b$, ſo erhält man die Gleichung

$$r \cdot \sin\varphi - a r \cdot \cos\varphi - b = 0$$

zwiſchen den Koordinaten-Werthen $r$ und $\varphi$ deſſelben Punktes M.

Die Gleichung $r = \frac{C}{A \cdot \sin\varphi + B \cdot \cos\varphi}$ zwiſchen den Polar-Koordinaten $\varphi$ und $r$, drückt alſo ebenfalls eine gerade Linie aus.

## §. 5.

### Von den krummen Linien im Allgemeinen.

I. Jede Gleichung zwiſchen rechtwinklichen Koordinaten-Werthen $x$ und $y$, wenn ſie zu ſtetig neben einander liegenden Werthen von $x$, reelle Werthe von $y$ liefert, oder umgekehrt, repräſentirt allemal eine Linie in derſelben Ebene, in welcher die Axen OX und OY liegen, und allemal eine krumme Linie (oder Kurve), ſo oft die Gleichung zwiſchen $x$ und $y$ nicht auf die Gleichung der erſten Ordnung $A \cdot y + B \cdot x + C = 0$ gebracht werden kann. — Solche krumme Linien, deren Punkte alle in einer und derſelben Ebene liegen, heißen einfach gekrümmte Linien oder ebene Kurven.

II. Nach der Gattung der Gleichung zwiſchen den Koordinaten-Werthen $x$ und $y$ eines jeden beliebigen Punktes einer Linie, theilt man nun die ganz in einer Ebene liegenden Linien ein, in algebraiſche und in tranſcendente (zu welchen letzteren die logarithmiſchen, trigonometriſchen, ꝛc. ꝛc. gehören). Die algebraiſchen Linien, welche durch algebraiſche Gleichungen zwiſchen $x$ und $y$ ausgedrückt ſind, theilt man wieder ein, nach der Ordnung dieſer Gleichungen, in algebraiſche Linien der

ersten Ordnung (dies sind aber allemal gerade Linien), der zweiten Ordnung (welche durch die vollständige Gleichung der zweiten Ordnung

$$ay^2+bxy+cx^2+dy+ex+f=0$$

ausgedrückt sind, und welche man auch Kegelschnitte nennt), und in algebraische Linien der dritten, vierten und jeder beliebigen höhern Ordnung.

III. Jede ebene Kurve, welche auf gegebene Axen OX und OY bezogen durch irgend eine Gleichung

1) $$\varphi_{x,y}=0$$

ausgedrückt ist, kann sogleich auch auf beliebig andere Axen O′U und O′V (Fig. 8.) bezogen werden, welche durch einen beliebigen Punkt O′ gelegt, übrigens wieder auf einander senkrecht sind. Denkt man sich nämlich durch den beliebigen Punkt O′, dessen alte (auf OX und OY bezogenen) Koordinaten-Werthe p und q seyn mögen, zuerst Axen O′X′ und O′Y′ parallel mit OX und OY gelegt, und die alten Koordinaten-Werthe von M durch x und y, diese neuen aber (von demselben M) durch $x'$ und $y'$ bezeichnet, so hat man zunächst nach (§. 1. VI.)

2) $$x=x'+p \quad \text{und} \quad y=y'+q.$$

Werden nun durch O′ abermals neue senkrechte Axen O′U und O′V gelegt, die gegeben sind gegen OX und OY, oder gegen O′X′ und O′Y′, mittelst der Winkel $\alpha$, $\beta$ und $\alpha'$, $\beta'$, so hat man noch, wenn u, v die jetzigen Koordinaten-Werthe desselben Punktes M sind (nach §. 3. III.)

3) $$\left.\begin{aligned} x' &= u\cdot\cos\alpha+v\cdot\cos\alpha' \\ y' &= u\cdot\cos\beta+v\cdot\cos\beta' \end{aligned}\right\};$$

also, wenn man dieß in (2.) substituirt,

4) $$\left.\begin{aligned} x &= u\cdot\cos\alpha+v\cdot\cos\alpha'+p \\ y &= u\cdot\cos\beta+v\cdot\cos\beta'+q \end{aligned}\right\}.$$

Substituirt man nun diese Werthe in die Gleichung (1.), so erhält man die Gleichung

5) $$F_{u,v}=0$$

zwischen den jetzigen Koordinaten-Werthen u und v desselben beliebigen Punktes M der Kurve.

Betrachtet man aber die Gleichungen (4.), ſo findet man bald, daß, wenn $\varphi_{x,y} = 0$ eine algebraiſche Gleichung iſt, von irgend einer Ordnung, dann die Gleichung $F_{x,y} = 0$ nothwendig ebenfalls eine algebraiſche Gleichung derſelben Ordnung ſeyn werde; und umgekehrt.

Die in (II.) gemachte Eintheilung der Kurven, wenn ſie ſich auf rechtwinkliche Koordinaten-Axen bezieht, iſt daher von der Lage der Koordinaten-Axen unabhängig, und bezieht ſich demnach wirklich auf karakteriſtiſche Unterſchiede der Kurven ſelbſt.

IV. Die Gleichung einer Kreis-Linie, welche durch die Koordinaten-Werthe a und b ihres Mittelpunktes C (Fig. 9.) und durch ihren Radius c, ihrer Lage und Größe nach gegeben ſeyn mag, iſt allemal, wenn x, y die Koordinaten-Werthe eines beliebigen Punktes M derſelben vorſtellen,

$$CM^2 = CD^2 + DM^2,$$

oder nach (§. 1. VI. 3'.)

$$(y-b)^2 + (x-a)^2 = c^2,$$

oder

$$y^2 + x^2 - 2by - 2ax + (a^2 + b^2 - c^2) = 0;$$

und da dieſelbe algebraiſch und von der zweiten Ordnung iſt, ſo gehört die Kreis-Linie demnach zu den algebraiſchen Linien der zweiten Ordnung (d. h. zu den Kegelſchnitten).

V. Will man die Durchſchnitts-Punkte zweier durch die Gleichungen

$$\varphi_{x,y} = 0 \quad \text{und} \quad \psi_{x_1,y_1} = 0$$

gegebenen geraden oder krummen Linien finden, ſo verfährt man genau nach (§. 4. IV.), bezeichnet die Koordinaten-Werthe eines ſolchen Durchſchnitts-Punktes durch x und durch y, und hat dann zu deren Beſtimmung, weil dieſer Punkt in beiden Kurven zugleich liegt, die beiden Gleichungen

$$\varphi_{x,y} = 0 \quad \text{und} \quad \psi_{x,y} = 0.$$

Löſt man ſolche nach x und nach y auf, ſo erhält man die Koordinaten-Werthe x und y dieſes Durchſchnitts-Punktes. — Man kann aber mehrere, ja zuweilen unendlich viele Paare reeller, dieſen beiden Gleichungen genügender Werthe von x und y fin-

finden, so daß die Kurven in mehreren, ja in unendlich-vielen Punkten sich schneiden können.

Eine Gerade dagegen und ein Kegelschnitt (Linie der zweiten Ordnung) können sich höchstens in zwei Punkten schneiden, und zwei Kegelschnitte schneiden sich höchstens in vier Punkten, weil die Gleichungen

$$\varphi_{x,y} = 0 \quad \text{und} \quad \psi_{x,y} = 0$$

nur von der zweiten Ordnung sind, also höchstens vier Paare von reellen Werthen haben; so daß durch fünf gegebene Punkte nicht zwei verschiedene Kegelschnitte hindurch gehen können.

## §. 6.

### Rektifikation und Quadratur der ebenen Kurven.

I. Ist (Fig. 18.) ADM eine beliebige Kurve, durch die Gleichung

$$F_{x,y} = 0, \quad \text{oder} \quad y = y_x$$

gegeben; sind a und x die Abscissen-Werthe OE und OP der Punkte D und M, so sind der Bogen DM = s und die Fläche DMEP = f offenbar von x und von a allein abhängig, also Funktionen von x und von a, demnach auch als Funktionen von x anzusehen. Nimmt man nun PQ = dx unendlich-klein, so ist, wenn man MR parallel mit PQ zieht, NR = −dy, Bog. MN = ds und Inh. PQMN = df, wenn, wie immer, dx, dy, ds, df zusammengehörige unendlich-kleine Zuwachse bedeuten. Der Punkt N liegt dem M nächst an; der Bogen MN ist daher als die Hypothenuse des rechtwinklichen Dreiecks MRN anzusehen, dessen beide Katheten MR = dx, NR = −dy sind. Man hat deshalb

$$1) \qquad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \cdot \sqrt{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)} \text{ *).}$$

und weil $PQMN = PQ \cdot \frac{PM + QN}{2}$ ist, so hat man noch

*) Für den Zuwachs ds des Bogens hat man hier oben statt des Bogens MN eigentlich die Sehne MN genommen. Nun könnte aber

2) $df = y \cdot dx + \frac{1}{2} dx \cdot dy = y \cdot dx$,

in so ferne das Glied $\frac{1}{2} dx \cdot dy$ nach den Prinzipien (Analys. §. 20. Nr. 12.) weggelassen werden muß. —

Dividirt man beide Gleichungen (1. u. 2.) durch dx weg, so erhält man, weil $\frac{ds}{dx} = \partial s_x$ und $\frac{df}{dx} = \partial f_x$ ist nach (Analysis §. 21.),

3) $\partial s_x = \sqrt{1 + \partial y_x^2}$

und 4) $\partial f_x = y$;

und wenn in den Gleichungen (1. u. 2.) rechts Glieder weggelassen sind, welche das Unendlich-Kleine in höheren Dimensionen enthalten, so sind dagegen die Gleichungen (3. u. 4.) ganz genau, weil die Gleichungen $\partial s_x = \frac{ds}{dx}$ und $\partial f_x = \frac{df}{dx}$ gerade nur dann genau wahr sind (nach Analys. §. 21.), wenn die Zäh-

---

vielleicht der Bogen von der Sehne nicht bloß um ein Unendlich-Kleines der höhern Ordnung, sondern um ein Unendlich-Kleines derselben Ordnung verschieden seyn, und in diesem Falle wäre nach (§. 20. Analys.) als unrichtig angegeben. Bedenkt man aber, daß eine Kurve, genau genommen, eine ideelle gebrochene Linie ist, so ist, genau genommen, ein unendlich-kleiner Bogen zu gleicher Zeit seine Sehne, d. h. geometrisch angesehen sind beide ein und dasselbe. —

Bei dem Inhalte PQMN hat man die beiden Grenzen PQMR $= y \cdot dx$ und PQNS $= y_{x+dx} \cdot dx$, welche, weil $y_{x+dx} = y + \partial y_x \cdot dx + \cdots$ ist, für dx unendlich-klein in einen und denselben unendlich-kleinen Ausdruck $y \cdot dx$ der ersten Ordnung zusammenfallen, nach (§. 20. Analys.). — Hier kann also gar kein solcher Zweifel aufgeworfen werden. — Aber auch in Bezug auf den Bogen MN kann man zwei Grenzen finden, zwischen denen er liegt, etwa die Sehne MN als die kleinere und etwa die Summe der beiden an M und N gedachten Tangenten, bis zu der Stelle, wo sie sich schneiden; oder die beiden Tangenten MV, NU an M und an N, jede bis zu der Ordinaten-Richtung des Punktes N und M genommen, von denen nach Prinzipien der Euklid'schen Geometrie (Elem. Math. II. Th. Kap. 5.) die eine immer kleiner als der Bogen, die andere nothwendig größer als der Bogen ist, wenn nur von M bis N die Ordinaten fortwährend wachsen oder fortwährend abnehmen. Berechnet man sich aber die Länge dieser Tangenten, zwischen denen der Bogen MN liegt, so findet man, daß sie beide mit demselben ersten Gliede $\sqrt{1 + \partial y_x^2} \cdot dx$ anfangen, und nur um Unendlich-Kleine höherer Ordnungen von einander verschieden sind.

ler ds und df die Glieder der zweiten und höhern Dimensionen des Unendlich-Kleinen nicht mehr enthalten. — Aus den Gleichungen (3. u. 4.) folgt aber noch

5) $s = \int_{x \div a} \sqrt{1 + \partial y_x^2} \cdot dx$

und 6) $f = \int_{x \div a} y \cdot dx,$

weil, sobald $x = a$ wird, der Punkt M in D hinein fällt, also dann $s = 0$ und $f = 0$ werden muß (vergl. Analyf. §. 34.).

II. Denkt man sich Polar-Koordinaten, nämlich (Fig. 18.) Winkel $OFM = \theta$ und $FM = R$, und denkt man sich den Winkel $\theta$ um das unendlich-kleine Stück $MFN = d\theta$ *) wachsend, so wächst R um das zugehörige dR, so daß $FN = R + dR$ ist, und der Bog. $DM = s$ wächst um das Stück $MN = ds$; so wie, wenn der Inhalt AFM durch F bezeichnet wird, solcher dadurch um $MFN = dF$ wächst. — Nun ist aber, wenn mit $FM = R$ aus F der Kreisbogen MH, desgleichen mit $FN = R + dR$ der Kreisbogen NL gezogen wird,

$$\text{Bog. } MH = R \cdot d\theta,$$

$$\text{Bog. } NL = (R + dR) \cdot d\vartheta = R \cdot d\vartheta + dR \cdot d\vartheta,$$

$$HN = dR, \quad \text{Sektor } FMH = \tfrac{1}{2} R^2 \cdot d\theta,$$

$$\text{Sekt. } FNL = \tfrac{1}{2}(R+dR)^2 \cdot d\theta = \tfrac{1}{2}R^2 \cdot d\theta + R \cdot dR \cdot d\theta + \tfrac{1}{2} dR^2 \cdot d\theta,$$

so daß beide Kreissektoren nur um Unendlich-Kleines höherer Ordnungen von einander verschieden sind. Man hat daher, weil $MFN = dF$ allemal zwischen den beiden Kreissektoren FMH und FNL liegt, nach (Analyf. §§. 20. 21.)

1) $dF = \tfrac{1}{2} R^2 \cdot d\theta$ oder $\partial F_\theta = \tfrac{1}{2} R^2$.

Ferner kann man sich MHN als ein rechtwinkliches Dreieck denken, von welchem MH und NH die beiden Katheten, MN die Hypothenuse ist. Dann hat man $MN^2 = MH^2 + NH^2$, d. h. $ds^2 = R^2 \cdot d\theta^2 + dR^2$; folglich

2) $ds = \sqrt{R^2 \cdot d\theta^2 + dR^2}$ oder $\partial s_\theta = \sqrt{R^2 + \partial R_\theta^2}$.

*) Man übersehe nicht, daß hier die Winkel nie in Graden ausgedrückt sind, sondern daß $\theta$, $d\theta$ die Bogen bedeuten für den Radius 1, welche zwischen den Schenkeln der Winkel OFM und MFN liegen.

Ist nun etwa W. AFD $= \alpha$, so hat man

3) Bog. DM $= \int_{\theta \div \alpha} \sqrt{R^2 + \partial R_\theta^2} \cdot d\theta$,

4) Inhalt DFM $= \int_{\theta \div \alpha} \frac{1}{2} R^2 \cdot d\theta = \frac{1}{2} \int_{\theta \div \alpha} R^2 \cdot d\theta$,

wo R eine, durch die Gleichung der Kurve gegebene Funktion von $\theta$ vorstellt.

Berechnet man sich auf beiden Wegen den Bogen DM, so müssen die Resultate genau stimmen. Berechnet man aber auf dem ersteren Wege den Inhalt DEMP, so wie auf diesem letztern den Inhalt DFM, so kann man den Inhalt der Dreiecke FMP, FDE noch besonders berechnen, und so aus dem einen dieser berechneten Inhalte, DEMP oder DFM, den andern ableiten. Auch hier müssen die Resultate mit einander übereinstimmen.

III. Man kann aber den Flächen-Inhalt auch noch auf andere Art finden. Ist z. B. der Flächen-Inhalt (Fig. 23.) D′D″R′R″ zu bestimmen, während OE = a und OS = b gegeben sind, und D′R′, so wie D″R″ zwei ganz beliebige Kurven sind, so denke man sich im Innern dieser Fläche einen beliebigen Punkt M, dessen Koordinaten x, y von einander ganz unabhängig sind. An dieser Stelle denkt man sich nun ein Rechteck $MM_1M_2M_3$ von der Breite dx und Höhe dy, während dx, dy unendlich-kleine, von einander unabhängige Zuwachse der Veränderlichen x und y vorstellen. Dann folgt:

1) dx · dy ist der Inhalt des Rechtecks $MM_1M_2M_3$; also ist nach dem Satze (Analys. §. 35.)

2) $\int_{y' \div y''} (dx) \cdot dy$ oder $dx \cdot \int_{y' \div y''} 1 \cdot dy$ die Summe aller dieser Rechtecke, die von derselben Breite dx sind, zu demselben Werthe von x gehören und zwischen den Grenzwerthen von y, nämlich $y' = NN'$ und $y'' = NN''$ liegen; d. h. der Inhalt des ganzen Streifens N′N″P′P″ *). — Dabei sind y′ und y″

*) Genau genommen ist der Ausdruck (2.), welcher unendlich-klein von der ersten Ordnung ist, von dem Streifen N′N″P′P″ um die dreieckförmigen, jedoch krummlinigen Zwickel verschieden, welche sich am obern

die durch die Gleichungen der Grenz-Kurven D′N′R′ und D″N″R″ gegebenen Funktionen von x.

Aber nach demſelben (Analyſ. §. 35.) iſt nun auch

3) $\int_{b \div a} (\int_{y' \div y''} 1 \cdot dy) \cdot dx$ die Summe aller dieſer Streifen von $x = OE = a$ an, bis zu $x = OS = b$ hin, d. h. der Inhalt der Fläche D′D″R′R″ *).

Um dieſen Inhalt nun näher auszuwerthen, hat man zunächſt

$$\int 1 \cdot dy = y, \text{ alſo } \int_{y' \div y''} 1 \cdot dy = y' - y'';$$

folglich iſt dieſer Inhalt D′D″R′R″

$$4) \int_{b \div a} (\int_{y' \div y''} 1 \cdot dy) \cdot dx = \int_{b \div a} (y' - y'') \cdot dx$$
$$= \int_{b \div a} y' \cdot dx - \int_{b \div a} y'' \cdot dx.$$

Iſt $y'' = 0$, ſo fällt die Kurve D″R″ mit der Axe OX zuſammen, und man hat $\int_{b \div a} y'' \cdot dx = 0$; alſo iſt dann

$$\text{Inh. D′ER′S} = \int_{b \div a} y' \cdot dx,$$

welches Reſultat genau mit dem der (I. 6.) zuſammenfällt, weil hier y′ dieſelbe Funktion von x vorſtellt, welche dort durch y bezeichnet worden war.

Ganz auf analoge Weiſe ſeyen (Fig. 19.) $OFM = \theta$ und $FM = r$ die von einander ganz unabhängigen Polar-Koordinaten eines ganz beliebigen Punktes M im Innern der Fläche.

Man denke ſich nun $\theta$ oder W. OFM um ein unendlich-kleines Stück $d\theta =$ W. N′FP′ wachſend, ſo wie zu gleicher Zeit r um ein unendlich-kleines Stück dr, ſo bildet ſich, wenn

---

und untern Ende des Streifens bilden, wenn man ſolche Rechtecke dx·dy zuletzt auch oben und unten an den Grenzen ſich denkt. Allein dieſe Zwickel ſind immer kleiner als das Rechteck dx·dy, alſo unendlich-klein von der zweiten Ordnung, folglich iſt dieſer Unterſchied nach (Analyſ. §. 20. Nr. 12.) keiner.

*) Der Unterſchied zwiſchen dem endlichen Ausdruck (3.) und dem Inhalte D′D″R′R″ iſt wenigſtens nur unendlich-klein, alſo nach (Analyſ. §. 20. Nr. 12.) keiner.

man mit, $r = FM$ und $r + dr = FM_1$ Kreisbogen $MM_2$ und $M_1M_2$ beschreibt, eine unendlich-kleine Fläche

$$MM_1M_2M_2 = FM_1M_2 - FMM_2.$$

Nun ist aber

$$FM_1M_2 = \tfrac{1}{2}(r+dr)^2 \cdot d\theta$$

und

$$FMM_2 = \tfrac{1}{2}r^2 \cdot d\theta;$$

also ist

5) $MM_1M_2M_2 = r \cdot dr \cdot d\theta + \tfrac{1}{2}dr^2 \cdot d\theta = r \cdot dr \cdot d\theta$,

wenn man nach (Analyſ. §. 20. Nr. 12.) die Unendlich-Kleinen der höhern Ordnung wegläßt *).

Dann ist aber nach (Analyſ. §. 35.)

6) $d\theta \cdot \int_{R \div 0} r \cdot dr$ der Inhalt aller dieſer Theilchen $MM_1M_2M_2$ (von F an, wo $r = 0$ ist, bis zu $FN'$ hin, wenn $FN' = R$ geſetzt wird), für welche $\theta$ denſelben Werth behält, d. h. der Inhalt des Sektors $FN'P'$. Dabei ist in der Regel R eine, durch die auf Polar-Koordinaten R und $\theta$ bezogene Gleichung der Kurve $D'N'R'$ gegebene Funktion von $\theta$.

Hernach ist nach demſelben (Analyſ. §. 35.)

7) $\int_{\beta \div \alpha} \left(\int_{R \div 0} r \cdot dr\right) \cdot d\theta$ die Summe aller dieſer Sektoren, von $\theta = OFD' = \alpha$ an, bis zu $\theta = OFR' = \beta$ hin, d. h. der Inhalt $D'FR'$.

Nun ist aber $\int r \cdot dr = \tfrac{1}{2}r^2$, also $\int_{R \div 0} r \cdot dr = \tfrac{1}{2}R^2$; folglich findet ſich der Inhalt $D'FR'$, näher ausgewerthet,

8) $$= \int_{\beta \div \alpha} (\tfrac{1}{2}R^2) \cdot d\theta,$$

welches genau mit dem Reſultat (II. 4.) übereinſtimmt.

IV. Aber auf ganz analoge Art läßt ſich auch die Länge des Bogens DM finden; es mag die Kurve ſelbſt durch eine Gleichung zwiſchen rechtwinklichen oder zwiſchen Polar-Koordinaten gegeben ſeyn.

---

*) Es ist $r \cdot d\theta$ der Bogen $MM_2$ und $dr = MM_1$, also ist $r \cdot d\theta \cdot dr$ der Inhalt von $MM_1M_2M_2$, wenn man letzteres als ein Rechteck anſieht, deſſen eine Seite $dr = MM_1$, deſſen andere Seite $r \cdot d\theta = MM_2$ ist.

Nach dem Begriffe einer Kurve kann man solche als den Uebergang einer gebrochenen Linie betrachten, deren einzelne geradlinigen Theile nach und nach immer kleiner und zuletzt unendlich-klein, im Sinne des (§. 20. Analys.), werden. Nach derselben Ansicht ist nun in (I. u. II.) ein solches unendlich-kleines, zu einem bestimmten x gehöriges Element der Kurve gefunden worden.

1) $\qquad = \sqrt{1+\partial y_x^2}\cdot dx,$

wenn $y = y_x$ die Gleichung der Kurve ist,

und auch 2) $\qquad = \sqrt{R^2+\partial R_\theta^2}\cdot d\theta,$

wenn $R = R_\theta$ die Gleichung der Kurve zwischen den Polar-Koordinaten R und $\theta$ ist.

Da nun die Länge des Bogens DM (Fig. 18.) die Summe aller dieser Elemente ist, wie sie sich aus der einen oder der andern der Formeln (1. oder 2.), z. B. aus der (1.) für alle Werthe von x, die um das unendlich-kleine dx von einander verschieden sind, von $x = OE = a$ an bis zu $x = OP = b$ hin ergeben, oder welche z. B. aus der (2.) hervorgehen, indem man statt $\theta$ alle, um das unendlich-kleine $d\theta$ von einander verschiedene Werthe von $\theta = OFD = \alpha$ an bis zu $\theta = OFM = \beta$ hin gesetzt sich denkt, — und da nach (Analys. §. 37.) die Summe aller dieser Elemente (1.) oder (2.) allemal

$$= \int_{b\div a} \sqrt{1+\partial y_x^2}, \quad \text{oder} \quad = \int_{\beta\div\alpha} \sqrt{R^2+\partial R_\theta^2}\cdot d\theta$$

ist, so findet sich nach dieser jetzigen Ansicht DM genau so, wie wir solches in (I. 5., wo $b = x$ gedacht ist), oder in (II. 3., wo $\beta = \theta$ gedacht ist) bereits gefunden haben.

Anmerk. Die Länge des Bogens einer Kurve finden, nennt man aber häufig die Rektifikation der Kurve. Unter Quadratur einer Kurve versteht man dagegen die Auffindung des Inhaltes einer Fläche, welche zum Theil oder ganz von dieser Kurve begrenzt ist.

Und weil der Inhalt einer Fläche nach (I. 6.) durch $\int y_x \cdot dx$ dargestellt ist, so belegt man deshalb schon in der Inte-

gral-Rechnung die Integrale einer entwickelt gegebenen Funktion y von x, ebenfalls mit dem Namen der Quadraturen.

## §. 7.

### Von den Berührungen und Osculationen.

Jede Kurve wird an jedem ihrer Punkte, ihrer Richtung nach mit einer geraden Linie verglichen (welche die Tangente der Kurve an dieser Stelle heißt), ihrer Krümmung nach aber mit einem Kreise, welcher der Krümmungskreis genannt wird, und dessen Halbmesser der Krümmungshalbmesser der Kurve an dieser Stelle heißt. — Diese beiden Begriffe machen einen Theil einer allgemeinern Theorie, welche man die Theorie der Osculationen nennt, und welche kurz so ist.

I. Denkt man sich in zweien geraden oder krummen Linien die Abscisse x beliebig aber genau dieselbe, und die zugehörigen Ordinaten durch die Funktionen $y_x$ in der einen dieser Kurven und $y'_x$ in der andern derselben Kurven ausgedrückt, so haben beide Kurven den zum Abscissen-Werth $\alpha$ gehörigen Punkt P mit einander gemein, wenn

1) für $x = \alpha$, auch $y_x = y'_x$ wird.

Wird nun die nächst größere oder nächst kleinere Abscisse durch $x+h$ bezeichnet, wo h unendlich-klein gedacht ist, so ist der Unterschied D der zugehörigen Ordinaten in beiden Kurven (also der Abstand D der beiden Punkte, welche in jeder Kurve dem gemeinschaftlichen Punkt P nächst anliegen, in der Ordinaten-Richtung genommen) offenbar gegeben durch die Gleichung

(⊙)··· $D = y_{x+h} - y'_{x+h}$;

oder es ist, nach dem Taylor'schen Satze, und weil für $x = \alpha$ bereits $y_x - y'_x = 0$ ist, dieser Unterschied D, ebenfalls für $x = \alpha$,

$$= (\partial y_x - \partial y'_x)\cdot h + (\partial^2 y_x - \partial^2 y'_x)\cdot\frac{h^2}{2!} + (\partial^3 y_x - \partial^3 y'_x)\cdot\frac{h^3}{3!} + \cdots;$$

und dieſer Unterſchied D iſt nun deſto kleiner, d. h. die beiden Kurven rücken an dieſer Stelle (wo $x = \alpha$ iſt) einander deſto näher, je mehr erſte Glieder dieſer, nach dem unendlich-kleinen h geordneten Reihe, verſchwinden, alſo je mehr der nächſt folgenden von den Gleichungen

$$\left.\begin{array}{ll} 2) & \partial y_x = \partial y'_x \\ 3) & \partial^2 y_x = \partial^2 y'_x \\ 4) & \partial^3 y_x = \partial^3 y'_x \end{array}\right\} \text{für } x = \alpha$$

mit der erſtern Gleichung $y_x = y'_x$ zugleich ſtatt finden. Und findet noch die Gleichung $\partial^n y_x = \partial^n y'_x$ ſtatt, aber nicht mehr $\partial^{n+1} y_x = \partial^{n+1} y'_x$, ſo ſagt man: **beide Kurven haben eine Oſculation der nten Ordnung** mit einander.

Iſt nun die Gleichung der einen dieſer Linien z. B. $y'_x$ nicht vollſtändig gegeben, ſondern nur der Form nach, aber mit mehreren unbeſtimmten Koeffizienten und Exponenten a, b, c, ꝛc. ꝛc. verſehen (welche **Parameter** genannt werden), ſo kann man von den Gleichungen (1. 2. 3. 4. ...) ſo viel der erſtern (**für dieſen Werth $\alpha$ von x**) identiſch machen, als ſolche unbeſtimmte Parameter a, b, c, ꝛc. vorkommen und beſtimmt werden ſollen *).

II. Nimmt man nun außer der erſten Kurve $y = y_x$ die zweite

---

*) Cauchy behauptet mit einigem Rechte, daß dieſes Verfahren des Lagrange, die Oſculationen von der Lage der Axen, und namentlich von der Lage der Ordinaten-Richtung, in welcher der Abſtand D genommen iſt, abhängig erſcheinen laſſe. Allein führt man neue Axen OU, OV ein, ſo daß

$$x = u \cdot \cos\alpha + v \cdot \cos\alpha',$$
$$y = u \cdot \cos\beta + v \cdot \cos\beta'$$

wird, ſo läßt ſich ſehr leicht nachweiſen, daß, ſo oft $\partial y_x = \partial y'_x$ iſt für $x = \alpha$, dann allemal auch $\partial v_u = \partial v'_u$ ſeyn müſſe, für den zu $x = \alpha$ gehörigen Werth von u. — Durch dieſen letzteren Nachweis, der ſich auf die Differenzial-Koeffizienten aller Ordnungen ausdehnen läßt, wird aber dieſes Lagrange'ſche Verfahren ganz ſtrenge.

$$y' = a \cdot x' + b, \text{ oder für } x' = x$$
$$y'_x = a \cdot x + b, \text{ also } \partial y'_x = a,$$

so ist die zweite Kurve eine gerade Linie, und die Gleichung derselben

$$y' = a \cdot x' + b$$

enthält zwei unbestimmte Parameter a und b. — Man kann daher bloß die zwei erstern dieser Gleichungen (I. 1. 2.) identisch machen, nämlich

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & y_x = a \cdot x + b \\ 2) & \partial y_x = a \end{array}\right\} \text{für } x = \alpha$$

setzen, daraus

$$3) \quad a = \partial y_x \text{ und } b = y_x - x \cdot \partial y_x$$

finden, und die Gleichung der geraden Linie, welche mit der gegebenen Kurve

$$y = y_x$$

eine Osculation der ersten Ordnung nur haben kann, und welche die (geradlinige) Tangente der Kurve an dieser Stelle (wo $x = \alpha$ ist) genannt wird, ist daher

$$y' = a \cdot x' + b,$$

wo a und b die Werthe aus (3.) haben; — d. h. die Gleichung der geradlinigen Tangente ist

$$(\odot) \cdots \quad y' - y = \partial y_x \cdot (x' - x) \text{ *),}$$

---

*) Man kann diese Gleichung auch so finden. Denkt man sich (Fig. 10.) die Kurve CPE als eine stetig gebrochene Linie und die Tangente TPN als die Verlängerung eines solchen unendlich-kleinen geradlinigen Elementes PN der Kurve, so liegt N in der Tangente und in der Kurve zugleich. Wird nun $OQ = x$, $QR = PS = dx$ gesetzt, so wie $NS = dy$, so daß $dy = \partial y_x \cdot dx$ ist, so hat man, wenn Winkel $PTX = \text{W. } NPS = \alpha$ gesetzt wird, $tg\,\alpha = \frac{dy}{dx} = \partial y_x$; und die Gleichung der geraden Linie TP nach (§. 4.), nämlich

$$y' - y = tg\,\alpha \cdot (x' - x)$$

geht nun sogleich in

$$y' - y = \partial y_x \cdot (x' - x)$$

über, wie wir dieselbe im Texte gefunden haben.

wo $x'$ und $y'$ die Koordinaten eines beliebigen Punktes der (geradlinigen) Tangente vorstellen, während x und y die Koordinaten desjenigen Punktes der gegebenen Kurve bedeuten, an welchem die Berührung statt finden soll.

Will man die Gleichung der durch denselben Berührungspunkt (x, y) gehenden (auf der Tangente senkrechten) Normale haben, so erhält man sie, nach (§. 4. III. D.) sogleich wie folgt:

$$(\mathfrak{C})\cdots \qquad y_1 - y = -\frac{1}{\partial y_x}\cdot(x_1 - x),$$

wo $x_1$, $y_1$ die Koordinaten-Werthe eines jeden beliebigen Punktes dieser Normale vorstellen.

Denkt man sich die Tangente PN (Fig. 10.) so weit verlängert, bis sie in T der Abscissen-Axe OX begegnet, so nennt man QT die Subtangente. Wird aber die Normale MP so weit verlängert, bis sie derselben Axe OX in W begegnet, so wird QW die Subnormale genannt. — Bezeichnet man durch $x'$ den Abscissen-Werth (d. h. den Werth von $x'$) für den Punkt T, dessen Ordinaten-Werth $y' = 0$ ist; so hat man nach (§. 1. VI.)

$$\text{Subtang. } QT = \pm(x - x'),$$

wo das (+) Zeichen gilt, wenn T links von Q, das (−) Zeichen dagegen, wenn T rechts von Q liegt, weil die Subtangente als Linie immer absolut (positiv) seyn muß. — Und da aus der Gleichung $(\odot)$, wenn man 0 statt $y'$, und $x'$ statt $x'$ setzt,

$$x - x' = \frac{y}{\partial y_x}$$

folgert, so hat man allemal

---

Man kann auch zwei beliebige zu den Abscissen x und x+h gehörige Punkte der erst gegebenen Kurve nehmen, eine gerade Linie durchlegen (welche Sekante der Kurve ist), d. h. die Gleichung dieser letztern finden, zuletzt aber 0 statt h setzen, wodurch die Sekante in die gesuchte Tangente übergeht.

$$y' = a \cdot x' + b, \text{ oder für } x' = x$$
$$y'_x = a \cdot x + b, \text{ also } \partial y'_x = a,$$

so ist die zweite Kurve eine gerade Linie, und die Gleichung derselben

$$y' = a \cdot x' + b$$

enthält zwei unbestimmte Parameter a und b. — Man kann daher bloß die zwei erstern dieser Gleichungen (I. 1. 2.) identisch machen, nämlich

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & y_x = a \cdot x + b \\ 2) & \partial y_x = a \end{array}\right\} \text{für } x = \alpha$$

setzen, daraus

$$3) \qquad a = \partial y_x \text{ und } b = y_x - x \cdot \partial y_x$$

finden, und die Gleichung der geraden Linie, welche mit der gegebenen Kurve

$$y = y_x$$

eine Osculation der ersten Ordnung nur haben kann, und welche die (geradlinige) Tangente der Kurve an dieser Stelle (wo $x = \alpha$ ist) genannt wird, ist daher

$$y' = a \cdot x' + b,$$

wo a und b die Werthe aus (3.) haben; — d. h. die Gleichung der geradlinigen Tangente ist

$$(\odot) \cdots \qquad y' - y = \partial y_x \cdot (x' - x) \text{ *)},$$

---

*) Man kann diese Gleichung auch so finden. Denkt man sich (Fig. 10.) die Kurve CPE als eine stetig gebrochene Linie und die Tangente TPN als die Verlängerung eines solchen unendlich-kleinen geradlinigen Elementes PN der Kurve, so liegt N in der Tangente und in der Kurve zugleich. Wird nun $OQ = x$, $QR = PS = dx$ gesetzt, so wie $NS = dy$, so daß $dy = \partial y_x \cdot dx$ ist, so hat man, wenn Winkel $PTX = \mathfrak{W}.NPS = \alpha$ gesetzt wird, $tg\,\alpha = \frac{dy}{dx} = \partial y_x$; und die Gleichung der geraden Linie TP nach (§. 4.), nämlich

$$y' - y = tg\,\alpha \cdot (x' - x)$$

geht nun sogleich in

$$y' - y = \partial y_x \cdot (x' - x)$$

über, wie wir dieselbe im Texte gefunden haben.

wo $x'$ und $y'$ die Koordinaten eines beliebigen Punktes der (geradlinigen) Tangente vorstellen, während x und y die Koordinaten desjenigen Punktes der gegebenen Kurve bedeuten, an welchem die Berührung statt finden soll.

Will man die Gleichung der durch denselben Berührungspunkt (x, y) gehenden (auf der Tangente senkrechten) Normale haben, so erhält man sie, nach (§. 4. III. D.) sogleich wie folgt:

$$(\bigcirc\cdots \qquad y_1 - y = -\frac{1}{\partial y_x}\cdot(x_1 - x),$$

wo $x_1$, $y_1$ die Koordinaten-Werthe eines jeden beliebigen Punktes dieser Normale vorstellen.

Denkt man sich die Tangente PN (Fig. 10.) so weit verlängert, bis sie in T der Abscissen-Axe OX begegnet, so nennt man QT die Subtangente. Wird aber die Normale MP so weit verlängert, bis sie derselben Axe OX in W begegnet, so wird QW die Subnormale genannt. — Bezeichnet man durch $x'$ den Abscissen-Werth (d. h. den Werth von $x'$) für den Punkt T, dessen Ordinaten-Werth $y' = 0$ ist; so hat man nach (§. 1. VI.)

$$\text{Subtang. } QT = \pm(x - x'),$$

wo das (+) Zeichen gilt, wenn T links von Q, das (−) Zeichen dagegen, wenn T rechts von Q liegt, weil die Subtangente als Linie immer absolut (positiv) seyn muß. — Und da aus der Gleichung ($\bigcirc$), wenn man 0 statt $y'$, und $x'$ statt $x'$ setzt,

$$x - x' = \frac{y}{\partial y_x}$$

folgert, so hat man allemal

---

Man kann auch zwei beliebige zu den Abscissen x und x+h gehörige Punkte der erst gegebenen Kurve nehmen, eine gerade Linie durchlegen (welche Sekante der Kurve ist), d. h. die Gleichung dieser letztern finden, zuletzt aber 0 statt h setzen, wodurch die Sekante in die gesuchte Tangente übergeht.

(♂)··· Subtang. $QT = \pm\frac{y}{\partial y_x}$,

je nachdem T $\left\{\begin{matrix}\text{links}\\\text{rechts}\end{matrix}\right\}$ von Q liegt.

Ganz auf dieſelbe Weiſe findet man die Subnormale. Weil aber Tangente und Normale auf einander ſenkrecht ſtehen, ſo iſt im Δ TPW (Fig. 10.) allemal

$$TQ : QP = QP : QW,$$

alſo, weil $QP = y$ iſt,

(♀)··· Subnorm. $QW = \frac{y^2}{\text{Subtg.}} = \pm y \cdot \partial y_x$,

wo das (+) Zeichen gilt, wenn W rechts, das (—) Zeichen dagegen, wenn W links liegt *). — Dabei mag man nicht überſehen, daß $\partial y_x = \frac{\partial y_t}{\partial x_t}$ iſt, ſo oft x und y als Funktionen von t angeſehen werden ſollten.

III. Nimmt man in (I.) ſtatt der zweiten Kurve die, durch die Gleichung

1) $(y' - b)^2 + (x - a)^2 - c^2 = 0$

der Form nach gegebene (Kreislinie), ſo erhält man aus ihr, wenn man dieſe Gleichung hinter einander nach allem x differenziirt,

2) $(y' - b) \cdot \partial y'^2_x + (x - a) = 0$,

3) $(y' - b) \cdot \partial^2 y_x + \partial y'^2_x + 1 = 0$.

Man kann nun aus dieſen 3 Gleichungen ſowohl $y'_x$, als auch $\partial y'_x$ und $\partial^2 y'_x$ algebraiſch entwikkeln und dann ſolche (für den Werth α von x) bezüglich den $y_x$, $\partial y_x$, $\partial^2 y_x$ der erſt gegebenen

*) Liegt demnach T links und W rechts, ſo ſind y und $\partial y_x$ nothwendig beide poſitiv oder beide negativ. Liegt aber T rechts und W links, ſo haben y und $\partial y_x$ (immer für dieſen Werth α von x, der dem beſtimmten Punkte P zukommt) allemal verſchiedene (+) oder (—) Zeichen, weil die Subtangente und die Subnormale, ihrer Definition zu Folge, als exiſtirende Entfernungen, immer poſitiv (d. h. nicht negativ) werden müſſen.

Kurve gleich ſetzen, um ſonach den erſtern 3 Gleichungen (1. 2. 3.) der (I.) genügt zu haben. — Die Endreſultate der Rechnung werden aber dieſelben, wenn man aus dieſen 3 Gleichungen hier, und jenen 3 Gleichungen $y_x = y'_x$, $\partial y_x = \partial y'_x$ und $\partial^2 y_x = \partial^2 y'_x$ der (I.), die Ausdrücke $y'_x$, $\partial y'_x$ und $\partial^2 y'_x$ eliminirt, alſo auch, wenn man dieſe Ausdrücke aus den letzteren 3 Gleichungen findet und in die obern 3 Gleichungen ſubſtituirt.

Dies giebt aber als End-Reſultat der Rechnung dieſelben 3 Gleichungen (1. 2. 3.) wieder, nur daß an die Stelle der $y'$, $\partial y'_x$, $\partial^2 y'_x$, jetzt die $y$, $\partial y_x$ und $\partial^2 y_x$ (der erſt gegebenen Kurve) zu ſtehen kommen.

Löſt man aber (immer unter der Vorausſetzung, daß unter $x$ der beſtimmte Werth $\alpha$ gedacht wird, zu welchem der oſculirende Kreis gefunden werden ſoll) dieſe zuletzt erhaltenen 3 Gleichungen, nämlich

$$(A)\cdots \quad \left\{ \begin{array}{rl} (y-b)^2+(x-a)^2 & = c^2 \\ (y-b)\cdot\partial y_x+(x-a) & = 0 \\ (y-b)\cdot\partial^2 y_x+\partial y_x^{\,2}+1 & = 0 \end{array} \right.$$

nach den unbekannten a, b, c algebraiſch auf, ſo erhält man:

$$(B)\cdots \quad \left\{ \begin{array}{l} b-y = \dfrac{1+\partial y_x^{\,2}}{\partial^2 y_x} \\ a-x = -\partial y_x\cdot\dfrac{1+\partial y_x^{\,2}}{\partial^2 y_x} \end{array} \right\} \text{woraus die Koordinaten-Werthe a und b des Mittelpunkts d. Krümmungs-Kreiſes ſich ergeben.}$$

$$c = \frac{\pm(1+\partial y_x^{\,2})^{\frac{3}{2}}}{\partial^2 y_x} \quad \left\{ \text{welches der Krümmungs-Halbmeſſer iſt;} \right.$$

wobei das (+) Zeichen gilt, wenn $\partial^2 y_x$ poſitiv iſt, wo dagegen das (—) Zeichen der Wurzel $(1+\partial y_x^{\,2})^{\frac{3}{2}}$ genommen werden muß, wenn $\partial^2 y_x$ negativ ſeyn ſollte; weil der Krümmungs-Halbmeſſer c allemal poſitiv (d. h. nicht negativ) werden muß.

Sind x und y als Funktionen von t angeſehen, ſo hat man nach (§. 16. Analyſ.)

$$(C)\cdots\begin{cases}\partial y_x = \dfrac{\partial y_t}{\partial x_t}\\ \partial^2 y_x = \dfrac{\partial x_t\cdot\partial^2 y_t - \partial y_t\cdot\partial^2 x_t}{\partial x_t^3}\end{cases}$$

Substituirt man daher diese Ausdrücke in den Ausdruck für den Krümmungs-Halbmesser in (B.), so erhält man noch

$$(D)\cdots\quad c = \frac{(\partial x_t^2+\partial y_t^2)^{\frac{3}{2}}}{\partial x_t\cdot\partial^2 y_t - \partial y_t\cdot\partial^2 x_t},$$

wodurch derselbe Krümmungs-Halbmesser noch in anderer Form dargestellt ist.

Setzt man den Bogen der Kurve, der zur Abscisse x gehört, $= s$, so ist nach (§. 6. I. Nr. 3.)

$\partial s_x = \sqrt{1+\partial y_x^2}$, also auch $\partial s_t = \sqrt{\partial x_t^2+\partial y_t^2}$.

Daher läßt sich der Krümmungs-Halbmesser c auch so schreiben:

$$(E)\cdots\begin{cases}c = \pm\dfrac{\partial s_x^3}{\partial^2 y_x},\\ \text{oder}\\ c = \pm\dfrac{\partial s_t^3}{\partial x_t\cdot\partial^2 y_t - \partial y_t\cdot\partial^2 x_t},\end{cases}$$

wo dasjenige (+ oder −) Zeichen gilt, welches c positiv macht *).

*) Man findet den Krümmungs-Halbmesser auch dadurch, daß man die Kurve als eine stetig gebrochene Linie sich denkt, und dann durch 3 nächst auf einander folgende Ecken, deren Abscissen x, x+dx und x+m·dx sind, eine Kreislinie legt.

Man kann auch 3 Punkte nehmen, welche beliebig weit aus einander liegen, welche z. B. die Abscissen-Werthe x, x+h, x+m·h haben, — eine Kreislinie durchlegen, den Halbmesser derselben finden, und zuletzt in dem dafür gefundenen Ausdruck, 0 statt h setzen, und man wird den Krümmungs-Halbmesser haben.

Man legt aber durch 3 Punkte, deren Koordinaten-Werthe $(\alpha, \beta)$, $(\alpha', \beta')$, $(\alpha'', \beta'')$ sind, dadurch eine Kreislinie, daß man in ihre allgemeine Gleichung

$$(y'-b)^2+(x'-a)^2 = c^2,$$

(in so ferne jeder dieser Punkte in dieser Kreislinie liegen soll, seine Koor-

IV. Der Krümmungs-Kreis hat, wie man sieht, eine Oscillation der zweiten Ordnung mit der gegebenen Kurve an der gegebenen Stelle. — Hätte man Kreise gesucht, welche mit der gegebenen Kurve an der gegebenen Stelle bloß eine Oscilation der ersten Ordnung haben, und welche man **berührende Kreise** nennt, so hätte man von den 3 Gleichungen (III. A.), der (I.) zu Folge, nur die beiden erstern nehmen dürfen, also nur die Gleichungen

1′) $(y-b)^2+(x-a)^2=c^2$

und 2′) $(y-b)\cdot\partial y_x+(x-a)=0.$

Dann aber kann man von den 3 Parametern a, b, c, nur zwei (in den dritten) ausdrücken.

Man erhält also nach den unendlich vielen beliebigen Werthen des dritten Parameters unendlich viele berührende Kreise an den

---

dinaten-Werthe also dieser Gleichung genügen müssen, wenn man solche statt x′ und y′ setzt) statt x′, y′ zuerst α und β, dann α′, β′, zuletzt aber α″, β″ substituirt, und die 3 entstehenden Gleichungen nach a, b, c algebraisch auflöst.

Hier aber ist

$\alpha=x,\ \beta=y\ ;\ \alpha'=x+h,\ \beta'=y_{x+h};\ \alpha''=x+m\cdot h,\ \beta''=y_{x+m\cdot h}.$

Die erste dieser 3 Gleichungen wird daher

$$(y_x-b)^2+(x-a)^2-c^2=0,\ \text{oder}\ f_{(x)}=0,$$

wenn $f_{(x)}$ den Ausdruck $(y-b)^2+(x-a)^2-c^2$ vorstellt; die beiden andern werden aber dann

$$f_{(x+h)}=0\ \text{und}\ f_{(x+m\cdot h)}=0,$$

oder, wegen des Taylor'schen Lehrsatzes, und weil schon $f_{(x)}=0$ ist,

$$\partial f_{(x)}+\partial^2 f_{(x)}\cdot\frac{h}{2!}+\partial^3 f_x\cdot\frac{h^2}{3!}+\cdots=0,$$

und

$$\partial f_{(x)}\cdot m+\partial^2 f_{(x)}\cdot\frac{m^2h}{2!}+\partial^3 f_{(x)}\cdot\frac{m^3\cdot h^2}{3!}+\cdots=0.$$

Für $h=0$ ergiebt sich aus diesen Gleichungen

$$\partial f_{(x)}=0,\ \text{und}\ \partial^2 f_{(x)}=0;$$

und dies sind die obigen 3 Gleichungen (A.).

Nimmt man das im (§. 20. Nr. 10. der Analys.) Erwiesene zu Hilfe, und betrachtet man den Krümmungs-Kreis als denjenigen, welcher durch 3 zunächst auf einander folgende Punkte der Kurve geht, so hat man augenblicklich $f_{(x)}=0$, $\partial f_{(x)}=0$ und $\partial^2 f_{(x)}=0$ zu seiner Bestimmung.

selben gegebenen Stelle der gegebenen Kurve. Die Gleichung (1′.) giebt c; die Gleichung (2′.) dagegen enthält kein c und lehrt, wie die Koordinaten-Werthe a und b des Mittelpunktes von einander abhängen. Diese Gleichung (2′.) ist aber keine andere als die Gleichung (C) der (II.), d. h. die Gleichung einer Normale an dieser Stelle. — Die Mittelpunkte aller, an einem gegebenen Punkte die Kurve berührenden Kreise (unter denen der Krümmungs-Kreis, der an dieser Stelle mit der Kurve eine Osculation der zweiten Ordnung hat, ebenfalls enthalten ist) liegen also alle in der Normale der Kurve an dieser Stelle.

Anmerk. Wir können diesen (§. 7.), welcher die Theorie der Osculationen enthält, nicht verlassen, ohne noch die in den Noten (S. 186.) und (S. 190.) für die Auffindung der geradlinigen Tangente und des Krümmungs-Kreises gegebene Ansicht hier ganz allgemein für alle Osculationen hinzustellen.

In der hier im (§. 7.) durchgeführten Ansicht hatten aber zwei ebene Kurven an einer Stelle eine Osculation der nten Ordnung, wenn sie an dieser Stelle einen Punkt gemein hatten, und wenn die diesem gemeinschaftlichen Punkte in jeder der beiden Kurven nächst anliegenden Punkte so wenig wie möglich und zwar so wenig unterschieden sind, daß dieser Unterschied ein Unendlich-Kleines der $n+1$sten Ordnung nur ist, während der Unterschied der zugehörigen Abscissen-Werthe als ein Unendlich-Kleines der ersten Ordnung betrachtet wird.

Man könnte aber auch sagen: „zwei ebene Kurven $y = y_x$ „und $y' = y'_x$ haben an einer Stelle eine Osculation der nten „Ordnung, wenn sie an dieser Stelle $n+1$ nächst auf einander „der folgende Punkte mit einander gemein haben.“ — Ginge man von dieser Definition der Osculation aus, so wäre $y_x - y'_x = 0$ für $n+1$ nächst auf einander folgende Werthe von x; als müßte dann ohne weiteres nach (Analys. §. 20. Nr. 10., wenn daselbst $y_x - y'_x$ statt $f_x$ gesetzt wird)

nicht bloß $\quad y_x - y'_x = 0,$

sondern noch $\quad \partial(y_x - y'_x)_x = 0$

$$\delta^2(y_x - y'_x)_x = 0$$
$$\delta^3(y_x - y'_x)_x = 0$$

u. s. f., so wie zuletzt noch

$$\delta^n(y_x - y'_x)_x = 0$$

seyn; und dies sind genau die Resultate des (§. 7. I.). — Beide Begriffe der Osculation führen daher zu einem und demselben Resultat. Dieser hier so eben betretene Weg giebt aber die Resultate viel bequemer, nämlich sogleich und unmittelbar.

Wollte man von dieser dritten Definition ausgehen: „Zwei „ebene Kurven haben eine Osculation der nten Ordnung an einer „gegebenen Stelle, wenn sie anfänglich n+1 beliebig weit von „einander liegende, zu den beliebigen Abscissen-Werthen x, x+h, „x+m·h, x+m'·h, x+m''·h, ... x+m$^{(n-1)}$·h gehörige Punkte mit „einander gemein haben, diese aber dadurch daß h immer klei„ner und kleiner gedacht wird, nach und nach einander näher „und näher rücken, und zuletzt alle in dem zum Abscissen-Werth „x gehörigen Punkte zusammenfallen," — wollte man, sage ich, von dieser Definition der Osculationen ausgehen, so würde man immer noch zu denselben End-Resultaten geführt werden; und man hätte dann diejenige Ansicht allgemein durchgeführt, welche in der Note zu (S. 187.) (wo man zuerst die Sekante fand und diese dann in die Tangente übergehen ließ) und in der zweiten Hälfte der Note zu (S. 190.) für den Krümmungs-Kreis bereits speciell entwikkelt sich findet.

## §. 8.

### Von den Kegelschnitten in's Besondere.

I. Denkt man sich eine Kurve vorgestellt durch die Gleichung der zweiten Ordnung,

1) $A \cdot y^2 + B \cdot xy + C \cdot x^2 + D \cdot y + E \cdot x + F = 0$,

auf senkrechte Axen OX und OY bezogen, und legt man dann durch einen Punkt O', dessen Koordinaten-Werthe p und q sind, neue auf einander senkrechte Axen O'U und O'V, welche mit den alten Axen OX und OY bezüglich die Winkel $\alpha$, $\beta$ und

$\alpha'$, $\beta'$ machen, so hat man zwischen den alten Koordinaten-Werthen x und y, und den neuen u und v eines und desselben Punktes M der Ebene (also auch der durch die Gleichung (1.) gegebenen Kurve) nach (§. 5. III.) die beiden Gleichungen

$$2) \quad x = u \cdot \cos\alpha + v \cdot \cos\alpha' + p$$

$$3) \quad y = u \cdot \cos\beta + v \cdot \cos\beta' + q,$$

wo

$$4) \quad \cos\alpha^2 + \cos\beta^2 = 1; \quad \cos\alpha'^2 + \cos\beta'^2 = 1;$$

und

$$\cos\alpha \cdot \cos\alpha' + \cos\beta \cdot \cos\beta' = 0$$

ist, so daß von den 4 Winkeln $\alpha$, $\beta$, $\alpha'$, $\beta'$ eigentlich nur einer ganz willkührlich ist. — Eliminirt man nun aus den Gleichungen (1.—3.) sowohl x als y, so erhält man

$$5) \quad A' \cdot v^2 + B' \cdot vu + C' \cdot u^2 + D' \cdot v + E' \cdot u + F' = 0,$$

wo

$$6) \quad \begin{cases} A' = A \cdot \cos\beta'^2 + B \cdot \cos\alpha' \cdot \cos\beta' + C \cdot \cos\alpha'^2; \\ B' = 2A \cdot \cos\beta \cdot \cos\beta' + 2C \cdot \cos\alpha \cdot \cos\alpha' + \\ \qquad B \cdot (\cos\alpha \cdot \cos\beta' + \cos\alpha' \cdot \cos\beta); \\ C' = A \cdot \cos\beta^2 + B \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta + C \cdot \cos\alpha^2; \\ D' = 2Aq \cdot \cos\beta' + 2Cp \cdot \cos\alpha' + \\ \qquad B \cdot (p \cdot \cos\beta' + q \cdot \cos\alpha') + D \cdot \cos\beta' + E \cdot \cos\alpha'; \\ E' = 2Aq \cdot \cos\beta + 2Cp \cdot \cos\alpha + \\ \qquad B \cdot (p \cdot \cos\beta + q \cdot \cos\alpha) + D \cdot \cos\beta + E \cdot \cos\alpha; \\ F' = Aq^2 + Bpq + Cp^2 + Dq + Ep + F \end{cases}$$

ist. — Da man nun über einen der 4 Winkel $\alpha$, $\beta$, $\alpha'$, $\beta'$, z. B. über $\alpha$, so wie über p und q, disponiren kann, wenn man solche ganz unbestimmt gelassen hat, so kann man sich diese 3 Werthe $\alpha$, p, q so bestimmt denken, daß die 3 Koeffizienten $B'$, $D'$ und $F'$ der Null gleich werden. — Löst man die Gleichungen

$$B' = 0, \quad D' = 0 \quad \text{und} \quad F' = 0$$

nach $\alpha$, p und q auf, so finden sich reelle Werthe dafür, so daß man also, wie auch die durch die Gleichung (1.) gegebene Kurve beschaffen seyn mag, doch immer neue Axen O'U und O'V so legen kann, daß dieselbe Kurve durch die viel einfachere Gleichung

$$A' \cdot v^2 + C' \cdot u^2 + E' \cdot u = 0,$$

oder $$v^2 = a \cdot u^2 + b \cdot u$$

ausgedrückt werden kann, die sich auf diese neuen, gegen die Kurve bequemer liegenden Axen O′U und O′V bezieht.

II. Da wir nun unter einem Kegelschnitt jede Kurve der zweiten Ordnung verstehen (nach §. 5. III.), so folgt, daß man in jedem Kegelschnitt zwei auf einander senkrechte Axen OX und OY allemal so legen kann, daß die auf diese Axen bezogene Gleichung des Kegelschnitts bloß diese einfache Form

1) $$y^2 = A \cdot x^2 + B \cdot x,$$

haben wird. — Diese Gleichung von dieser einfachen Form nennt man aber die Scheitel-Gleichung der Kegelschnitte. — Denkt man sich die Ordinaten-Axe OY (Figg. 14. u. 42.) parallel mit sich fortgerückt, so daß sie in die Lage O′Y′ kommt; und denkt man sich den Abscissen-Werth von O′ durch p ausgedrückt, so wie den neuen Abscissen-Werth ±O′P eines Punktes M der Kurve $= x'$ gesetzt, wenn der alte Abscissen-Werth desselben Punktes M, $= x$ war, so hat man

2) $$x = x' + p;$$

und dieser Werth statt x in die Gleichung (1.) substituirt, giebt

3) $$y^2 = A \cdot x'^2 + (2Ap + B) \cdot x' + Ap^2 + Bp,$$

welches die Gleichung desselben Kegelschnitts ist, auf die neuen Axen O′X und O′Y bezogen.

Nimmt man hier p so, daß $2Ap + B = 0$ wird, nimmt man also

4) $$p = -\frac{B}{2A},$$

so geht die Gleichung (3.) wieder in diese einfachere

5) $$y^2 = A \cdot x'^2 - \frac{B^2}{4A}$$

über, welches immer noch die Gleichung desselben Kegelschnittes ist, auch eine eben so einfache Gleichung, aber nicht mehr so allgemein, als die Scheitel-Gleichung (1.), weil sie voraussetzt, daß A nicht Null ist, in so ferne nur unter dieser Voraussetzung der Gleichung (4.) genügt werden kann.

III. Die durch die Gleichung (II. 1.), nämlich durch die Scheitel-Gleichung,

1) $y^2 = A \cdot x^2 + B \cdot x$, oder $y = \pm\sqrt{A \cdot x^2 + B \cdot x}$

ausgedrückten Kegelschnitte (d. h. alle Kurven, die man Kegelschnitte oder Linien der zweiten Ordnung nennt) haben

α) vier unendliche Schenkel und werden Hyperbeln genannt, wenn A positiv ist; weil dann zu den größten positiven und negativen Werthen von x, allemal 2 reelle Werthe von y gehören;

β) keinen unendlichen Schenkel, und werden Ellipsen genannt, wenn A negativ ist, weil die, zu sehr großen (positiven oder negativen) Werthen von x gehörigen Werthe von y, dann immer imaginär werden;

γ) zwei unendliche Schenkel, und werden Parabeln genannt, wenn $A = 0$ ist, weil dann nur auf der einen Seite der Ordinaten-Axe die beiden Werthe von y immer reell werden, auf der andern dagegen imaginär.

Alle Kegelschnitte zerfallen daher in die so eben genannten 3 Klassen, nämlich in die Hyperbeln, Ellipsen und Parabeln. —

Diese Eintheilung ergiebt sich aber schon aus der sechsgliedrigen Gleichung der Kegelschnitte, nämlich aus der Gleichung

2) $a \cdot y^2 + b \cdot xy + c \cdot x^2 + d \cdot y + e \cdot x + f = 0$,

welche nach y aufgelöst, in

3) $y = -\dfrac{(b \cdot x + d) \pm \sqrt{(b^2 - 4ac) \cdot x^2 + 2(bd - 2ae) \cdot x + (d^2 - 4af)}}{2a}$

übergeht. Hier hängt es nämlich wieder von dem Koeffizienten von $x^2$ ab, also von

$$b^2 - 4ac,$$

ob die Kurve, vier, keine, oder nur zwei unendliche Schenkel hat. Die Gleichung (2.) stellt also, wenn sie überhaupt eine Kurve giebt, eine Hyperbel vor, wenn $b^2 - 4ac$ positiv,

eine Ellipse, wenn $b^2 - 4ac$ negativ,

dagegen eine Parabel, wenn $b^2 - 4ac = 0$ ist *).

*) Führt also irgend eine Untersuchung zu einer Kurve, die durch

IV. Wird die Gleichung

1) $y^2 = A \cdot x^2 + B \cdot x$ oder $y = \pm\sqrt{A \cdot x^2 + B \cdot x}$

auf die senkrechten Axen OX und OY bezogen, so halbirt die Axe OX jedesmal den Kegelschnitt, weil die zu jedem Werth von x gehörigen beiden Werthe von y, das (+ oder —) Zeichen abgerechnet, einander gleich sind. Diese Axe OX heißt daher der Haupt-Durchmesser der Kegelschnitte, und die Punkte, wo solcher der Kurve begegnet, heißen die Scheitel des Kegelschnittes.

Ist nun die Kurve keine Parabel, also A nicht Null, so kann man $O'$ (Figg. 14. 42.) durch den Abscissen-Werth (II. 4.), nämlich durch $p = -\frac{B}{2A}$ geben, und dann für denselben Kegelschnitt die Gleichung (II. 5.) bilden, nämlich

2) $y^2 = A \cdot x'^2 - \frac{B^2}{4A}$, oder $x'^2 = \frac{1}{A} \cdot y^2 + \frac{B^2}{4A^2}$.

Diese Gleichung liefert zu jedem Werth von $x'$ zwei, nur durch das (+ oder —) Zeichen verschiedene, übrigens gleiche Werthe von y, aber auch zu jedem Werthe von y (den man auf $O'Y'$ oder deren Verlängerung abtragen kann) zwei, nur dem (+ oder —) Zeichen nach verschiedene, übrigens gleiche Werthe von $x'$. Diese durch den Abscissen-Werth von $O'$, nämlich durch

$$p = -\frac{B}{2A}$$

bestimmte neue Axe $O'Y'$ halbirt also die Kurve, d. h. die Ellipse oder Hyperbel, ebenfalls; und diese Linie $O'Y'$ heißt daher der zugehörige Hauptdurchmesser. — Die Parabel hat sonach keinen solchen zugehörigen Hauptdurchmesser. — In der Ellipse oder Hyperbel (Figg. 14. 42.) liegt der Punkt $O'$ in der Mitte zwischen O und A, und in der Ellipse auch in der

---

eine Gleichung der zweiten Ordnung ausgesprochen ist, so weiß man: diese Kurve gehört zu denen, welche Kegelschnitte genannt werden. Bringt man nun die Gleichung auf Null, vergleicht man sie mit der obigen (2.), bestimmt man dadurch die Werthe von a, b, c in (2.), berechnet $b^2 - 4ac$, so sieht man sogleich, ob man eine Hyperbel, Ellipse oder Parabel hat.

Mitte zwischen B und D. Dieser Punkt O' heißt der Mittelpunkt der Ellipse oder Hyperbel. — Die Parabel hat sonach keinen solchen Mittelpunkt. — Die Ellipsen oder Hyperbeln werden also durch ihre beiden zusammengehörigen Hauptdurchmesser in 4 kongruente Viertel getheilt; und die vorstehende Gleichung (2.) heißt die Mittelpunkts-Gleichung der Ellipsen oder Hyperbeln.

V. Nimmt man in einem durch die Scheitel-Gleichung

1) $$y^2 = A \cdot x^2 + B \cdot x$$

gegebenen Kegelschnitt (Figg. 13. 14. und 42.) für einen beliebigen Punkt M desselben den Abscissen-Werth $= x$, den Ordinaten-Werth $= y = \sqrt{A \cdot x^2 + B \cdot x}$; nimmt man ferner in dem Haupt-Durchmesser OX einen Punkt F, gegeben durch seinen Abscissen-Werth d, so hängt die Länge der Linie FM von d und von x allein ab, und es ist

2) $$FM = \sqrt{(x-d)^2 + y^2} = \sqrt{(1+A) \cdot x^2 + (B-2d) \cdot x + d^2}.$$

Soll sich nun diese Wurzel ausziehen lassen, während x völlig unbestimmt bleibt, so daß das End-Resultat für jeden Punkt M des Kegelschnittes gilt, so muß der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen die Form $a^2x^2 + 2abx + b^2$ annehmen können; es muß also

$$\tfrac{1}{4}(B-2d)^2 = d^2 \cdot (1+A),$$

oder 3) $$A \cdot d^2 + B \cdot d - \tfrac{1}{4}B^2 = 0$$

seyn. — Findet man nun d aus dieser Gleichung, so ergiebt sich

4) $$d = -\frac{B}{2A} \cdot (1 \pm \sqrt{1+A}),$$

wenn A nicht 0 ist, d. h. wenn man eine Ellipse oder Hyperbel hat, dagegen

5) $$d = \tfrac{1}{4}B,$$

wenn $A = 0$ ist, d. h. wenn man eine Parabel hat.

Für diese Werthe von d, also für die dadurch hervorgehobenen Punkte F (in der Ellipse und Hyperbel haben sich zwei Werthe von d, also zwei solche Punkte F und F' ergeben, in der Parabel nur ein einziger) und nur für diese Punkte

allein *) läßt sich also jede nach einem beliebigen Punkt M des Kegelschnitts gezogene Gerade FM in x rational (d. h. ohne daß x unter dem Wurzelzeichen wäre) ausdrücken; es wird nämlich

$$6)\quad \left\{\begin{matrix} \mathrm{FM} \\ \text{oder } \mathrm{F'M} \end{matrix}\right\} = x\cdot\sqrt{1+A} + \frac{\frac{1}{2}B-d}{\sqrt{1+A}},$$

wo $\sqrt{1+A}$ positiv oder negativ zu nehmen ist, je nachdem x der einen oder der andern Hälfte des Kegelschnittes zukommt, während für d der Werth gesetzt wird, welcher dem einen dieser Punkte F oder dem andern F' zukommt.

Für die Parabel, wo $A = 0$ ist, findet sich namentlich

$$7)\quad \mathrm{FM} = x + \tfrac{1}{4}B,$$

so daß die Formel (6.) nur für die Ellipse oder Hyperbel allein beibehalten werden kann.

Diese durch eine analytische Eigenschaft sich auszeichnenden Punkte F und F' in der Ellipse und Hyperbel (Figg. 14. 42.), oder F allein in der Parabel (Fig. 13.), heißen die **Brennpunkte** der Kegelschnitte **).

VI. Ist wiederum irgend ein Kegelschnitt durch die Gleichung

---

*) Es könnte Punkte außerhalb der Axe OX geben, welche dieselbe Eigenschaft haben. Man müßte daher eine ganz analoge Untersuchung führen, aber etwas allgemeiner, um die Behauptungen des Textes alle erwiesen zu sehen.

**) Wäre A negativ, also in der Ellipse, und dabei größer als 1, so daß $1+A$ negativ würde, so würden diese Brennpunkte auf der Axe OX nicht existiren, weil d aus (4.) imaginäre Werthe erhielte. Vertauschte man aber dann die Haupt-Durchmesser mit einander, so würde man die beiden Brennpunkte auf dem andern Haupt-Durchmesser liegend finden, in so ferne man dann zu einer Gleichung derselben Ellipse geführt würde, von der Form

$$x^2 = \frac{1}{A}\cdot y^2 + \beta\cdot y;$$

so daß, wenn A negativ übrigens größer als 1, jetzt $\frac{1}{A}$ noch negativ, aber kleiner als 1 ist. — Diese letztere Betrachtung zeigt noch überdies, daß man alle Ellipsen durch die Gleichung $y^2 = A\cdot x^2 + B\cdot x$ ausgedrückt hat, auch wenn man A bloß kleiner als 1 nimmt.

1) $y^2 = A \cdot x^2 + B \cdot x$

vorgestellt, so giebt dieselbe, wenn man sie differenziirt

2) $y \cdot \partial y_x = A \cdot x + \frac{1}{2} B.$

Also ist für diesen Kegelschnitt, wenn man sich an irgend einen Punkt M desselben, dessen Koordinaten-Werthe x, y sind, eine Tangente MT (Figg. 13. 14. 42.), so wie auch die Normale MW gezogen denkt, nach (§. 7. II.)

$$\text{Subtang. } PT = \pm \frac{y}{\partial y_x} = \pm \frac{A \cdot x^2 + Bx}{A \cdot x + \frac{1}{2} B},$$

wo das (+) oder (—) Zeichen gilt, je nachdem T links oder rechts von P liegt;

und $\text{Subnormale } PW = \pm y \cdot \partial y_x = \pm (A \cdot x + \frac{1}{2} B)$,

wo das (+) Zeichen gilt, wenn W rechts, das (—) Zeichen dagegen, wenn W links von P liegt.

Da nun, dem Vorstehenden zu Folge, alle folgenden Linien, nämlich (Figg. 13. 14. 42.) OT, OW, FT, FM, MW, FW, MT, WT, u. dergl., ferner noch (Figg. 14. 42.) die Linien O′T, O′O, O′P, O′F, O′W, u. dergl. m. in x allein und in A und B (ohne y) ausgedrückt werden können, so kann man dieselben Ausdrücke auch mit einander vergleichen, und man erhält dadurch mehrere, theils interessante, theils für die Anwendungen wichtige Resultate, von denen wir jedoch die wichtigsten für die 3 Kegelschnitte in den Nummern (VIII. — X.) einzeln aufzählen wollen.

VII. Will man die Länge des Bogens ME = s und den Inhalt PCEM = f (Figg. 13. 14.) eines Kegelschnittes finden, welcher durch die Gleichung

$$y^2 = A \cdot x^2 + B \cdot x$$

gegeben ist, während die Abscissen-Werthe der Punkte E und M bezüglich $\alpha$ und x seyn mögen, so hat man zunächst, wenn man die Gleichung des Kegelschnitts nach allem x differenziirt:

$$2y \cdot \partial y_x = 2A \cdot x + B,$$

also

$$\partial y_x = \frac{A \cdot x + \frac{1}{2} B}{\sqrt{A \cdot x^2 + B \cdot x}},$$

folglich $1+\partial y_x^{\,2} = \frac{(A+A^2)\cdot x^2+(B+AB)\cdot x+\frac{1}{4}B^2}{A\cdot x^2+B\cdot x}$,

mithin nach (§. 6. I.)

$$s = \int_{x\div\infty} \sqrt{\frac{(1+A)(A\cdot x^2+B\cdot x)+\frac{1}{4}B^2}{A\cdot x^2+B\cdot x}}\cdot dx.$$

Iſt nun A nicht 0, d. h. iſt der Kegelſchnitt eine Ellipſe oder Hyperbel, ſo gehört dieſes Integral zu der Gattung derjenigen, welche man elliptiſche Tranſcendenten nennt (vgl. Analyſ. §. 32. III. D.). Iſt aber $A = 0$, d. h. iſt der Kegelſchnitt eine Parabel, ſo wird bloß

$$s = \int_{x\div\infty} \sqrt{\frac{x+\frac{1}{4}B}{x}}\cdot dx = \int_{x\div\infty} \frac{x+\frac{1}{4}B}{\sqrt{x}\cdot(x+\frac{1}{4}B)}\cdot dx.$$

Nun iſt aber nach (§. 32. III. A. Analyſ.)

$$\int \frac{x+\frac{1}{4}B}{\sqrt{x}\cdot(x+\frac{1}{4}B)}\cdot dx$$
$$= \sqrt{x\cdot(x+\tfrac{1}{4}B)} - \tfrac{1}{8}B\cdot log\left(\sqrt{x+\tfrac{1}{4}B}+\sqrt{x}\right).$$

Alſo iſt in der durch die Gleichung $y^2 = B\cdot x$ gegebenen Parabel der Bogen $ME = s$, deſſen Endpunkte E, M die Abſciſſen-Werthe $\alpha$ und x haben, gefunden; nämlich

$$s = \sqrt{x\cdot(x+\tfrac{1}{4}B)} - \sqrt{\alpha\cdot(\alpha+\tfrac{1}{4}B)} -$$
$$\tfrac{1}{4}B\cdot log\left(\frac{\sqrt{x+\frac{1}{4}B}-\sqrt{x}}{\sqrt{\alpha+\frac{1}{4}B}-\sqrt{\alpha}}\right).$$

Ferner iſt noch der Inhalt

$$f = \int_{x\div\infty} \sqrt{Ax^2+Bx}\cdot dx.$$

Nun iſt aber nach (§. 32. III. A. Analyſ.)

$$\int \sqrt{Ax^2+Bx}\cdot dx = \int \frac{Ax^2+Bx}{\sqrt{Ax^2+Bx}}\cdot dx$$
$$= \left(\tfrac{1}{2}x+\frac{\frac{1}{4}B}{A}\right)\cdot\sqrt{Ax^2+Bx} - \frac{\frac{1}{8}B^2}{A}\cdot\int \frac{1}{\sqrt{Ax^2+Bx}}\cdot dx;$$

und abermals

$$\int \frac{1}{\sqrt{A\cdot x^2+B\cdot x}}\cdot dx = \frac{1}{\sqrt{A}}\cdot log\frac{\sqrt{A\cdot x^2+B\cdot x}+x\sqrt{A}}{\sqrt{A\cdot x^2+B\cdot x}-x\sqrt{A}},$$

$$\text{auch} = \frac{2}{\sqrt{-A}}\cdot\frac{1}{tg}\frac{x\cdot\sqrt{-A}}{\sqrt{A\cdot x^2+B\cdot x}},$$

wo das erstere Resultat bequem ist, wenn A positiv, also im Falle der Kegelschnitt eine Hyperbel ist, das andere dagegen bequem erscheint, wenn A negativ, also im Falle der Kegelschnitt eine Ellipse ist. Sollte $A = 0$, d. h. sollte der Kegelschnitt eine Parabel seyn, so wäre keines dieser beiden Integrale bequem; man würde aber dann

$$y = \sqrt{Bx} = B^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{2}},$$

also $\int y\cdot dx = \int B^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{2}}\cdot dx = \frac{2}{3}B^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}x\cdot\sqrt{Bx} = \frac{2}{3}x\cdot y$ haben.

Im Falle der Parabel hat man also

$$f = \frac{2}{3}x\cdot\sqrt{Bx} - \frac{2}{3}\alpha\cdot\sqrt{B\alpha} = \frac{2}{3}xy - \frac{2}{3}\alpha\cdot y_\alpha.$$

Im Falle der Ellipse dagegen ist

$$f = \frac{1}{2}(x\cdot y - \alpha\cdot y_\alpha) + \frac{1}{4}\frac{B}{A}\cdot(y - y_\alpha) - \frac{B^2}{4A\cdot\sqrt{-A}}\cdot\left[\frac{1}{tg}\frac{x\cdot\sqrt{-A}}{y} - \frac{1}{tg}\frac{\alpha\cdot\sqrt{-A}}{y_\alpha}\right].$$

Endlich ist im Falle der Hyperbel

$$f = \frac{1}{2}(x\cdot y - \alpha\cdot y_\alpha) + \frac{1}{4}\frac{B}{A}\cdot(y - y_\alpha) - \frac{B^2}{8A\cdot\sqrt{A}}\cdot log\left[\frac{(y + x\cdot\sqrt{A})\cdot(y_\alpha - \alpha\cdot\sqrt{A})}{(y - x\cdot\sqrt{A})\cdot(y_\alpha + \alpha\cdot\sqrt{A})}\right].$$

Setzt man $\alpha = 0$, so ist auch $y_\alpha = 0$, und man erhält also den Inhalt OPM, und zwar

in der Parabel $= \frac{2}{3}x\cdot y$;

in der Ellipse $= \frac{1}{2}x\cdot y + \frac{1}{4}\frac{B}{A}\cdot y - \frac{B^2}{4A\cdot\sqrt{-A}}\cdot\frac{1}{tg}\left(\frac{x}{y}\sqrt{-A}\right)$;

in der Hyperbel $= \frac{1}{2}x \cdot y + \frac{1}{4}\frac{B}{A} \cdot y -$

$$\frac{B^2}{8A \cdot \sqrt{A}} \cdot log \frac{y + x \cdot \sqrt{A}}{y - x \cdot \sqrt{A}}.$$

VIII. Eigenschaften der Parabel. Für die Parabel (Fig. 13.), wo $A = 0$ ist, hat man bloß die einfache Gleichung

$$y^2 = B \cdot x,$$

wo B der Parameter heißt; der Punkt O, wo $x = 0$, $y = 0$ ist, heißt ihr Scheitel. Ihr Brennpunkt F liegt so, daß seine Abscisse $OF = \frac{1}{4}B$ (nach V. 5.), d. h. der vierte Theil des Parameters B ist; die Ordinate FG dazu, findet sich aus der Gleichung $y^2 = B \cdot x$ dem halben Parameter B gleich.

Für irgend einen durch den Abscissen-Werth x gegebenen Punkt M der Parabel findet sich nach (VI.)

$$\text{Subtang. } PT = 2x, \quad \text{Subnorm. } PW = \tfrac{1}{2}B;$$

also ist

$$FM = FT = FW = x + \tfrac{1}{2}B;$$

also ist auch

$$\text{W. } FTM = \text{W. } FMT \text{ und } \text{W. } FMW = \text{W. } FWM.$$

Zieht man daher durch M mit OX die Parallele MS, so ist auch

$$\text{W. } SMW = \text{W. } FMW \text{ *)}.$$

Sind $\alpha$ und $\beta$ die Koordinaten-Werthe eines beliebigen Punktes A der Parabel (Fig. 16.), so daß man außer

1) $\quad y^2 = B \cdot x$

noch 2) $\quad \beta^2 = B \cdot \alpha$

hat, und legt man durch A neue Axen $AX'$, $AY'$ parallel mit den alten OX und OY; sind dann für einen und denselben Punkt M der Parabel die alten Koordinaten-Werthe x und y, die neuen dagegen $x'$ und $y'$, so hat man

2) $\quad x = x' + \alpha, \quad y = y' + \beta;$

und diese Werthe in die Gleichung (1.) substituirt geben

*) Fällt daher ein Lichtstrahl in der Richtung SM auf die Parabel als Spiegel, so wird er von ihr jedesmal nach F hin zurückgeworfen, wo auch der Punkt M gedacht seyn mag. — Alle mit der Axe OX parallel einfallende Lichtstrahlen vereinigen sich daher in dem Punkte F.

3) $y'^2 + 2\beta \cdot y' = B \cdot x'$

für die Gleichung derselben Parabel, auf die neuen Axen bezogen.

Legt man nun noch durch A eine Linie AZ, welche mit AX' einen Winkel $\varphi$ bildet, und zieht man MQ mit AZ parallel; setzt man ferner

$$AQ = x'', \quad QM = z,$$

so hat man, weil $QP' = z \cdot \cos\varphi$, $P'M = z \cdot \sin\varphi$ ist,

4) $x' = x'' + z \cdot \cos\varphi$ und $y' = z \cdot \sin\varphi$.

Substituirt man diese Werthe in die Gleichung (3.), so erhält man die neue Gleichung

5) $z^2 \cdot \sin\varphi^2 + (2\beta \cdot \sin\varphi - B \cdot \cos\varphi) \cdot z = B \cdot x''$;

und diese Gleichung kann wieder als die Gleichung der Parabel angesehen werden, zwischen den Koordinaten $AQ = x''$ und $QM = z$, deren zugehörige Axen AX' und AZ unter sich den Winkel $\varphi$ bilden.

Denkt man sich nun den Winkel $\varphi$ so genommen, daß in (5.) der Koeffizient von z, Null wird, also daß

6) $\operatorname{tg}\varphi = \frac{B}{2\beta}$, also $\sin\varphi = \frac{B}{\sqrt{B^2 + 4\beta^2}}$

wird, so geht die Gleichung (5.) über in

7) $z^2 = \frac{B^2 + 4\beta^2}{B} \cdot x''$,

welche Gleichung wieder eben so einfach ist, als die (1.), aber auf die schiefen Axen AX' und AZ sich bezieht, die unter sich gerade den durch die Gleichung (6.) bestimmten Winkel bilden.

Und weil die Gleichung (7.) zu jedem Werth von $x''$ zwei gleiche Werthe von z liefert, so halbirt die Linie AX' alle mit AZ parallele Sehnen der Parabel. Deshalb nennt man AX' den zu diesen Sehnen gehörigen Durchmesser, und der Punkt A heißt sein Scheitel. Und die aus der Gleichung (6.) bestimmte Lage der schiefen Axe AZ fällt mit der Tangente, in A an die Parabel gezogen, zusammen.

Es hat also die Parabel unendlich viele Durchmesser, die alle mit einander und mit dem Haupt-Durchmesser OX paral-

lel laufen, und von denen jeder alle Sehnen halbirt, welche mit der Tangente der Parabel am Scheitel A dieses Durchmessers parallel laufen.

Bezeichnet man den Winkel MFX (Fig. 13.) durch $\psi$, so wie die Linie FM durch r, so hat man, weil $FM = x + \frac{1}{4}B$ und $x = OF + FP = \frac{1}{4}B + r \cdot cos\psi$ ist, sogleich

$$r = \tfrac{1}{4}B + r \cdot cos\psi,$$

oder 8) $$r = \frac{\frac{1}{2}B}{1 - cos\psi};$$

und dies ist also die Polar-Gleichung der Parabel, zwischen den Polar-Koordinaten $MFX = \psi$ und $FM = r$, wo F der Brennpunkt ist.

Endlich ist der Inhalt des Stücks OPM der Parabel, $\frac{2}{3}$ des Rechtecks OPMH, also der Inhalt $OHM = \frac{1}{3}$ desselben Rechtecks gefunden worden (vgl. VII.).

IX. Eigenschaften der Ellipse. Denkt man sich in der Gleichung der Kegelschnitte

1) $$y^2 = A \cdot x^2 + B \cdot x$$

A negativ, so hat man eine Ellipse, welche immer dieselbe bleibt, man mag B positiv oder negativ sich denken, in so ferne dadurch nur die Lage der Ordinaten-Axe (gegen die Ellipse) sich ändert. — Denken wir uns B positiv. — Sucht man die Punkte O und A (Fig. 14.), welche OX mit der Ellipse gemein hat, so sind für diese Punkte die Werthe von y gegeben und $= 0$, und die Abscissen-Werthe x dazu aus der Gleichung (1.) zu finden. Man erhält für $y = 0$

$$x = 0 \quad \text{und} \quad x = \frac{B}{-A},$$

also 2) $$OA = \frac{B}{-A}, \quad OO' = O'A = \frac{\frac{1}{2}B}{-A}.$$

Setzt man $x = OO' = \frac{\frac{1}{2}B}{-A}$, so findet man aus (1.) dazu

3) $$O'B = O'D = \frac{\frac{1}{2}B}{+\sqrt{-A}}.$$

Setzt man $OO' = O'A = a$, und $O'B = O'D = b$, so hat man die beiden Gleichungen (2. u. 3.), nämlich

4) $$\frac{\frac{1}{2}B}{-A} = a \quad \text{und} \quad \frac{\frac{1}{2}B}{\sqrt{-A}} = b.$$

Löst man diese Gleichungen nach A und B auf, so findet man

5) $$A = -\frac{b^2}{a^2} \quad \text{und} \quad B = \frac{2b^2}{a}.$$

Die (Scheitel-) Gleichung (1.) der Ellipse nimmt dadurch diese Form an:

6) $$y^2 = \frac{b^2}{a^2} \cdot (2ax - x^2),$$

wo a und b die beiden halben Axen der Ellipse heißen.

Die Mittelpunkts-Gleichung (auf die Axen O'X und O'Y' bezogen) zwischen $O'P = x'$ und $PM = y$, ist dagegen jetzt von der Form

7) $$y^2 = \frac{b^2}{a^2} \cdot (a^2 - x'^2).$$

Die früher in (V. u. VI.) gefundenen Bestimmungen über die Lage der Brennpunkte F und F', der Tangente MT und der Normale MW, geben, sobald man für A und B die jetzigen Werthe aus (5.) substituirt, sogleich, wenn $OP = x$, $O'P = x'$, also $x = a + x'$ und $x' = x - a$ ist,

$$OF = a - \sqrt{a^2 - b^2}; \qquad O'F = \sqrt{a^2 - b^2};$$
$$OF' = a + \sqrt{a^2 - b^2}; \qquad O'F' = \sqrt{a^2 - b^2};$$

Subtang. $$PT = \pm\frac{x(2a - x)}{a - x} = \mp\frac{a^2 - x'^2}{x'};$$

Subnorm. $$PW = \pm\frac{b^2}{a^2}(a - x) = \mp\frac{b^2}{a^2} \cdot x',$$

wo, weil keine Entfernung negativ werden kann, die oberen (±) Zeichen gelten, wenn $x < a$, also $x'$ negativ ist, wo aber die untern gelten, wenn $x > a$, also $x'$ positiv ist. Drückt man alle zwischen je zweien der Punkte T, A, O, O', F, F', W, M liegenden Entfernungen in x, a, b aus, so erhält man noch durch Vergleichung dieser Resultate

8) $OP : O'A = O'A : O'T$

9) $FT : F'T = FW : F'W = FM : F'M.$

Aus dieser Proportion folgt aber wieder, daß

10) $\text{W. } FMW = \text{W. } F'MW$

ist *).

Und weil sich findet nach (V.)

11) $FM = a + \frac{x-a}{a} \cdot \sqrt{a^2-b^2} = a + \frac{x'}{a} \cdot \sqrt{a^2-b^2},$

12) $F'M = a - \frac{x-a}{a} \cdot \sqrt{a^2-b^2} = a - \frac{x'}{a} \cdot \sqrt{a^2-b^2},$

so folgt noch durch Addition

13) $FM + F'M = 2a,$

wie auch der Punkt M in der Ellipse liegen mag, wenn nur F und F′ die beiden Brennpunkte sind.

Setzt man

14) $MFX = \psi, \quad FM = r, \quad \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} = e,$

wo dann e die Excentricität der Ellipse heißt, so geht die Gleichung (11.), weil $x = r \cdot \cos\psi + a - ae$ ist, in

$$r = a + e \cdot (r \cdot \cos\psi - ae)$$

über und giebt, nach r aufgelöst,

15) $r = \frac{a(1-e^2)}{1-e \cdot \cos\psi};$

und diese Gleichung (15.) ist die Polar-Gleichung der Ellipse, zwischen den Polar-Koordinaten $\psi$ und r, die aus einem der Brennpunkte F genommen ist. Dieselbe würde in

16) $r = \frac{a \cdot (1-e^2)}{1+e \cdot \cos\varphi}$

übergehen, wenn man statt des Winkels $MFX = \psi$ lieber den Nebenwinkel $MFO = \varphi$ in Rechnung bringen wollte.

Führt man neue senkrechte Axen (Fig. 22.) O′X′ und O′Y′ ein, so daß O′X′ mit O′X und O′Y die Winkel $\alpha$ und $90° + \alpha$,

*) Alle aus F kommenden Strahlen werden daher von der Ellipse als Spiegel, nach F′ zurückgeworfen; und umgekehrt.

und $O'Y'$ mit $O'X$ und $O'Y$ die Winkel $90-\alpha$ und $\alpha$ macht, so hat man, wenn $x' = O'P$ und $y = PM$ die alten, dagegen $x'' = O'Q$ und $y'' = QM$ die neuen Koordinaten-Werthe eines und desselben Punktes M sind, nach (§. 3. III.)

$$17) \quad \begin{cases} x' = x'' \cdot \cos\alpha + y'' \cdot \sin\alpha \\ y = -x'' \cdot \sin\alpha + y'' \cdot \cos\alpha. \end{cases}$$

Substituirt man diese Werthe in die Mittelpunkts-Gleichung (7.) (zwischen $x'$ und $y$), nämlich in

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} \cdot (a^2 - x'^2), \quad \text{oder} \quad a^2 \cdot y^2 + b^2 \cdot x'^2 = a^2 \cdot b^2,$$

so erhält man die neue Gleichung der Ellipse

$$18) \quad (a^2 \cdot \cos\alpha^2 + b^2 \cdot \sin\alpha^2) \cdot y''^2 + (a^2 \cdot \sin\alpha^2 + b^2 \cdot \cos\alpha^2) \cdot x''^2 - 2(a^2 - b^2) \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot x'' \cdot y'' = a^2 \cdot b^2.$$

Führt man aber jetzt noch eine neue Ordinaten-Axe $O'Z$ statt der $O'Y'$ ein, so daß, wenn MR mit $O'Z$ parallel gedacht wird,

$$\text{W. } Y'O'Z = \text{W. } RMQ = \varphi$$

ist, und setzt man $O'R = u$, $RM = v$, so hat man

$$19) \quad \begin{cases} x'' = u + v \cdot \sin\varphi \\ y'' = v \cdot \cos\varphi. \end{cases}$$

Werden nun diese Werthe statt $x''$, $y''$ in die (18.) substituirt, so erhält man

$$20) \quad A^2 \cdot v^2 + B \cdot vu + C^2 \cdot u^2 = a^2 \cdot b^2,$$

wo

$$21) \quad \begin{cases} A^2 = a^2 \cdot \cos(\alpha + \varphi)^2 + b^2 \cdot \sin(\alpha + \varphi)^2, \\ C^2 = a^2 \cdot \sin\alpha^2 + b^2 \cdot \cos\alpha^2, \\ B = -2a^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos(\alpha + \varphi) + 2b^2 \cdot \cos\alpha \cdot \sin(\alpha + \varphi) \end{cases}$$

ist.

Nimmt man nun den Winkel $\varphi$ so, daß $B = 0$ wird, nimmt man also $\varphi$ so, daß

$$22) \quad tg(\alpha + \varphi) = \frac{a^2}{b^2} \cdot tg\,\alpha$$

wird, so nimmt die Gleichung der Ellipse auf diese schiefen Axen

$O'X'$

$O'X'$ und $O'Z$ bezogen, nämlich die Gleichung (20.), dieſe einfachere Form

23) $\quad A^2 \cdot v^2 + C^2 \cdot u^2 = a^2 \cdot b^2$

wieder an, und giebt jetzt zu jedem Werth von u zwei an ſich gleiche nur durch das (±) Zeichen verſchiedene Werthe von v, aber auch zu jedem Werthe von v zwei gleiche und nur durch das (±) Zeichen verſchiedene Werthe von u.

Die jetzigen Axen $O'X'$ und $O'Z$, welche unter ſich den Winkel $90° - (\alpha + \varphi)$ bilden, (deſſen Kotangente gegeben und $= \frac{a^2}{b^2} \cdot tg\,\alpha$ iſt) liegen alſo ſo, daß jede derſelben alle diejenigen Sehnen der Ellipſe halbirt, welche mit der andern parallel laufen. — Sie heißen daher zuſammengehörige (conjungirte) Durchmeſſer. — Und da $\alpha$ beliebig iſt, und $\varphi$ mittelſt der Gleichung (22.) ſich immer dazu findet, ſo hat die Ellipſe unendlich viele Paare zuſammengehöriger Durchmeſſer, die ſich alle in dem Mittel-Punkte $O'$ der Ellipſe ſchneiden.

Findet man die Längen der Halbmeſſer $O'G = f$ und $O'H = g$, ſo ergiebt ſich noch, aus der Vergleichung dieſer Reſultate, für jedes $\alpha$

24) $$\begin{cases} f^2 + g^2 = a^2 + b^2 \\ f \cdot g \cdot \sin(f,g) = a \cdot b \text{ *)}, \end{cases}$$

welche Gleichungen man auch leicht im geometriſchen Kleide darſtellen kann. Sind $f'$, $g'$ die Längen eines anderen Paares zuſammengehöriger Halbmeſſer, welche einem andern Winkel $\alpha'$ zukommen, ſo findet man noch durch Vergleichung

25) $$\begin{cases} f'^2 + g'^2 = f^2 + g^2 \\ f' \cdot g' \cdot \sin(f',g') = f \cdot g \cdot \sin(f,g) \\ f' \cdot f \cdot \sin(f',f) = g' \cdot g \cdot \sin(g',g) \\ f' \cdot g \cdot \sin(f',g) = g' \cdot f \cdot \sin(g',f). \end{cases}$$

Endlich fügen wir noch folgende Betrachtungen hinzu:

A. Iſt in der durch die Gleichung

*) Wo wir unter (f, g) den Winkel verſtehen, welchen die Längen f und g mit einander machen.

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} \cdot (2ax - x^2), \quad \text{oder} \quad y^2 = \frac{b^2}{a^2} \cdot (a^2 - x'^2)$$

gegebenen Ellipse, $b = a$, so geht die Ellipse in diejenige über, welche **Kreislinie** heißt. Es ist dann $e = 0$ und die beiden Brennpunkte fallen mit dem Mittelpunkte zusammen. — Die Gleichung wird dann $y^2 = 2ax - x^2 = x \cdot (2a - x)$ oder

$$y^2 = a^2 - x'^2 = (a - x')(a + x'),$$

welche man auch aus einem bekannten Satz der Euklid'schen Geometrie erhält.

B. Da jede Ordinate y der Ellipse, das $\frac{b}{a}$fache ist der Ordinate des durch die Gleichung

$$y'^2 = 2ax - x^2$$

gegebenen Kreises (dessen Radius a), so ist auch der Inhalt OPM der Ellipse das $\frac{b}{a}$fache des zu $OP = x$ gehörigen Kreisflächen-Stücks; also ist auch der vierte Theil der Ellipse das $\frac{b}{a}$fache des vierten Theils dieses Kreises. Letzterer ist aber nach Euklid $\frac{1}{4}a^2 \cdot \pi$, also ist ersterer

$$= \tfrac{1}{4}ab \cdot \pi;$$

der Inhalt der ganzen Ellipse ist daher $= ab \cdot \pi$. Dasselbe folgt auch aus (VII.), wenn man daselbst $-\frac{b^2}{a^2}$ statt A, und $\frac{2b^2}{a}$ statt B setzt.

C. Wird a gegen b sehr groß, also $\frac{b^2}{a^2}$ sehr klein und viel kleiner als $\frac{2b^2}{a}$, so wird das y aus der Scheitel-Gleichung der Ellipse, nämlich aus der Gleichung

$$y^2 = \frac{2b^2}{a}x - \frac{b^2}{a^2}x^2$$

desto näher mit dem y aus der Gleichung der Parabel

$$y^2 = \frac{2b^2}{a}x$$

zusammenfallen, je kleiner x ist. — Also fällt eine Ellipse, deren Excentricität $e = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ sehr groß und sehr nahe 1 ist, mit einer durch die Gleichung

$$y^2 = \frac{2b^2}{a}x$$

gegebenen Parabel, an ihrem Scheitel (wo x klein ist) sehr nahe zusammen.

X. Eigenschaften der Hyperbel. Setzt man in den Gleichungen der Ellipse

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}\cdot(2ax - x^2), \text{ oder } y^2 = \frac{b^2}{a^2}\cdot(a^2 - x'^2)$$

$b\cdot\sqrt{-1}$ statt b, also $-b^2$ statt $b^2$, so erhält man Gleichungen, in denen der Koeffizient von $x^2$ positiv wird, die also einer Hyperbel angehören, nämlich die Gleichungen

1) $$y^2 = \frac{b^2}{a^2}\cdot(x^2 - 2ax)$$

und 2) $$y^2 = \frac{b^2}{a^2}\cdot(x'^2 - a^2),$$

wo (Fig. 42.) $OP = x$, $PM = y$ und $O'P = x'$ ist. Und weil hier b und a beide noch willkührlich sind, so ist die Hyperbel noch jede beliebige. Weil aber aus (2.) für $y = 0$, $x' = \pm a$ hervorgeht, so folgt, daß $O'O = O'A = a$ ist, wenn O und A die Punkte der Hyperbel bedeuten, welche sie mit der Axe OX gemein hat.

Sind F und F' die Brennpunkte der Hyperbel, so findet sich

3) $$O'F = O'F' = \sqrt{a^2+b^2} = ae,$$

wenn man dasmal $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} = e$ setzt, während dann e wiederum die Excentrizität heißt. Ferner findet sich hier

$$4)\quad \begin{cases} F'M = \pm(+a+\frac{x-a}{a}\cdot\sqrt{a^2+b^2}) = \pm(a+e\cdot x') \\ FM = \pm(-a+\frac{x-a}{a}\cdot\sqrt{a^2+b^2}) = \pm(-a+e\cdot x'), \end{cases}$$

wo die (+) Zeichen gelten, wenn $x'$ positiv, die (—) Zeichen dagegen, wenn $x'$ negativ seyn sollte.

Es ist daher

$$5)\quad \begin{cases} F'M - FM = 2a, \text{ wenn } x' \text{ positiv,} \\ \text{oder} \\ FM - F'M = 2a, \text{ wenn } x' \text{ negativ ist.} \end{cases}$$

Zieht man ferner an den Punkt M eine Tangente MT, und die Normale MW, so findet sich nach (VI.)

$$\text{Subtang. } PT = \pm\frac{x'^2-a^2}{x'} = \pm\frac{x\cdot(x-2a)}{x-a};$$

$$\text{Subnorm. } PW = \pm\frac{b^2}{a^2}\cdot x' = \pm\frac{b^2}{a^2}\cdot(x-a);$$

wo die (+) Zeichen gelten, wenn $x'$ positiv, wo aber das (—) Zeichen genommen werden muß, wenn $x'$ negativ seyn sollte, weil die Linien PT und PW doch immer durch absolute (nicht negative) Zahlen ausgedrückt seyn müssen.

Drückt man alle von M abhängigen Linien in x oder $x'$ aus, ohne y stehen zu lassen, so ist eine Vergleichung derselben etwas sehr leichtes; und man findet, daß dieselben Proportionen für die Hyperbel statt finden, die wir für die Ellipse hingestellt haben, nämlich

$$O'P : O'A = O'A : O'T,$$

$$FM : F'M = FT : F'T = FW : F'W.$$

Daraus folgt wieder, daß die Tangente MT den Winkel FMF' halbirt, daß also Strahlen, welche aus dem Brennpunkt F kommen, in jedem Punkte M von der als Spiegel gedachten Hyperbel so zurückgeworfen werden, wie wenn sie alle direkt aus dem andern Brennpunkte F' kämen.

Eben so leicht kann man nachweisen, daß die Hyperbel, wie die Ellipse, unendlich viele Paare zusammengehöriger Durchmesser hat, von denen jeder alle Sehnen halbirt, die mit dem an-

dern parallel laufen, wovon jedoch immer nur einer von beiden die Hyperbel wirklich schneidet, der andere nicht, so daß für die Hyperbel alle diejenigen Sätze ausfallen, welche wir für die Ellipse in Bezug auf die Längen der zusammengehörigen Halbmesser festgestellt haben.

Die Polar-Gleichung der Hyperbel zwischen den Polar-Koordinaten $MFX = \psi$ und $FM = r$ wird aus (4.), wenn man bedenkt, daß

$$x' = ae + r \cdot \cos\psi$$

ist, diese:

$$r = -a + ae^2 + er \cdot \cos\psi,$$

oder

$$r = \frac{a(e^2-1)}{1-e\cdot\cos\psi},$$

oder

$$r = \frac{a(e^2-1)}{1+e\cdot\cos\varphi},$$

wenn man statt $MFX = \psi$ lieber $MFA = \varphi$ in Rechnung bringen will. Diese Gleichung erstreckt sich aber nur über die eine Hälfte der Hyperbel, wo $x'$ positiv ist. Für die andere Hälfte, wo $x'$ negativ, würde man dagegen finden:

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cdot\cos\psi} = \frac{a(1-e^2)}{1-e\cdot\cos\varphi}.$$

An der Hyperbel sind noch zu beachten die Asymptoten der Hyperbel, d. h. diejenigen geraden Linien $O'S$ und $O'S'$, welche, auf beiden Seiten verlängert, im Unendlichen unendlich wenig von den Schenkeln der Hyperbel abweichen. Man findet nämlich für die Hyperbel aus $y^2 = \frac{b^2}{a^2}\cdot(x'^2-a^2)$

$$y = \frac{b}{a}(x'^2-a^2)^{\frac{1}{2}} = \pm\left(\frac{b}{a}x' - \tfrac{1}{2}\frac{b}{a}\cdot\frac{a^2}{x'} - \tfrac{1}{6}\frac{b}{a}\cdot\frac{a^4}{x'^3} - \cdots\right),$$

indem man den binomischen Lehrsatz anwendet. Nimmt man nun die Gleichung der geraden Linien

$$y_1 = \pm\frac{b}{a}x',$$

so ist die Differenz $y_1 - y$ zwischen den Ordinaten der geraden Linie und der Hyperbel unendlich klein, wenn $x$ unendlich groß.

Die durch die letztere Gleichung gegebenen geraden Linien O′S und O′S′ (je nachdem das (+) oder das (−) Zeichen genommen wird) sind also die fraglichen Asymptoten.

Da AD der Werth von $y_1$ ist, für $x' = a$, so erhält man aus der Gleichung der Asymptoten

$$AD = b, \text{ also } O'D = \sqrt{a^2+b^2},$$

d. h. $O'D = O'F = ae.$

Nimmt man diese Asymptoten O′S und O′S′ zu (schiefen) Axen, und bezeichnet man für irgend einen Punkt M der Hyperbel, indem man MH parallel mit O′S′ zieht,

O′H durch t, so wie HM durch u,

so hat man

$$t \cdot u = \tfrac{1}{4}(a^2+b^2).$$

Dies ist also die auf die Asymptoten als Koordinaten-Axen bezogene Gleichung der Hyperbel. — Der Ausdruck $\frac{1}{4}(a^2+b^2)$ heißt die Potenz der Hyperbel.

Zieht man eine beliebige Gerade (indem man für sie die beliebige Gleichung $y_2 = p \cdot x_2 + q$ nimmt), findet man die Koordinaten-Werthe der 4 Durchschnitts-Punkte E, B, G, K dieser Geraden mit der Hyperbel und mit ihren beiden Asymptoten, findet man daraus die Abstände EB und GK, so finden sich solche einander gleich; d. h. es findet sich

$$EB = GK, \text{ also auch } EG = BK.$$

Anmerk. Legt man durch einen Kegel irgend eine Ebene und sucht man die Gleichung der krummen Linie, welche sich als Durchschnitts-Figur ergiebt, so erhält man allemal eine Gleichung der zweiten Ordnung. Umgekehrt läßt sich zeigen, daß wenn eine Gleichung der zweiten Ordnung $y^2 = A \cdot x^2 + B \cdot x$ eine Kurve giebt, diese Kurve allemal eine der Durchschnitts-Figuren einer beliebigen Ebene mit einem beliebigen Kegel seyn müsse. —

Deshalb haben wir die Linien der zweiten Ordnung bisher immer kurzweg Kegelschnitte genannt.

## §. 9.

### Von den Cycloiden.

Denkt man sich auf einer unbegrenzten Geraden AX (Fig. 17.) eine Kreislinie vom Halbmesser r, herum gerollt (wie ein Wagenrad auf ebenem Boden rollt), so beschreibt der Punkt M in der Peripherie des Kreises eine krumme Linie AMSB, die sich bei fernerem Umrollen des Kreises immer erneuert, und die man **Cycloide** nennt. Nimmt man statt M lieber die mit dem Kreise festen Punkte G oder L, so beschreiben sie **verlängerte oder verkürzte Cycloiden.**

Sind in der gemeinen Cycloide, wo M der beschreibende Punkt ist, CR und MP senkrecht auf AX, und setzt man den Bogen $MR = AR = t$, so bedeutet $\frac{t}{r}$ den Bogen für den Radius 1 *). Zieht man nun MQ parallel mit AX, so hat man $CQ = r \cdot cos\frac{t}{r}$, $MQ = r \cdot sin\frac{t}{r}$. — Ist ferner AY senkrecht auf AX gedacht, nimmt man diese Linien AX und AY zu Koordinaten-Axen, so wie $AP = x$, $PM = y$, so findet sich sogleich aus der Betrachtung der Figur

1) $$x = t - r \cdot sin\frac{t}{r};$$

2) $$y = r - r \cdot cos\frac{t}{r} = 2r \cdot \left(sin\frac{t}{2r}\right)^2,$$

welche beide Gleichungen offenbar gelten für jedes t. Eliminirt man nun aus diesen beiden Gleichungen den Veränderlichen t, so erhält man

$$\frac{r-y}{r} = cos\frac{x + \sqrt{2ry - y^2}}{r},$$

*) Dieser Winkel $MCR = \frac{t}{r}$ (im Bogen für den Radius 1 ausgedrückt) heißt der **Wälzungs-Winkel**. Zuweilen versteht man aber unter Wälzungs-Winkel auch den Neben-Winkel $MCH = \pi - \frac{t}{r}$.

Die durch die letztere Gleichung gegebenen geraden Linien O′S und O′S′ (je nachdem das (+) oder das (−) Zeichen genommen wird) sind also die fraglichen Asymptoten.

Da AD der Werth von $y_1$ ist, für $x' = a$, so erhält man aus der Gleichung der Asymptoten

$$AD = b, \text{ also } O'D = \sqrt{a^2 + b^2},$$

d. h. $O'D = O'F = ae.$

Nimmt man diese Asymptoten O′S und O′S′ zu (schiefen) Axen, und bezeichnet man für irgend einen Punkt M der Hyperbel, indem man MH parallel mit O′S′ zieht,

O′H durch t, so wie HM durch u,

so hat man

$$t \cdot u = \tfrac{1}{4}(a^2 + b^2).$$

Dies ist also die auf die Asymptoten als Koordinaten-Axen bezogene Gleichung der Hyperbel. — Der Ausdruck $\frac{1}{4}(a^2 + b^2)$ heißt die Potenz der Hyperbel.

Zieht man eine beliebige Gerade (indem man für sie die beliebige Gleichung $y_2 = p \cdot x_2 + q$ nimmt), findet man die Koordinaten-Werthe der 4 Durchschnitts-Punkte E, B, G, K dieser Geraden mit der Hyperbel und mit ihren beiden Asymptoten, findet man daraus die Abstände EB und GK, so finden sich solche einander gleich; d. h. es findet sich

$$EB = GK, \text{ also auch } EG = BK.$$

Anmerk. Legt man durch einen Kegel irgend eine Ebene und sucht man die Gleichung der krummen Linie, welche sich als Durchschnitts-Figur ergiebt, so erhält man allemal eine Gleichung der zweiten Ordnung. Umgekehrt läßt sich zeigen, daß wenn eine Gleichung der zweiten Ordnung $y^2 = A \cdot x^2 + B \cdot x$ eine Kurve giebt, diese Kurve allemal eine der Durchschnitts-Figuren einer beliebigen Ebene mit einem beliebigen Kegel seyn müsse. —

Deshalb haben wir die Linien der zweiten Ordnung bisher immer kurzweg Kegelschnitte genannt.

## §. 9.

### Von den Cycloiden.

Denkt man sich auf einer unbegrenzten Geraden AX (Fig. 17.) eine Kreislinie vom Halbmesser r, herum gerollt (wie ein Wagenrad auf ebenem Boden rollt), so beschreibt der Punkt M in der Peripherie des Kreises eine krumme Linie AMSB, die sich bei fernerem Umrollen des Kreises immer erneuert, und die man Cycloide nennt. Nimmt man statt M lieber die mit dem Kreise festen Punkte G oder L, so beschreiben sie verlängerte oder verkürzte Cycloiden.

Sind in der gemeinen Cycloide, wo M der beschreibende Punkt ist, CR und MP senkrecht auf AX, und setzt man den Bogen $MR = AR = t$, so bedeutet $\frac{t}{r}$ den Bogen für den Radius 1 *). Zieht man nun MQ parallel mit AX, so hat man $CQ = r \cdot cos\frac{t}{r}$, $MQ = r \cdot sin\frac{t}{r}$. — Ist ferner AY senkrecht auf AX gedacht, nimmt man diese Linien AX und AY zu Koordinaten-Axen, so wie $AP = x$, $PM = y$, so findet sich sogleich aus der Betrachtung der Figur

1) $$x = t - r \cdot sin\frac{t}{r};$$

2) $$y = r - r \cdot cos\frac{t}{r} = 2r \cdot \left(sin\frac{t}{2r}\right)^2,$$

welche beide Gleichungen offenbar gelten für jedes t. Eliminirt man nun aus diesen beiden Gleichungen den Veränderlichen t, so erhält man

$$\frac{r-y}{r} = cos\frac{x + \sqrt{2ry - y^2}}{r},$$

*) Dieser Winkel $MCR = \frac{t}{r}$ (im Bogen für den Radius 1 ausgedrückt) heißt der Wälzungs-Winkel. Zuweilen versteht man aber unter Wälzungs-Winkel auch den Neben-Winkel $MCH = \pi - \frac{t}{r}$.

oder 3) $x = -\sqrt{2ry - y^2} + r \cdot \frac{1}{cos} \frac{r-y}{r}$.

Dieſes iſt alſo die Gleichung der Cycloide zwiſchen den rechtwinklichen Koordinaten-Werthen x und y *). — Es iſt aber häufig bequemer, ſtatt dieſer Gleichung (3.), das Syſtem der beiden Gleichungen (1. und 2.) beizubehalten. Selbſt um einzelne Punkte zu konſtruiren, kann man beliebige Werthe von t nehmen, dazu aus (1. u. 2.) die zugehörigen Werthe von x und y finden, und dieſe als zuſammengehörige Koordinaten-Werthe auftragen.

Differenziirt man die Gleichungen (1. und 2.) nach allem t, ſo erhält man

4) $\partial x_t = 1 - cos\frac{t}{r} = 2 \cdot \left(sin\frac{t}{2r}\right)^2$.

5) $\partial y_t = sin\frac{t}{r} = 2 \cdot sin\frac{t}{2r} \cdot cos\frac{t}{2r}$.

Daraus findet ſich aber

6) $\partial y_x = \frac{\partial y_t}{\partial x_t} = \frac{sin\frac{t}{r}}{1 - cos\frac{t}{r}} = cotg\frac{t}{2r}$,

folglich iſt, wenn man an M eine Tangente MT und Normale MW zieht, nach (§. 7. II.)

$$\text{Subtang. } PT = \frac{y}{\partial y_x} = r \cdot \frac{\left(1 - cos\frac{t}{r}\right)^2}{sin\frac{t}{r}}$$

$$= 2r \cdot \left(sin\frac{t}{2r}\right)^2 \cdot tg\frac{t}{2r}.$$

*) Dieſe Gleichung konnte man auch unmittelbar erhalten. Es iſt nämlich PR oder MQ die mittlere Proportionale zwiſchen RQ oder y, und QH oder $2r - y$, alſo iſt $PR = \sqrt{2ry - y^2}$. Zu gleicher Zeit iſt $\frac{t}{r}$ der Bogen, deſſen Koſinus $\frac{CQ}{CM}$ oder $\frac{r-y}{r}$ iſt. Alſo iſt

$$t = AR = r \cdot \frac{1}{cos} \frac{r-y}{r}.$$

Und da $x = AP = AR - PR$ iſt, ſo hat man die Gleichung (3.).

Subnorm. $PW = y \cdot \delta y_x = r \cdot \sin\frac{t}{r} = PR$

$= \sqrt{2ry - y^2}$,

so daß W genau mit R zusammenfällt. Die Tangente MT verlängert geht also allemal durch den Punkt H.

Die Tangenten an A, wo $x = y = 0$, und an B, wo $x = 2r\pi$, $y = 0$ ist, stehen daher senkrecht auf der Geraden AX; die Tangente an S, wo $AK = x = r\pi$ und $SK = y = 2r$ wird, läuft dagegen mit der AX parallel.

Differenziirt man die Gleichungen (4.) und (5.) noch einmal nach allem t, so erhält man

7) $\delta^2 x_t = \frac{1}{r} \cdot \sin\frac{t}{r}$; 8) $\delta^2 y_t = \frac{1}{r} \cdot \cos\frac{t}{r}$;

also noch nach (§. 16. Analys.)

9) $\delta^2 y_x = \frac{\delta x_t \cdot \delta^2 y_t - \delta y_t \cdot \delta^2 x_t}{\delta x_t^3}$

$= \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{\left(1 - \cos\frac{t}{r}\right)^2} = \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{4\left(\sin\frac{t}{2r}\right)^4}$

Nennt man $\gamma$ den Krümmungs-Halbmesser an der Stelle M für die Cycloide, so findet sich nun

10) $\gamma = \pm \frac{(1 + \delta y_x^2)^{\frac{3}{2}}}{\delta^2 y_x} = 4r \cdot \sin\frac{t}{2r}$

$= 2MR = 2MW$ *).

Der Krümmungs-Halbmesser der Cycloide an jeder Stelle ist

*) Wir bemerken noch, daß man sogleich die andere Form des Krümmungs-Halbmessers (§. 7. III. D.), nämlich

$$\gamma = \frac{(\delta x_t^2 + \delta y_t^2)^{\frac{3}{2}}}{\delta x_t \cdot \delta^2 y_t - \delta y_t \cdot \delta^2 x_t}$$

nehmen, und hier herein die Werthe der $\delta x_t$, $\delta y_t$, $\delta^2 x_t$ und $\delta^2 y_t$ substituiren kann. Dann ist es nicht nöthig vorher $\delta^2 y_x$ auszuwerthen; und die obige Auswerthung in (9.) ist also dann überflüssig.

oder 3) $x = -\sqrt{2ry - y^2} + r \cdot \frac{1}{cos} \frac{r-y}{r}$.

Dieses ist also die Gleichung der Cycloide zwischen den rechtwinklichen Koordinaten-Werthen x und y *). — Es ist aber häufig bequemer, statt dieser Gleichung (3.), das System der beiden Gleichungen (1. und 2.) beizubehalten. Selbst um einzelne Punkte zu konstruiren, kann man beliebige Werthe von t nehmen, dazu aus (1. u. 2.) die zugehörigen Werthe von x und y finden, und diese als zusammengehörige Koordinaten-Werthe auftragen.

Differenziirt man die Gleichungen (1. und 2.) nach allem t, so erhält man

4) $\delta x_t = 1 - cos\frac{t}{r} = 2 \cdot \left(sin\frac{t}{2r}\right)^2$.

5) $\delta y_t = sin\frac{t}{r} = 2 \cdot sin\frac{t}{2r} \cdot cos\frac{t}{2r}$.

Daraus findet sich aber

6) $\delta y_x = \frac{\delta y_t}{\delta x_t} = \frac{sin\frac{t}{r}}{1 - cos\frac{t}{r}} = cotg\frac{t}{2r}$,

folglich ist, wenn man an M eine Tangente MT und Normale MW zieht, nach (§. 7. II.)

$$\text{Subtang. } PT = \frac{y}{\delta y_x} = r \cdot \frac{\left(1 - cos\frac{t}{r}\right)^2}{sin\frac{t}{r}}$$

$$= 2r \cdot \left(sin\frac{t}{2r}\right)^2 \cdot tg\frac{t}{2r}.$$

*) Diese Gleichung konnte man auch unmittelbar erhalten. Es ist nämlich PR oder MQ die mittlere Proportionale zwischen RQ oder y, und QH oder $2r - y$, also ist $PR = \sqrt{2ry - y^2}$. Zu gleicher Zeit ist $\frac{t}{r}$ der Bogen, dessen Kosinus $\frac{CQ}{CM}$ oder $\frac{r-y}{r}$ ist. Also ist

$$t = AR = r \cdot \frac{1}{cos} \frac{r-y}{r}.$$

Und da $x = AP = AR - PR$ ist, so hat man die Gleichung (3.).

## Anhang.

### Von den Evolventen und den Evoluten.

Wir wollen hier noch zu der Theorie des Krümmungs-Kreises eine Betrachtung hinzufügen, womit wir im (§. 7.) selbst den Gang des Vortrags nicht verzögern zu dürfen glaubten.

I. Ist irgend eine ebene Kurve gegeben durch eine Gleichung zwischen den rechtwinklichen Koordinaten-Werthen x und y, etwa durch

$$\varphi_{x,y} = 0, \quad \text{oder} \quad y = y_x,$$

und ist c der Krümmungs-Halbmesser dieser Kurve in irgend einer Stelle, deren Abscisse x ist, sind ferner a und b die Koordinaten-Werthe des Mittel-Punktes dieses Krümmungs-Kreises, so hat man zur Bestimmung von a, b, c die 3 Gleichungen

$$1) \quad (y-b)^2 + (x-a)^2 = c^2,$$

$$2) \quad (y-b) \cdot \partial y_x + (x-a) = 0,$$

$$3) \quad (y-b) \cdot \partial^2 y_x + \partial y_x^2 + 1 = 0,$$

von denen die erstere die Gleichung eines Kreises ist, die beiden andern aber hervorgehen, wenn man jedesmal die nächstvorhergehende nach allein x differenziirt, dabei aber durchweg y als die durch $\varphi_{x,y} = 0$ gegebene Funktion von x ansieht, dagegen a, b, c als nach x konstant (von x unabhängig) sich denke, alles nach (§. 7. III.).

Nimmt man blos die beiden ersten Gleichungen (1. u. 2.), um daraus a und b zu bestimmen, während c noch jeden möglichen Werth behält, so hat man alle, die Kurve $\varphi_{x,y} = 0$ berührenden Kreise, und die Mittel-Punkte derselben liegen alle in der Normale der Kurve an dieser Stelle, d. h. für diesen Abscissen-Werth x; nach (§. 7. IV.).

II. Denkt man sich aber an alle einzelne Punkte der gegebenen Kurve $\varphi_{x,y} = 0$ den Krümmungs-Kreis, so bilden die Mittel-Punkte dieser Krümmungs-Kreise selbst wieder eine Kurve,

daher jedesmal die doppelte Länge der Normale zu derselben Stelle von dem Punkte M an bis zur Axe AX genommen. Ferner ist, wenn s den Bogen AM der Cycloide vorstellt, der zu der Abscisse x gehört, nach (§. 6. I.)

$$\delta s_t = \sqrt{\delta x_t^2 + \delta y_t^2} = 2\sin\frac{t}{2r},$$

also

$$s = \int_{t=0}^{t} 2\sin\frac{t}{2r}\,dt;$$

d. h.

$$11)\qquad s = 4r\cdot\left(1-\cos\frac{t}{2r}\right).$$

Ist also $t = \frac{1}{2}\pi$, d. h. ist M in der Mitte S des Theils ASB der Cycloide, so findet sich

12) Bog. $AS = 4r$ und Bog. $ASB = 8r$.

Der Bogen ASB der Cycloide ist also allemal dem vierfachen Durchmesser des Erzeugungs-Kreises gleich.

Setzt man $SE = u$, so wie Bogen $SD = s'$, wo DE senkrecht auf SK gedacht wird, so ist für diesen Punkt D

$$s' = s - 4r = -4r\cdot\cos\frac{t}{2r}, \text{ oder } s'^2 = 16r^2\cdot\left(\cos\frac{t}{2r}\right)^2.$$

Weil aber nach (2.) $\cos\frac{t}{r} = 1 - \frac{y}{r}$ ist, so ist

$$\left(\cos\frac{t}{2r}\right)^2 = 1 + \frac{y}{2r} = \frac{2r+y}{2r} = \frac{u}{2r};$$

also

$$13)\qquad s'^2 = 8r\cdot u.$$

Diese Gleichung zwischen $SE = u$ und Bog. $SD = s'$ hat viele Aehnlichkeit mit der Scheitel-Gleichung derjenigen Parabel, deren Parameter $8r$ ist.

Aehnliche Gleichungen und ähnliche Folgerungen lassen sich nun auch für die **abgekürzte** oder für die **verlängerte** Cycloide hinstellen.

Die Gleichung (4.) der Tangente an die Mittelpunkts-Kurve wird daher nun

$$8) \qquad b' - b = -\frac{1}{\partial y_x} \cdot (a' - a),$$

weshalb die Tangente der Mittelpunkts-Kurve nach (§. 7. II.) mit der Normale an die gegebene Kurve $\varphi_{x,y} = 0$ zusammenfällt, da beide mit der Abscissen-Axe denselben Winkel bilden (dessen trigonometrische Tangente $= -\frac{1}{\partial y_x}$ ist), und beide durch denselben Punkt (a, b) hindurch gehen.

IV. Sucht man die Länge s des Bogens der Mittelpunkts-Kurve, so hat man nach (§. 6. I.)

$$9) \qquad \partial s_a = \sqrt{1 + \partial b_a^2},$$

oder, wenn man a und b als die durch die Gleichungen (2. und 3.) gegebenen Funktionen von x betrachtet, weil dann $\partial s_x = \partial s_a \cdot \partial a_x$ ist,

$$10) \qquad \partial s_x = \sqrt{\partial a_x^2 + \partial b_x^2},$$

d. h. weil nach (6.) $\frac{\partial a_x}{\partial b_x} = -\partial y_x$ ist,

$$11) \qquad \partial s_x = \partial b_x \cdot \sqrt{1 + \partial y_x^2}.$$

Setzt man hier, um alles bloß in x auszudrücken, statt $\partial b_x$ seinen Werth aus (7.), so wie statt $y - b$ in (7.), dessen Werth aus (3.), so findet man für $\partial s_x$ einen Ausdruck, der bei genauerer Betrachtung auch entsteht, wenn der Krümmungs-Halbmesser c oder vielmehr $\frac{(1 + \partial y_x^2)^{\frac{3}{2}}}{\partial^2 y_x}$ nach allem x differenziirt wird. — Also findet sich

$$12) \qquad \partial s_x = \partial c_x,$$

demnach

$$13) \qquad s = c + const.$$

Der Bogen der Mittelpunkts-Kurve von irgend einem bestimmten Punkte A an bis zu jedem beliebigen Punkte der Mittelpunkts-Kurve P hin, ist also von dem Krümmungs-Halbmes-

die wir vorläufig Mittelpunkts-Kurve nennen wollen. Die Gleichung dieſer Mittelpunkts-Kurve wird aber offenbar gefunden, wenn man aus den 3 Gleichungen (I. 1. — 3.) ſowohl c als auch alles x, welches explicit und implicit in y, $\partial y_x$, $\partial^2 y_x$ vorkommt, eliminirt; alſo auch (weil in den beiden letztern Gleichungen (2. u. 3.) c ſchon nicht mehr vorkommt), wenn man nur aus den Gleichungen (2. u. 3) alles explicit und implicit vorkommende x eliminirt.

Dieſe Mittelpunkts-Kurve konſtruirt ſich aber aus den beiden Gleichungen (2. u. 3.) auch dadurch, daß man dem x alle ſtetig neben einander liegenden Werthe giebt, und aus (2. u. 3.), wo a und b Funktionen von x ſind, zu jedem Werthe von x die Werthe dieſer letztern berechnet.

III. Sucht man an den Punkt der Mittelpunkts-Kurve, deſſen Koordinaten-Werthe a und b ſind, eine geradlinige Tangente derſelben, ſo iſt, wenn a', b' die Koordinaten-Werthe dieſer Tangente ſind, ihre Gleichung nach (§. 7. II.)

4) $$b' - b = \partial b_a \cdot (a' - a).$$

Nun iſt aber nach (Analyſ. §. 16.)

5) $$\partial b_a = \frac{\partial b_x}{\partial a_x},$$

und da $b_x$ und $a_x$ durch die Gleichungen (2. u. 3.) gegeben ſind nach (II.), ſo müſſen letztere Gleichungen nach allem x differenziirt werden, wenn man $\partial b_x$, $\partial a_x$ ſoll finden können. Die Gleichung (2.) nach allem x differenziirt, giebt aber, wenn man den Theil weglässt, der nach (3.) der Null gleich iſt,

6) $$\partial b_x \cdot \partial y_x + \partial a_x = 0.$$

Die Gleichung (3.) dagegen, nach allem x differenziirt, giebt

7) $$(y - b) \cdot \partial^2 y_x + (\partial y_x + \partial b_x) \cdot \partial^2 y_x + 2 \partial y_x \cdot \partial^2 y_x = 0.$$

Dieſe Gleichung (7.) iſt aber dasmal unnöthig, weil die Gleichung (6.) allein ſchon das Geſuchte, nämlich

$$\frac{\partial b_x}{\partial a_x} = -\frac{1}{\partial y_x}$$

giebt.

Die Gleichung (4.) der Tangente an die Mittelpunkts-Kurve wird daher nun

8) $$b' - b = -\frac{1}{\partial y_x} \cdot (a' - a),$$

weshalb die Tangente der Mittelpunkts-Kurve nach (§. 7. II.) mit der Normale an die gegebene Kurve $\varphi_{x,y} = 0$ zusammenfällt, da beide mit der Abscissen-Axe denselben Winkel bilden (dessen trigonometrische Tangente $= -\frac{1}{\partial y_x}$ ist), und beide durch denselben Punkt (a, b) hindurch gehen.

IV. Sucht man die Länge s des Bogens der Mittelpunkts-Kurve, so hat man nach (§. 6. I.)

9) $$\partial s_a = \sqrt{1 + \partial b_a^2},$$

oder, wenn man a und b als die durch die Gleichungen (2. und 3.) gegebenen Funktionen von x betrachtet, weil dann $\partial s_x = \partial s_a \cdot \partial a_x$ ist,

10) $$\partial s_x = \sqrt{\partial a_x^2 + \partial b_x^2},$$

d. h. weil nach (6.) $\frac{\partial a_x}{\partial b_x} = -\partial y_x$ ist,

11) $$\partial s_x = \partial b_x \cdot \sqrt{1 + \partial y_x^2}.$$

Setzt man hier, um alles bloß in x auszudrücken, statt $\partial b_x$ seinen Werth aus (7.), so wie statt $y - b$ in (7.), dessen Werth aus (3.), so findet man für $\partial s_x$ einen Ausdruck, der bei genauerer Betrachtung auch entsteht, wenn der Krümmungs-Halbmesser c oder vielmehr $\frac{(1 + \partial y_x^2)^{\frac{3}{2}}}{\partial^2 y_x}$ nach allem x differenziirt wird. — Also findet sich

12) $$\partial s_x = \partial c_x,$$

demnach

13) $$s = c + const.$$

Der Bogen der Mittelpunkts-Kurve von irgend einem bestimmten Punkte A an bis zu jedem beliebigen Punkte der Mittelpunkts-Kurve P hin, ist also von dem Krümmungs-Halbmes-

ser die gegebene Kurve $\varphi_{x,y} = 0$, der von P als Mittelpunkt des Krümmungs-Kreises ausgeht, allemal um gleich viel verschieden (nämlich um die Konstante); und ist der Anfangs-Punkt A des Bogens so genommen, daß der Bogen AP einmal diesem Krümmungs-Halbmesser gleich ist, so ist auch für jeden andern Punkt P, wenn nur A derselbe bleibt, der Bogen AP diesem Krümmungs-Halbmesser gleich *).

Wikelt man daher um die Mittelpunkts-Kurve einen Faden, und nimmt man irgendwo den Faden gespannt, d. h. in der Richtung der Tangente der Mittelpunkts-Kurve so lang, daß er bis zur gegebenen Kurve $\varphi_{x,y} = 0$ reicht, so wird dieser End-Punkt des Fadens die Kurve $\varphi_{x,y} = 0$ beschreiben, wenn der Faden auf der Mittelpunkts-Kurve abgewikelt wird.

---

*) Daß $\partial s_x = \partial c_x$ ist (also die Gleichung 12.), leitet man gewöhnlich etwas bequemer ab. Da die Gleichung (1.) identisch werden muß, wenn man statt a, b die aus (2. u. 3.) zu findenden Werthe (in x) substituirt, statt c aber den aus denselben 3 Gleichungen zu findenden Krümmungs-Halbmesser (in x) setzt, so differenzire man die (1.) in diesem Sinne nach allem x, indem man zugleich den Theil wegläßt, welcher mittelst der (2.) der Null gleich ist. Dies giebt

$$(b-y)\cdot\partial b_x + (a-x)\cdot\partial a_x = c\cdot\partial c_x,$$

oder, wenn man statt c seinen Werth aus (1.) setzt,

$$\frac{(b-y)\cdot\partial b_x + (a-x)\cdot\partial a_x}{\sqrt{(b-y)^2+(a-x)^2}} = \partial c_x.$$

Dividirt man nun hier Zähler und Nenner durch $b-y$, und substituirt man zugleich statt $\frac{a-x}{b-y}$ dessen Werth $-\partial y_x$ aus (2.), so ergiebt sich

$$\frac{\partial b_x - \partial a_x\cdot\partial y_x}{\sqrt{1+\partial y_x^2}} = \partial c_x.$$

Wird hier nun noch statt $\partial a_x$ sein Werth $-\partial b_x\cdot\partial y_x$ aus (6.) substituirt, so erhält man

$$\partial b_x\cdot\frac{1+\partial y_x^2}{\sqrt{1+\partial y_x^2}} = \partial c_x \quad \text{oder} \quad \partial b_x\cdot\sqrt{1+\partial y_x^2} = \partial c_x.$$

Folglich ist, weil nach (11.) auch

$$\partial s_x = \partial b_x\cdot\sqrt{1+\partial y_x^2}$$

ist, nothwendig auch

$$\partial s_x = \partial c_x.$$

Deshalb wird die Mittelpunkts-Kurve auch die Evolute, die gegebene Kurve $\varphi_{x,y} = 0$ dagegen die Evolvente genannt.

V. Jede gegebene Kurve hat eine einzige Mittelpunkts-Kurve; zu jeder gegebenen Mittelpunkts-Kurve gehören aber unendlich viele Evolventen; oder mit andern Worten: es giebt unzählig viele Kurven, welche alle eine und dieselbe Mittelpunkts-Kurve haben.

Jede Normale der einen dieser unzählig vielen Evolventen, die zu einer und derselben Evolute gehören, ist zu gleicher Zeit Normale aller übrigen dieser Evolventen. Und in je zweien dieser letztern ist der Abstand je zweier Punkte, in der Richtung dieser gemeinschaftlichen Normalen genommen, immer ein und derselbe.

VI. Zur Evolute einer Cycloide findet sich allemal dieselbe Cycloide, nur in anderer Lage gegen die Axen.

VII. Ist die Gleichung der Mittelpunkts-Kurve, d. h. die Gleichung zwischen b und a, zuerst gegeben, etwa

$$(\odot) \cdots \qquad b = b_a,$$

so muß man, um die Gleichung der dazu gehörigen Evolventen zu finden, aus den 4 Gleichungen (1. 2. 3. und $\odot$) a, b und c, oder aus den 3 Gleichungen (2. 3. und $\odot$) a und b eliminiren. Dann wird man eine Differenzial-Gleichung der zweiten Ordnung erhalten, deren allgemeines Integral zwei willkührliche Konstanten in sich aufnimmt.

Weil aber die Gleichung ($\odot$) kein x enthält, so wird das vollständige allgemeine Integral dieser Gleichung der zweiten Ordnung nichts anders seyn, als die Gleichung (1.) des Kreises, wo jedoch statt b überall $b_a$ geschrieben wird, so daß a und c die beiden willkührlichen Konstanten sind. — Da aber die gesuchte Kurve kein Kreis, auch nicht so seyn kann, daß man noch zwei Nebenbedingungen hätte, um zwei willkührliche Konstanten bestimmen zu können, so folgt, daß unsere gesuchte Evolvente ein singulärer Werth dieser für sie gefundenen Differenzial-Gleichung der zweiten Ordnung seyn muß, d. h. daß sich diese Differenzial-Gleichung der zweiten Ordnung (mit-

teilst Einführung neuer Veränderlichen oder an sich schon) in 2 Faktoren zerlegen lassen muß, deren einer Faktor nur von der ersten Ordnung, und dasmal die Gleichung der gesuchten Evolvende ist.

Weil man aber, wenn zuerst der Bogen $s_a$ aus

$$(\mathbb{C})\cdots \qquad s_a = \int \sqrt{1+\partial b_a^2}\cdot da$$

mit einer willkührlichen Konstante C gefunden wird, nach (13.)

$$c = s_a$$

hat, wo zur Rechten in $s_a$ eine willkührliche Konstante C steckt, so kann man diesen Werth statt c in die Gleichung (1.) setzen, und hat dann die Gleichungen (1. und 2.), nämlich:

$$(\sigma)\cdots \qquad \begin{cases} (y-b_a)^2+(x-a)^2 = s_a^2 \\ (y-b_a)\cdot \partial y_x + (x-a) = 0, \end{cases}$$

wo sogleich statt b sein Werth $b_a$ aus der gegebenen Gleichung ($\odot$) gesetzt worden ist. Eliminirt man dann aus diesen beiden Gleichungen alles a, so erhält man eine Differenzial-Gleichung der ersten Ordnung

$$(\mathbb{Q})\cdots \qquad \psi_{x,y,\partial y_x,C} = 0,$$

welche wiederum der Evolvende angehört, bereits die in $s_a$ steckende willkührliche Konstante C enthält, und ein allgemeines erstes Integral der obigen Differenzial-Gleichung der zweiten Ordnung ist. Integrirt man selbige noch einmal, so erhält man wieder das Ur-Integral mit zwei willkührlichen Konstanten, nämlich die Gleichung (1.) des Kreises.

Auf der andern Seite kann, wie gesagt, die Ur-Gleichung der Evolvende nur eine einzige willkührliche Konstante in sich aufnehmen, weil, obgleich zu einer und derselben Evolute $b = b_a$ unendlich viele Evolvenden gehören, jede dieser letztern doch völlig bestimmt ist, wenn man von ihr einen einzigen Punkt hat (in so ferne dieser die Länge des Fadens genau bestimmt); aus einem einzigen gegebenen Punkt aber, durch welchen die Kurve durchgehen muß, nur eine einzige Konstante sich bestimmt.

Aus

Aus dieser Betrachtung geht hervor, daß die Ur-Gleichung aller Evolventen aus der Gleichung $\psi_{x,y,\partial y_x} = 0$ nicht durch Integration hervorgeht, sondern daß auch diese letztere Gleichung einen singulären Werth haben muß, welcher die Ur-Gleichung aller gesuchten Evolventen ist (in so ferne noch das willkührliche C in ihr steckt), d. h. daß die Gleichung $\psi_{x,y,\partial y_x,C} = 0$ entweder an sich schon, oder doch nach gehöriger Umformung in zwei Faktoren zerfällt, von der Form

$$f_{x,y,C} \times \varphi_{x,y,\partial y_x,C} = 0,$$

so daß ihr der Faktor $f_{x,y,C} = 0$ eben so gut wie der andere Faktor $\varphi_{x,y,\partial y_x,C} = 0$ genügt, während der erstere schon eine Ur-Gleichung ist, ihr singulärer Werth genannt wird, und keiner Integration mehr bedarf, dabei aber alle gesuchten Evolventen liefert, wenn man dem C alle möglichen Werthe giebt.

Weil aber nach (Syst. d. Math. Th. V. §. 270.) der singuläre Werth $f_{x,y,C} = 0$, allemal aus dem allgemeinen Integral

$$\alpha) \qquad (x-a)^2+(y-b_a)^2-s_a^2 = 0$$

gefunden wird, wenn man dieses Integral bloß nach der willkührlichen Konstante a differenziirt (so daß man

$$\beta) \qquad (x-a)+(y-b)\cdot\partial b_a+s_a\cdot\partial s_a = 0$$

erhält) und dann aus diesen beiden Gleichungen a selbst eliminirt, so folgt, daß die beiden Gleichungen ($\alpha$. und $\beta$.), wenn man a aus ihnen eliminirt, nothwendig die gesuchte Evolvende geben.

VIII. Alles dieses bestätigt sich auch durch folgende Betrachtung. — Jede Evolvende kann man sich denken, als entstände sie durch die Durchschnitte der stetig auf einander folgenden Kreise, welche alle aus der Gleichung

$$1) \quad (y-b_a)^2+(x-a)^2-s_a^2 = 0 \text{ oder } F_a = 0$$

für die stetig auf einander folgenden Werthe von a hervorgehen. Denkt man sich nun zwei solche Kreise, welche für zwei nächst

auf einander folgende Werthe von a sich ergeben, so erhält man nach (§. 20. Analyt. Nr. 10.) die Gleichung des zweiten Kreises, wenn man die (1.) nach allem a differenziirt, also daß sie

$$\partial F_{(a)} = 0$$

wird. Die Gleichung der Evolventen findet sich also, wenn man aus $F_a = 0$ und $\partial F_a = 0$ dieses a selbst eliminirt, weil dieses die Gleichung giebt für alle Punkte, welche je zwei nächst auf einander folgende dieser Kreise mit einander gemein haben.

# Höhere Geometrie.

## Drittes Kapitel.

### Wie Flächen und Linien im Raume durch Gleichungen ausgedrückt werden.

§. 10.

I. Hat man 3 auf einander senkrechte Axen OX, OY und OZ (Fig. 2.) und sind x, y, z die drei Koordinaten-Werthe eines Punktes M (so daß x und y die Koordinaten-Werthe seiner Projektion $M_1$ bezeichnen, z aber den Abstand $MM_1$ ausdrückt), so liefert jede Gleichung

$$f_{x,y,z} = 0$$

zwischen x, y und z, zu irgend einem Punkte $M_1$ in der Ebene XOY, den zugehörigen Abstand $MM_1$ oder $\pm z$ (wenn nicht z für diese Werthe von x und y imaginär wird). Jede solche Gleichung $f = 0$ ist demnach der Repräsentant irgend einer ebenen oder krummen Fläche. — Die Gleichung $f = 0$ giebt aber den dritten Koordinaten-Werth z als eine Funktion der beiden andern Koordinaten-Werthe x und y.

II. Bezieht man zwei solche Gleichungen

1) $f_{x,y,z} = 0$ und 2) $\varphi_{x,y,z} = 0$

auf dieselben Axen OX, OY und OZ, so hat man zwei solche Flächen, weil die beiden aus $f = 0$ und $\varphi = 0$ für beliebig angenommene x und y sich ergebenden Werthe von z, im All-

gemeinen verschieden seyn werden. Denkt man sich aber in den beiden Gleichungen (1. u. 2.) die x, y, z als dieselben, so daß durch diese beiden Gleichungen die beiden Koordinaten y und z als Funktionen der ersten Koordinate x sich ergeben, so hat man diejenigen Punkte im Auge, welche in beiden Flächen $f = 0$ und $\varphi = 0$ zugleich liegen, also die Durchschnitts-Linie der beiden Flächen, die gerade oder krumm, und im letztern Falle einfach gekrümmt (so daß sie mit allen Punkten in einer Ebene liegt), oder doppelt gekrümmt seyn wird.

III. Nimmt man nur eine Gleichung

1) $$f_{x,y,z} = 0,$$

und sucht man die Durchschnitts-Linie der durch diese Gleichung vorgestellten Fläche F mit der Ebene XOY, so hat man die Punkte im Auge, für welche $z = 0$ ist. Die Gleichung

2) $$f_{x,y,0} = 0$$

ist daher die Gleichung dieser Durchschnitts-Linie, auf die Axen OX und OY bezogen.

Setzt man aber in (1.) Null statt y, so daß man

3) $$f_{x,0,z} = 0$$

bekommt, so hat man die Gleichung der Durchschnitts-Linie der Fläche F mit der Ebene XOZ, auf die Axen OX und OZ bezogen.

Und wird Null statt x gesetzt, so daß man

4) $$f_{0,y,z} = 0$$

erhält, so hat man die Gleichung der Durchschnitts-Linie der Fläche F mit der Ebene YOZ. — Diese drei Durchschnitts-Linien heißen aber die drei Grundschnitte der Fläche F. — Ist eine oder die andere dieser für die Grundschnitte erhaltenen Gleichungen so, daß sie durch kein Paar reeller Werthe ihrer Veränderlichen x, y oder x, z oder y, z identisch wird, so existirt natürlich dieser Grundschnitt selbst nicht.

IV. Auch die Flächen theilt man nach den sie vorstellenden Gleichungen $f_{x,y,z} = 0$ ein in a) algebraische und b) transcendente; und die algebraischen wieder in Flächen der ersten Ordnung, vorgestellt durch die Gleichung

$\alpha)$ $\quad A \cdot z + B \cdot y + C \cdot x + D = 0;$

in Flächen der zweiten Ordnung, vorgestellt durch die allgemeine Gleichung der zweiten Ordnung

$\beta)$ $\quad A \cdot z^2 + B \cdot y^2 + C \cdot x^2 + D \cdot xz + E \cdot yz + F \cdot xy +$
$G \cdot z + H \cdot y + K \cdot x + L = 0;$

endlich in Flächen der dritten und höhern Ordnungen.

V. Führt man statt der Koordinaten-Axen OX, OY, OZ 3 neue senkrechte Axen O′X′, O′Y′, O′Z′ ein, wie in (§. 3. IV.), so daß derselbe Punkt M 3 alte und 3 neue Koordinaten-Werthe hat; werden die letzteren durch $x'$, $y'$, $z'$ bezeichnet, und bedeuten p, q, r die alten Koordinaten-Werthe des Punktes O′, so daß $x - p$, $y - q$, $z - r$ die Koordinaten-Werthe des Punktes M bedeuten auf Axen bezogen, die durch O′ parallel mit OX, OY, OZ gelegt sind, so hat man nach (§. 3. IV.)

$$(\odot) \cdots \begin{cases} x = x' \cdot \cos\alpha + y' \cdot \cos\alpha' + z' \cdot \cos\alpha'' + p \\ y = x' \cdot \cos\beta + y' \cdot \cos\beta' + z' \cdot \cos\beta'' + q \\ z = x' \cdot \cos\gamma + y' \cdot \cos\gamma' + z' \cdot \cos\gamma'' + r. \end{cases}$$

Substituirt man nun diese Werthe statt x, y, z in die Gleichung $f_{x,y,z} = 0$ der Fläche F, so erhält man die neue Gleichung $F_{x',y',z'} = 0$ derselben Fläche.

Diese Substitution der Werthe von x, y, z aus $(\odot)$ läßt aber sehen:

1) daß die Gleichungen $f_{x,y,z} = 0$ und $F_{x',y',z'} = 0$ zu gleicher Zeit algebraisch, oder zu gleicher Zeit transcendent sind;

2) daß, wenn sie beide algebraisch sind, sie auch beide von derselben Ordnung seyn müssen.

Die Einführung neuer, wieder auf einander senkrechten Axen ändert also an der Gattung der Gleichung nichts, so daß die obige Eintheilung der Flächen von der beliebig gewählten Lage der Axen unabhängig ist, wenn man nur rechtwinkliche Koordinaten behält (namentlich nicht Polar-Koordinaten nimmt).

## §. 11.

I. Nimmt man die durch die Gleichung

1) $\quad A \cdot z + B \cdot y + C \cdot x + D = 0$

gegebene Fläche F der ersten Ordnung, so sind ihre 3 Grundschnitte gegeben durch die Gleichungen

$$2)\quad \begin{cases} B\cdot y+C\cdot x+D=0, \text{ oder } y=-\frac{C}{B}\cdot x-\frac{D}{B}; \\ A\cdot z+C\cdot x+D=0, \text{ oder } z=-\frac{C}{A}\cdot x-\frac{D}{A}; \\ A\cdot z+B\cdot y+D=0, \text{ oder } z=-\frac{B}{A}\cdot y-\frac{D}{A}. \end{cases}$$

Diese 3 Grundschnitte sind also gerade Linien. — Führt man neue Koordinaten-Axen O′X′, O′Y′, O′Z′ ein, so wird die Gleichung derselben Fläche F die Form

$$3)\quad A'\cdot z'+B'\cdot y'+C'\cdot x'+D'=0$$

annehmen; also werden ihre 3 neuen Grundschnitte wiederum gerade Linien seyn. Die Fläche der ersten Ordnung hat also die Eigenschaft, daß sie von jeder beliebigen Ebene in einer geraden Linie geschnitten wird; sie ist sonach in keiner Richtung gekrümmt; die Fläche der ersten Ordnung ist also eine ebene Fläche oder Ebene.

II. Ist in der Gleichung der Ebene

$$1)\quad A\cdot z+B\cdot y+C\cdot x+D=0$$

nicht $z=0$, sondern $A=0$, so stellt zwar die Gleichung

$$2)\quad B\cdot y+C\cdot x+D=0$$

den ersten Grundschnitt der Ebene vor, weil diese Gleichung aus (1.) auch für $z=0$ hervorgeht. Allein die Gleichung (1.) läßt, wenn $A=0$ ist, also wenn die Gleichung (2.) daraus wird, die Koordinate z völlig unbestimmt, so daß sie für jede, der Gleichung (2.) entsprechenden Werthe von x und y, dem z alle möglichen positiven und negativen Werthe zuläßt.

Ist also $A=0$, so stellt die Gleichung (1.), d. h. die Gleichung (2.) (als eine Gleichung zwischen den drei Koordinaten-Werthen x, y und z gedacht), die Ebene vor, welche auf der Ebene XOY senkrecht steht, deren Grundschnitt mit XOY übrigens durch dieselbe Gleichung (2.), als eine Gleichung bloß zwischen x und y gedacht, gegeben ist.

Ganz analoges findet sich, wenn statt $A = 0$ entweder $B = 0$, oder $C = 0$ seyn sollte.

Ist aber $A = 0$ und zu gleicher Zeit auch $B = 0$, so daß die Gleichung (1.) bloß

3) $$C \cdot x + D = 0$$

ist, so bestimmt sich aus ihr $x \left(= -\frac{D}{C}\right)$ und die zu diesem Werthe von $x$ gehörigen $y$ und $z$ können ganz willkührlich alle möglichen seyn. Die Gleichung (3.) als eine Gleichung der ersten Ordnung zwischen $x$, $y$ und $z$ gedacht, stellt also dann eine Ebene vor, welche auf $OX$, in dem Punkte wo $Cx + D = 0$ ist, senkrecht steht, daher mit der Ebene $YOZ$ parallel läuft. Aehnliches gilt, wenn $A = 0$ und $C = 0$, oder wenn $B = 0$ und $C = 0$ seyn sollte.

III. Zwei Ebenen

1) $$A \cdot z + B \cdot y + C \cdot x + D = 0$$

und 2) $$A' \cdot z + B' \cdot y + C' \cdot x + D' = 0$$

laufen mit einander parallel, wenn zwei Paare ihrer Grundschnitte (§. 10. III.) mit einander parallel laufen, also nach (§. 4.), wenn die beiden Gleichungen

3) $$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$$

erfüllt sind.

Sind diese 3 Quozienten $\frac{A}{A'}$, $\frac{B}{B'}$, $\frac{C}{C'}$ nicht alle 3 einander gleich, so sind die Ebenen nicht mit einander parallel, weil dann entweder keines der Paare von Grundschnitten, oder doch nur ein einziges Paar derselben parallel ist.

IV. Soll eine Ebene durch einen Punkt gehen, dessen Koordinaten-Werthe $a$, $b$, $c$ sind, so ist ihre Gleichung

(⊙) ... $$A \cdot (z - c) + B \cdot (y - b) + C \cdot (x - a) = 0,$$

weil, während $x = a$ und $y = b$ gesetzt wird, $z = c$ werden muß; oder weil in der Gleichung

$$A \cdot z + B \cdot y + C \cdot x + D = 0,$$

welche jede Ebene vorstellt, jetzt noch

$A \cdot a + B \cdot b + C \cdot a + D = 0$

seyn muß, und nun D aus beiden Gleichungen (1. u. 2.) eliminirt werden kann.

Soll aber die durch die Gleichung

1) $\quad A \cdot z + B \cdot y + C \cdot x + D = 0$

gegebene Ebene durch 3 Punkte $(a, b, c)$, $(a', b', c')$ und $(a'', b'', c'')$ gehen, so hat man die 3 Gleichungen

2) $\begin{cases} A \cdot c + B \cdot b + C \cdot a + D = 0; \\ A \cdot c' + B \cdot b' + C \cdot a' + D = 0; \\ A \cdot c'' + B \cdot b'' + C \cdot a'' + D = 0. \end{cases}$

Aus diesen 3 Gleichungen findet man nun die Werthe von $\frac{B}{A}, \frac{C}{A}, \frac{D}{A}$, etwa $\frac{B}{A} = m$, $\frac{C}{A} = n$, $\frac{D}{A} = p$; und diese Werthe, in die (1.) substituirt, geben

(C) $\cdots \quad z + m \cdot y + n \cdot x + p = 0$

als die Gleichung für die Ebene, welche durch die drei gegebenen Punkte hindurchgeht. — Dieselbe Gleichung kann man dann mit einer beliebigen Zahl A noch multipliziren, wenn man ihr die Form

(♂) $\cdots \quad A \cdot z + Am \cdot y + An \cdot x + Ap = 0$

geben will.

V. Soll eine Ebene durch einen Punkt $(a, b, c)$ hindurch gehen, und noch mit einer andern durch die Gleichung

1) $\quad A \cdot z + B \cdot y + C \cdot x + D = 0$

gegebenen Ebene parallel laufen, so ist ihre Gleichung nach (III. und IV.)

2) $\quad A \cdot (z - c) + B \cdot (y - b) + C \cdot (x - a) = 0.$

Und die Gleichung der mit der (1.) parallelen Ebene, welche aber durch den Anfangs-Punkt O der Axen hindurch geht, ist nun offenbar (weil hier $a = b = c = 0$)

3) $\quad A \cdot z + B \cdot y + C \cdot x = 0.$

Anmerk. Wir müssen diesem (§. 11.) von den ebenen Flächen noch eine Ansicht hinzu fügen, welche über alle Resultate desselben ein helleres Licht verbreitet.

I. Irgend eine Ebene E ist offenbar gegen die Koordinaten-Axen OX, OY, OZ gegeben, sobald man von O aus auf sie eine senkrechte Linie OM gefällt sich denkt, und nun die Winkel MOX, MOY, MOZ bekannt sind (welche wir durch $\lambda, \mu, \nu$ bezeichnen wollen) und noch die Länge der Normale OM, d. h. die senkrechte Entfernung des Punktes O von dieser Ebene E, welche letztere wir $= d$ setzen, und negativ oder positiv in Rechnung bringen wollen, je nachdem M in der durch $\lambda, \mu, \nu$ gegebenen Richtung selbst oder in ihrer entgegengesetzten Verlängerung liegt.

Denkt man sich nun irgend einen beliebigen Punkt in der Ebene, dessen Koordinaten-Werthe x, y, z seyn mögen, so ist nach dem wichtigen Satze der Projektionen (§. 3. II.) allemal, genau wie in der Anwendung (§. 3. IV.), die wir von demselben Satze gemacht haben:

$$1) \qquad z \cdot \cos\nu + y \cdot \cos\mu + x \cdot \cos\lambda - d = 0,$$

und so hat man also ohne alle weitere Mühe die Gleichung dieser Ebene. Multiplizirt man solche mit einer ganz beliebigen Zahl m, und setzt man

$$2) \quad m \cdot \cos\nu = A,\ m \cdot \cos\mu = B,\ m \cdot \cos\lambda = C \text{ und } -m \cdot d = D,$$

so daß

$$3) \qquad m = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$

wird, so erhält man die Gleichung derselben Ebene auch in der Form

$$4) \qquad A \cdot z + B \cdot y + C \cdot x + D = 0.$$

II. Umgekehrt folgt hieraus: Ist eine Gleichung von der Form

$$A \cdot z + B \cdot y + C \cdot x + D = 0$$

gegeben, wo A, B, C, D ganz beliebige reelle Werthe vorstellen, so

1) ist dies allemal die Gleichung einer Ebene;

2) die Werthe

$$\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},\quad \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \text{ und } \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

sind allemal die Kosinusse der Winkel $\nu, \mu, \lambda$, welche diese Ebene mit den Koordinaten-Ebenen XOY, XOZ, YOZ (oder jede auf dieser Ebene senkrecht stehende Gerade mit den Axen OZ, OY, OX) macht.

3) Der Ausdruck $\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ ist allemal die senkrechte Entfernung des Punktes O von dieser Ebene.

III. Da zwei Ebenen unter sich parallel sind, so oft sie beide auf derselben Geraden senkrecht stehen, so folgt, daß wenn die Gleichung der einen

$$z \cdot \cos\nu + y \cdot \cos\mu + x \cdot \cos\lambda - d = 0$$

ist, die Gleichung der andern dann allemal

$$z \cdot \cos\nu + y \cdot \cos\mu + x \cdot \cos\lambda - d' = 0$$

seyn müsse, wo d' der senkrechte Abstand des Punktes O von dieser andern Ebene ist.

IV. Sind daher in zweien Gleichungen

1) $A \cdot z + B \cdot y + C \cdot x + D = 0$

und 2) $A' \cdot z + B' \cdot y + C' \cdot x + D' = 0$

die 3 Quozienten

$$\frac{A}{A'}, \quad \frac{B}{B'} \quad \text{und} \quad \frac{C}{C'}$$

alle dreie einander gleich, so sind diese Ebenen nothwendig mit einander parallel; und da

$$\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \text{ so wie } \frac{D'}{\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}$$

die verschiedenen senkrechten Abstände derselben parallelen Ebenen von dem Punkte O sind, so darf man nur diese letzteren beiden Ausdrücke von einander subtrahiren, und man hat auch den senkrechten Abstand der beiden parallelen Ebenen unter sich.

V. Umgekehrt: sind die 3 Quozienten

$$\frac{A}{A'}, \quad \frac{B}{B'} \quad \text{und} \quad \frac{C}{C'}$$

in (IV.) nicht alle drei einander gleich, so sind die beiden Ebenen (1. u. 2.) auch nicht mit einander parallel. Aber sie

bilden dann einen Winkel $\delta$ mit einander, der nach (§. I. VII. 7.) und nach vorstehender (II. 2.) gegeben ist durch die Gleichung

$$3)\qquad \cos\delta = \frac{A\cdot A' + B\cdot B' + C\cdot C'}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}.$$

Ist also

$$4)\qquad A\cdot A' + B\cdot B' + C\cdot C' = 0,$$

so stehen diese Ebenen (1. u. 2.) auf einander senkrecht.

## §. 12.

I. Denkt man sich zwei Ebenen durch die Gleichungen

$$1)\qquad A\cdot z + B\cdot y + C\cdot x + D = 0$$

und

$$2)\qquad A'\cdot z + B'\cdot y + C'\cdot x + D' = 0$$

gegeben, so stellen diese Gleichungen die gerade Durchschnitts-Linie L dieser Ebenen vor, sobald man y und z als zwei, mittelst dieser beiden Gleichungen gegebene Funktionen von x sich denkt (nach §. 10. II.).

Eliminirt man aus diesen beiden Gleichungen (1. u. 2.) die Koordinate z, so erhält man eine Gleichung von der Form

$$3)\qquad ay + bx + c = 0,$$

und dies ist offenbar die Gleichung der Projektion der Durchschnitts-Linie L auf die Ebene XOY. — Eliminirt man aber aus den beiden Gleichungen (1. u. 2.) die Koordinate y, so erhält man eine Gleichung von der Form

$$4)\qquad d\cdot z + e\cdot x + f = 0,$$

und dies ist die Gleichung der Projektion von L auf die Ebene XOZ.

Und weil die Gleichungen (3. u. 4.) für y und z dieselben Funktionen von x liefern, wie die Gleichungen (1. u. 2.), so stellen die Gleichungen (3. u. 4.) wiederum die Linie L im Raume selbst vor.

II. Umgekehrt: Irgend eine Gerade L im Raume ist durch zwei ihrer Projektionen auf die Koordinaten-Ebenen gegeben.

Sind nämlich

$$1)\qquad A\cdot y + B\cdot x + C = 0,$$

$$2)\qquad D\cdot z + E\cdot x + G = 0$$

die Gleichungen dieſer beiden Projektionen, ſo ſind dieſelben zu gleicher Zeit auch nach (§. 11. II.) die Gleichungen der, durch dieſe Projektionen hindurch gehenden und auf den Ebenen XOY, XOZ ſenkrechten (d. h. der die Linie L projicirenden) Ebenen, alſo die Gleichungen der Durchſchnitts-Linie dieſer letztern beiden Ebenen, d. h. die Gleichungen der Linie L.

III. Geht eine Gerade im Raume durch einen Punkt (a, b, c), ſo iſt die Form ihrer Gleichungen dieſe:

$$\left.\begin{array}{l} A\cdot(z-c)+B\cdot(y-b)+C\cdot(x-a)=0 \\ A'\cdot(z-c)+B'\cdot(y-b)+C'\cdot(x-a)=0, \end{array}\right\}$$

oder auch dieſe:

$$\left.\begin{array}{l} A\cdot(y-b)+B\cdot(x-a)=0, \text{ oder } y-b=m\cdot(x-a) \\ A'\cdot(z-c)+B'\cdot(x-a)=0, \text{ oder } z-c=n\cdot(x-a), \end{array}\right\}$$

wo die Koeffizienten völlig willkührlich gedacht ſind, ſo daß man die unendlich vielen Geraden ausgedrückt hat, welche alle durch einen und denſelben Punkt (a, b, c) hindurch gehen.

Geht die Gerade durch den Urſprung O der Koordinaten, ſo hat man $a=b=c=0$; und die Gleichungen dieſer Geraden haben die Form

$$\left.\begin{array}{l} A\cdot y+B\cdot x=0, \text{ oder } y=m\cdot x \\ A'\cdot z+B'\cdot x=0, \text{ oder } z=n\cdot x. \end{array}\right\}$$

IV. Sind

$$y=a\cdot x \text{ und } z=b\cdot x$$

die Gleichungen einer durch den Urſprung O gehenden Geraden L, ſo ſind x, ax und bx die 3 Koordinaten-Werthe eines Punktes M derſelben. Folglich iſt nach (§. 1. V. Nr. 4.)

$$OM=x\cdot\sqrt{1+a^2+b^2}.$$

Werden nun $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ die Winkel genannt, welche OM oder L mit den 3 Axen OX, OY, OZ macht, ſo findet ſich noch nach (§. 1. V.)

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+a^2+b^2}},\quad \cos\beta=\frac{a}{\sqrt{1+a^2+b^2}}$$

und

$$\cos\gamma=\frac{b}{\sqrt{1+a^2+b^2}}.$$

V. Da zwei gerade Linien L und L' im Raume, mit einander parallel laufen, wenn zwei Paare ihrer Projektionen mit einander parallel laufen, so folgt, daß die durch die Gleichungen

$$(L)\cdots \quad \left\{\begin{array}{l} a\cdot y+b\cdot x+c=0 \\ m\cdot z+n\cdot x+g=0 \end{array}\right\},$$

$$(L')\cdots \quad \left\{\begin{array}{l} a'\cdot y+b'\cdot x+c'=0 \\ m'\cdot z+n'\cdot x+g'=0 \end{array}\right\}$$

gegebenen Geraden L und L' mit einander parallel laufen, wenn

1) $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$, oder $a\cdot b'-a'\cdot b=0$

und 2) $\frac{m}{m'}=\frac{n}{n'}$, oder $m\cdot n'-m'\cdot n=0$

ist. — Findet eine dieser beiden Gleichungen (1. oder 2.) nicht statt, so sind die Linien L und L' auch nicht mit einander parallel. —

Sollen aber die durch die obigen Gleichungen L und L' gegebenen Geraden sich schneiden, so müssen alle 4 Gleichungen (L und L') durch die Koordinaten-Werthe dieses Durchschnitts-Punktes identisch werden. Eliminirt man jedoch unter dieser Voraussetzung die 3 Koordinaten-Werthe x, y, z ihres Durchschnitts-Punktes, so erhält man die Gleichung

3) $(b\cdot c'-b'\cdot c)(m\cdot n'-m'\cdot n)+(a\cdot b'-a'\cdot b)(g\cdot n'-g'\cdot n)=0.$

Ist demnach diese Gleichung (3.) von den Koeffizienten der gegebenen Gleichungen (L und L') nicht erfüllt, so haben die Linien L und L' auch keinen Durchschnitts-Punkt.

Ist also nur eine oder gar keine der Gleichungen (1. u. 2.) erfüllt, und auch nicht die Gleichung (3.), so laufen die Linien L und L' nicht mit einander parallel, und schneiden sich auch nicht; also liegen sie dann nicht in einer und derselben Ebene.

VI. Die Gleichungen der durch einen Punkt (a, b, c) hindurch gehenden und mit der Geraden

$$(L)\cdots \quad \left\{\begin{array}{l} A\cdot y+B\cdot x+C=0, \text{ oder } y=m\cdot x+n \\ A'\cdot z+B'\cdot x+C'=0, \text{ oder } z=p\cdot x+q \end{array}\right\}$$

parallel laufenden Geraden L' sind daher

$$(L)\cdots \begin{cases} A\cdot(y-b)+B\cdot(x-a)=0, \text{ oder } (y-b)=m\cdot(x-a) \\ A'\cdot(z-c)+B'\cdot(x-a)=0, \text{ oder } (z-c)=p\cdot(x-a) \end{cases}$$

Und geht eine andere mit L parallele Gerade L'' durch den Ursprung O der Koordinaten, so daß $a=b=c=0$ ist, so sind ihre Gleichungen

$$(L'')\cdots \begin{cases} A\cdot y+B\cdot x=0, \text{ oder } y=n\cdot x \\ A'\cdot z+B'\cdot x=0, \text{ oder } z=p\cdot x \end{cases},$$

wo m, n, p und q bezüglich $-\frac{B}{A}, -\frac{C}{A}, -\frac{B'}{A'}$ und $-\frac{C'}{A'}$ vorstellen.

VII. Gehen zwei Gerade L und L' durch einen Punkt (a, b, c), so daß ihre Gleichungen folgende Form annehmen können:

$$(L)\cdots \begin{cases} A\cdot(y-b)+B\cdot(x-a)=0 \\ C\cdot(z-c)+D\cdot(x-a)=0 \end{cases},$$

$$(L')\cdots \begin{cases} A'\cdot(y-b)+B'\cdot(x-a)=0 \\ C'\cdot(z-c)+D'\cdot(x-a)=0 \end{cases},$$

so bilden sie an diesem Punkte (a, b, c) einen Winkel $\psi$ mit einander. Um diesen Winkel $\psi$ zu finden, denkt man sich zuerst zwei durch den Ursprung O der Koordinaten hindurch gehende und mit L und L' bezüglich parallele Linien L'' und L''', deren Gleichungen nachstehende sind:

$$(L'')\cdots \begin{cases} A\cdot y+B\cdot x=0, \text{ oder } y=m\cdot x \\ C\cdot z+D\cdot x=0, \text{ oder } z=n\cdot x \end{cases}$$

$$(L''')\cdots \begin{cases} A'\cdot y+B'\cdot x=0, \text{ oder } y=m'\cdot x \\ C'\cdot z+D'\cdot x=0, \text{ oder } z=n'\cdot x \end{cases},$$

wenn der Einfachheit wegen

$$-\frac{B}{A}=m,\quad -\frac{D}{C}=n,\quad -\frac{B'}{A'}=m',\quad -\frac{D'}{C'}=n'$$

gesetzt wird. Dann sucht man den Winkel $\psi$, welchen letztere Geraden unter sich bilden, und welcher der obige seyn muß.

Sind nun $\alpha, \beta, \gamma$ die 3 Winkel, welche L'' mit den 3 Axen OX, OY und OZ macht, und bedeuten $\alpha', \beta', \gamma'$ die Winkel, welche L''' mit denselben Axen macht, so hat man nach (IV.)

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+m^2+n^2}}; \quad \cos\beta = \frac{m}{\sqrt{1+m^2+n^2}};$$

$$\cos\gamma = \frac{n}{\sqrt{1+m^2+n^2}};$$

$$\cos\alpha' = \frac{1}{\sqrt{1+m'^2+n'^2}}; \quad \cos\beta' = \frac{m'}{\sqrt{1+m'^2+n'^2}};$$

$$\cos\gamma' = \frac{n'}{\sqrt{1+m'^2+n'^2}};$$

Zuletzt aber ist nach (§. 1. VII. Nr. 7.) mittelst dieser Winkel gefunden

$$\cos\psi = \frac{1+m\cdot m'+n\cdot n'}{\sqrt{1+m^2+n^2}\cdot\sqrt{1+m'^2+n'^2}}.$$

Ist daher

$$1+m\cdot m'+n\cdot n' = 0,$$

so ist $\cos\psi = 0$, d. h. $\psi = \frac{1}{2}\pi$, d. h. die Geraden L und L' stehen dann auf einander senkrecht.

VIII. Da eine Gerade L auf einer Ebene F senkrecht steht, wenn von zweien Projektionen von L jede auf dem zugehörigen Grundschnitte von F senkrecht steht, so folgt, daß die durch die beiden Gleichungen

1) $\begin{cases} a\cdot y+b\cdot x+c = 0 \\ m\cdot z+n\cdot x+g = 0 \end{cases}$

gegebene Gerade, auf der durch die Gleichung

2) $A\cdot z+B\cdot y+C\cdot x+D = 0$

vorgestellten Ebene F senkrecht stehen wird, wenn in der Ebene XOY die Projektion

$a\cdot y+b\cdot x+c = 0$ auf dem Grundschnitt $B\cdot y+C\cdot x+D = 0$ senkrecht steht, und wenn zu gleicher Zeit in der Ebene XOZ die Projektion

$m\cdot z+n\cdot x+g = 0$ auf dem Grundschnitt $A\cdot z+C\cdot x+D = 0$ senkrecht steht, also wenn nach (§. 4. III. C.)

3) $\frac{a}{b}+\frac{C}{B} = 0$ und 4) $\frac{m}{n}+\frac{C}{A} = 0$

ist.

Iſt daher eine der beiden Gleichungen (3. und 4.) nicht erfüllt, ſo ſteht die Linie L auf der Ebene F nicht ſenkrecht.

## §. 13.

I. Die Gleichung einer Kugelfläche, deren Radius $= r$ iſt, und wenn die Koordinaten-Ebenen durch ihren Mittelpunkt gelegt werden, iſt offenbar nach (§. 1. V. 4.)

1) $$z^2 + y^2 + x^2 = r^2.$$

Liegen aber die Koordinaten-Ebenen gegen den Mittelpunkt der Kugel beliebig, und ſind a, b, c die Koordinaten-Werthe dieſes Mittelpunktes, ſo iſt die Gleichung der Kugel-Oberfläche nach (§. 1. VII. 4'.)

2) $$(z-c)^2 + (y-b)^2 + (x-a)^2 = r^2.$$

Die Kugel-Fläche gehört daher zu den (algebraiſchen) Flächen der zweiten Ordnung.

II. Will man irgend einen Kreis vorſtellen, der irgend wie liegt, ſo darf man nur die Gleichung der Ebene geben, in welcher er liegt und die Gleichung einer Kugel, welche mit dem gedachten Kreiſe denſelben Radius r und denſelben Mittelpunkt hat.

Das Syſtem der beiden Gleichungen

$$\left\{\begin{array}{l} (z-c)^2 + (y-b)^2 + (x-a)^2 = r^2 \\ A\cdot(z-c) + B\cdot(y-b) + C\cdot(x-a) = 0 \end{array}\right\}$$

ſtellt alſo einen Kreis vor, deſſen Mittelpunkt die Koordinaten-Werthe a, b, c hat, deſſen Radius r iſt, und welcher in der durch die Gleichung

$$A\cdot(z-c) + B\cdot(y-b) + C\cdot(x-a) = 0$$

gegebenen Ebene liegt.

## §. 14.

### Berührungs-Ebene. Normale.

I. An jedem Punkte M einer durch die Gleichung

1) $$L_{x,y,z} = 0$$

gegebenen krummen Fläche kann man ſich eine berührende Ebene (Tangential-Ebene) denken, d. h. eine Ebene, welche durch

durch diesen Punkt M hindurchgeht, und deren ringsherum dem M nächst anliegenden Punkte, von den ringsherum nächst an M in der krummen Fläche liegenden entsprechenden Punkten weniger weit abstehen, als dies bei jeder andern durch M gelegten Ebene der Fall seyn würde.

Man kann aber analog mit der für die Kurven festgestellten Ansicht, die Tangential-Ebene als die Verlängerung eines der unendlich vielen unendlich kleinen ebenen Elemente betrachten, welche die krumme Fläche bilden.

Um diese berührende Ebene zu finden, bezeichne man die Koordinaten-Werthe eines beliebigen ihrer Punkte durch $x'$, $y'$, $z'$, so ist ihre Gleichung, da sie durch den Punkt der Fläche L gehen soll, dessen Koordinaten-Werthe x, y, z seyn mögen, nach (§. 11. V.) nothwendig von der Form

2) $A \cdot (z' - z) + B \cdot (y' - y) + C \cdot (x' - x) = 0,$

wo z von x und y abhängig ist, und die durch die Gleichung (1.) gegebene Funktion $z_{x,y}$ von x und y vorstellt, während $z'$ von $x'$ und $y'$ abhängig, und die durch die Gleichung (2.) gegebene Funktion von $x'$ und $y'$ ist, welche durch $z'_{x',y'}$ bezeichnet seyn mag.

Da nun die Ebene (2.) drei nächst neben einander liegende und eine Ebene bildende Punkte mit der krummen Fläche $L_{x,y,z} = 0$ oder $z = z_{x,y}$ gemein haben soll, so muß

$$z'_{x,y} - z_{x,y} = 0$$

seyn, für 3 nächst an einander liegende zusammengehörige Werthe von x und y und eben deshalb muß nach (Analys. §. 20. Nr. 11.) nicht bloß

$$z'_{x,y} - z_{x,y} = 0$$

seyn, welche Gleichung mit der Gleichung (2.) zusammen fällt, sondern es muß auch noch

$$\partial(z'_{x,y} - z_{x,y})_x = 0$$

und $$\partial(z'_{x,y} - z_{x,y})_y = 0$$

seyn; d. h. es muß noch seyn

3) $\partial z'_x = \partial z_x$, 4) $\partial z'_y = \partial z_y$.

Nun giebt aber die Gleichung (2.), wenn man sie nach $x'$

und dann nach $y'$ differenziirt, und nachgehends x und y bezüglich statt $x'$ und $y'$ substituirt, um das zu erhalten, was wir hier kurz durch $\partial z'_x$ und $\partial z'_y$ bezeichnet haben,

$$A \cdot \partial z'_y + B = 0,$$
$$A \cdot \partial z'_x + C = 0.$$

Dadurch gehen die Gleichungen (3. u. 4.) über in

5) $\quad A \cdot \partial z_y + B = 0, \quad A \cdot \partial z_x + C = 0;$

und diese zwei Gleichungen bestimmen nun die Koeffizienten B und C, so daß, wenn man diese Werthe in die Gleichung (2.) substituirt, die Gleichung der berührenden Ebene

$(\odot) \cdots \quad (z' - z) - \partial z_y \cdot (y' - y) - \partial z_x \cdot (x' - x) = 0$

wird.

Differenziirt man die Gleichung (1.) nach allem x und nach allem y, so erhält man noch

6) $\partial L_x + \partial L_z \cdot \partial z_x = 0, \quad$ 7) $\partial L_y + \partial L_z \cdot \partial z_y = 0;$

und findet man hieraus $\partial z_x$, $\partial z_y$, so nimmt die Gleichung $(\odot)$ der berührenden Ebene auch noch diese Form an:

$(\mathbb{C}) \cdots \quad \partial L_x \cdot (z' - z) + \partial L_y \cdot (y' - y) + \partial L_x \cdot (x' - x) = 0$ *).

II. Die durch M hindurchgehende auf der Tangential-Ebene senkrechte Gerade heißt die Normale der krummen Fläche an dem Punkte M. — Ihre Gleichungen sind daher nach (§. 12. VIII.)

$$(\odot) \cdots \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial z_x \cdot (z'' - z) + (x'' - x) = 0 \\ \partial z_y \cdot (z'' - z) + (y'' - y) = 0 \end{array} \right\},$$

oder

$$(\mathbb{C}) \cdots \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial L_x \cdot (z'' - z) - \partial L_z \cdot (x'' - x) = 0 \\ \partial L_y \cdot (z'' - z) - \partial L_z \cdot (y'' - y) = 0 \end{array} \right\}.$$

---

*) Es ist aus dem Verfahren des (§. 7.) einleuchtend, wie man dieselben Resultate auch aus der zuerst gegebenen Definition der Tangential-Ebene ableiten kann. Man muß nämlich dann den Unterschied

$$z'_{x+h,y+k} - z_{x+h,y+k}$$

kleinst möglich machen, und dies erfordert wieder, daß man

1) $\quad z'_{x,y} = z_{x,y}$

und dann noch

2) $\quad \partial z'_x = \partial z_x, \quad$ so wie $\quad$ 3) $\quad \partial z'_y = \partial z_y$

macht.

wenn $x''$, $y''$, $z''$ die Koordinaten-Werthe eines völlig beliebigen Punktes dieser Normale sind.

Und sind $\lambda$, $\mu$, $\nu$ die Winkel, welche diese Normale mit den 3 Axen OX, OY, OZ (oder mit den durch M gelegten Parallelen) macht, so findet sich hieraus, nach (§. 12. IV.)

$$\cos\lambda = \frac{-\partial z_x}{\sqrt{1+\partial z_x^2+\partial z_y^2}} = \frac{\partial L_x}{W},$$

$$\cos\mu = \frac{-\partial z_y}{\sqrt{1+\partial z_x^2+\partial z_y^2}} = \frac{\partial L_y}{W},$$

$$\cos\nu = \frac{1}{\sqrt{1+\partial z_x^2+\partial z_y^2}} = \frac{\partial L_z}{W},$$

wenn $W = \sqrt{\partial L_x^2+\partial L_y^2+\partial L_z^2}$ gesetzt wird.

III. Sucht man eine, die Fläche L in dem Punkte M berührende Kugel, so sucht man die Koordinaten-Werthe a, b, c ihres Mittelpunktes und ihren Radius r, der Bedingung gemäß, daß die durch die Gleichung

$$(z'-c)^2+(y'-b)^2+(x'-a)^2 = r^2$$

vorgestellte Kugel durch den Punkt M gehe, und in M mit der krummen Fläche einerlei Tangential-Ebene habe, also daß für $x' = x$ und $y' = y$ erstlich $z' = z$, aber auch

$$\partial z'_{x'} = \partial z_x, \quad \partial z'_{y'} = \partial z_y$$

werde. Dies giebt zur Bestimmung von a, b, c und r die Gleichung

1) $(z-c)^2+(y-b)^2+(x-a)^2 = r^2$,

und deren beiden Differenzial-Gleichungen (nach x und nach y), nämlich

2) $(z-c)\cdot\partial z_x+(x-a) = 0$

und 3) $(z-c)\cdot\partial z_y+(y-b) = 0$.

Es bestimmen sich also aus den Gleichungen (1.—3.) zu jedem beliebigen Radius r, die Koordinaten-Werthe a, b, c des Mittelpunktes dieser Kugeln. Es giebt daher an der Stelle M einer Fläche L unzählig viele berührende Kugeln.

Weil aber die Gleichungen (2. u. 3.) von den Gleichungen II. ⊙.) der Normale an M nicht verschieden sind, wenn dort

a, b, c statt bezüglich $x''$, $y''$, $z''$ gesetzt werden, so folgt, daß alle diese berührenden Kugeln ihre Mittelpunkte in der zu der Stelle M der Fläche L gehörigen Normale haben.

Legt man durch die Normale eine Ebene, so wird sie mit der Fläche L einen Schnitt bilden, welcher eine ebene Kurve ist, die dieselbe Normale hat. Dieselbe Ebene schneidet alle berührenden Kugeln in größten Kreisen, welche alle diese ebene Kurve berühren. Unter diesen Kreisen ist dann auch der Krümmungs-Kreis, d. h. derjenige, welcher mit der gedachten ebenen Kurve eine Berührung der zweiten Ordnung hat *).

## §. 15.

### Quadratur der krummen Flächen und Kubatur der Körper.

I. Denkt man sich in einer durch die Gleichung

1) $\qquad L_{x,y,z} = 0 \quad$ oder $\quad z = z_{x,y}$

gegebenen Fläche einen Punkt M, dessen 3 Koordinaten-Werthe x, y, z seyn mögen, — denkt man sich nun die Koordinaten x und y bezüglich um dx und dy wachsend, und durch den zu x, y gehörigen Punkt M, so wie auch durch den zu x+dx, y+dy gehörigen Punkt N, Ebenen parallel mit den Ebenen XOZ und YOZ gelegt, so bilden diese 4 Ebenen eine Art von Parallelepipedum, dessen Grundfläche dx·dy ist, welches die 4

*) Man kann auch unter allen durch die Normale zu legenden Ebenen die beiden suchen, in welchen der Krümmungs-Halbmesser der durch sie mit der Fläche L gebildeten ebenen Durchschnitts-Kurven der größte und der kleinste wird. Man findet dann, daß immer die Flächen dieser beiden Kreise auf einander senkrecht stehen, und daß, wenn man von einem Punkte M der Oberfläche ausgeht und diejenigen nächst anliegenden Punkte sucht, deren zugehörige Normale die zum Punkte M gehörige Normale schneidet, solche allemal nur in der Richtung des größten und des kleinsten Krümmungs-Kreises an M liegen.

Sucht man auf diese Weise die Reihe nächst anliegender Punkte, deren je zwei auf einander folgende die Eigenschaft haben, daß ihre zugehörigen Normalen (in einer und derselben Ebene liegen, also) sich schneiden, so erhält man die beiden zu dem Punkte M, von welchem man ausgegangen ist, gehörigen Krümmungs-Linien auf der krummen Fläche.

Kanten $z_{x,y}$; $z_{x+dx,y}$, $z_{x,y+dy}$ und $z_{x+dx,y+dy}$ hat, und welches oben durch ein vierseitiges Stück der krummen Fläche begrenzt wird. — Denkt man sich dieses obere Stück der krummen Fläche bei seinen unendlich kleinen Dimensionen als eben, und natürlich dann mit der Tangential-Ebene an M zusammenfallend; ist dann $\lambda$ der Winkel, welchen diese Tangential-Ebene mit der Ebene XOY macht, und bezeichnet man dieses unendlich kleine Stückchen der krummen Fläche durch E, so hat man, weil $dx \cdot dy$ die Projektion von E auf die Ebene XOY ist, nach (§. 2. III.)

2) $$E \cdot \cos\lambda = dx \cdot dy, \text{ oder } E = \frac{1}{\cos\lambda} \cdot dx \cdot dy;$$

dabei aber nach (§. 14. ⊙ und §. 11. Anmerk.)

3) $$\cos\lambda = \frac{1}{\sqrt{1 + \partial z_x^2 + \partial z_y^2}},$$

so daß dieses unendlich kleine Stück der krummen Fläche

4) $$E = \sqrt{1 + \partial z_x^2 + \partial z_y^2} \cdot dx \cdot dy$$

wird, daher unendlich klein von der zweiten Ordnung ist.

Dann drückt aber nach (Analys. §. 35.) das Integral von (4.) nach y genommen, nämlich

(⊙) ... $$dx \cdot \int_{y'}^{y''} \sqrt{1 + \partial z_x^2 + \partial z_y^2} \cdot dy$$

die Summe aller dieser Stückchen der krummen Fläche aus, welche dasselbe x haben, welche also den unendlich schmalen Streifen bilden, der zwischen den beiden, durch M und N hindurchgehenden mit der YOZ parallelen Ebenen liegt, und dessen Projektion auf die Ebene XOY von dem kleinsten Grenzwerth $y'$ an, bis zu dem größten Grenzwerth $y''$ hin sich erstreckt, während diese Grenzwerthe von y, nämlich $y'$ und $y''$, irgend wie gegeben und entweder nach x konstant, oder selber wieder Funktionen von x, immer aber die Koordinaten-Werthe der Projektionen der Kurven sind (auf die Ebene XOY), welche die krumme Fläche begrenzen und welche beliebig gegeben seyn können.

Zuletzt drückt dann, nach demselben angeführten Satze (Analysis §. 35.) das Integral des Ausdrucks (⊙), nach x, also das zweite Integral,

$$(\odot)\cdots \int_{x''\div x'}\left(\int_{y''\div y'}\sqrt{1+\partial z_x{}^2+\partial z_y{}^2}\cdot dy\right)\cdot dx$$

die Summe aller dieser Streifen, also das ganze Stück der krummen Oberfläche aus, dessen Projektion auf die Ebene XOY in der Richtung der y zwischen den Grenzwerthen von y, $y'$ und $y''$, in der Richtung der x aber zwischen den Grenzwerthen $x'$ und $x''$ von x ausgestreckt liegt. —

Der Inhalt eines jeden solchen Stückes der krummen Fläche, also auch der gesammten krummen Fläche, wird daher jedesmal durch doppelte Integration gefunden, wobei man nicht übersehen darf, daß die Funktion $z_{x,y}$ der Werth von z ist, wie sich solcher für z aus der Auflösung der gegebenen Gleichung

$$L_{x,y,z} = 0$$

der krummen Fläche ergiebt. Man findet aber aus z als Funktion von x und y, die Ausdrücke $\partial z_x$, $\partial z_y$, wenn man diese Funktion $z_{x,y}$ nach x oder nach y differenziirt. — Auch ist noch

$$\partial L_x + \partial L_z\cdot\partial z_x = 0,\quad \partial L_y + \partial L_z\cdot\partial z_y = 0,$$

woraus man ebenfalls $\partial z_x$ und $\partial z_y$ finden kann, aber in x, y und z selbst wieder ausgedrückt, so daß man statt z erst wieder den aus $L = 0$ dafür gefundenen Werth $z_{x,y}$ substituiren muß, um auf diesem Wege ebenfalls $\partial z_x$ und $\partial z_y$ als bloße Funktionen von x und von y hergestellt zu haben, wie solche in der Formel $(\odot)$ gebraucht werden *).

*) Setzt man statt $L_{x,y,z} = 0$ bloß $z = 0$, so fällt die Fläche L mit der Ebene XOY zusammen. Dann ist aber auch $\partial z_x = 0$, $\partial z_y = 0$; also der Inhalt $= \int_{x''\div x'}\left(\int_{y''\div y'} 1\cdot dy\right)\cdot dx$, wie solches schon im (§. 6. III.) gefunden worden.

Wollte man sagen, daß die Fläche E in (4.) nicht genau ist, so kann sie doch von dem daselbst gefundenen Ausdruck höchstens nur um ein Unendlich-Kleines einer höhern als der zweiten Ordnung verschieden sein (vgl. §. 6. III.); dann wäre der Ausdruck (C) von dem Streifen auch nur um ein Unendlich-Kleines einer höhern als der ersten Ordnung verschieden. Und zuletzt wäre der Ausdruck $(\odot)$ von dem Inhalt der ganzen Oberfläche doch höchstens nur um ein Unendlich-Kleines der ersten Ordnung verschieden, also nach (Analys. §. 20. Nr. 12.) nicht verschieden.

II. Will man den Inhalt des Körpers finden, welcher von der Fläche

1) $L_{x,y,z} = 0$

und von der Koordinaten-Ebene XOY übrigens irgend wie begrenzt ist, so ist

2) $z_{x,y} \cdot dx \cdot dy$

der Inhalt des in (I.) gedachten Körperchens, dessen Grundfläche $dx \cdot dy$ ist und dessen Höhen-Kanten zwar ungleich aber von z nur um Unendlich-Kleine verschieden sind. Daher ist das Integral von (2.) nach y genommen, nämlich

$$(\mathbb{C})\cdots \qquad dx \cdot \int_{y''\div y'} z_{x,y} \cdot dy$$

der Inhalt der Scheibe, welche ein und dasselbe x und die Dicke dx hat, und die sich längs der y hin bis an die beiden Grenzwerthe $y'$ und $y''$ von y, erstreckt, übrigens aber von der Fläche L begrenzt ist. — Und zuletzt ist das Integral von ($\mathbb{C}$) nach x genommen, also das zweite Integral

$$(\odot)\cdots \qquad \int_{x''\div x'} \left( \int_{y''\div y'} z_{x,y} \cdot dy \right) \cdot dx,$$

die Summe aller dieser von $x = x'$ bis $x = x''$ liegenden Scheiben, d. h. der Inhalt des Körpers, der von der Ebene XOY, von der Fläche L, von zweien zu $x = x'$ und $x = x''$ gehörigen, auf OX senkrechten Ebenen, und außerdem noch durch diejenigen Grenzen begrenzt ist, welche die Grenzwerthe $y'$ und $y''$ geliefert haben.

Will man dasselbe noch allgemeiner darstellen, so denkt man sich an einer beliebigen Stelle im Innern des Körpers, deren Koordinaten-Werthe x, y und z sind, ein rechtwinkliches Parallelepipedum $dx \cdot dy \cdot dz$. — Dann ist das Integral hiervon nach z genommen, nämlich

1) $dx \cdot dy \cdot \int_{z''\div z'} 1 \cdot dz$

der Inhalt des unendlich kleinen Körperchens, dessen Querschnitt $dx \cdot dy$ ist, und welches sich in die Höhe und in die Tiefe bis zu den Grenzwerthen von z, welche durch $z'$ und $z''$ bezeichnet sind, erstreckt. (Von diesen Grenzwerthen kann der eine $z'$ durch

eine Gleichung $L_{x,y,z'} = 0$, der andere $z''$ durch eine andere Gleichung $L'_{x,y,z''} = 0$, oder durch dieselbe Gleichung $L_{x,y,z''} = 0$ als ein zweiter Werth von $z'$ gegeben seyn, so daß hier $z'$ und $z''$ bezüglich das bedeuten, was in der Gleichung der begrenzenden Fläche kurz vorher durch z bezeichnet worden war. (Vergl. §. 6. III.). — Hernach ist das zweite Integral

2) $$dx \cdot \int_{y'\div y'} \left( \int_{z'\div z'} 1 \cdot dz \right) \cdot dy$$

die Summe aller dieser Körperchen, wie sie zu demselben x gehören, dieselbe Breite dx haben, aber eine Schicht bilden, welche in der Richtung der y durch die beiden Grenzwerthe $y'$ und $y''$ (von y) begrenzt sind. — Endlich ist das dritte Integral

3) $$\int_{x'\div x''} \left[ \int_{y'\div y'} \left( \int_{z'\div z'} 1 \cdot dz \right) \cdot dy \right] \cdot dx$$

der Inhalt des Körpers, der aus der Summe aller dieser in der Richtung der x neben einander liegenden Schichten von $x = x'$ bis $x = x''$ hin liegend, besteht *).

III. Nimmt man dagegen die Polar-Koordinaten (§. 3. VII. A.) für einen beliebigen Punkt M im Innern des Körpers, nämlich den Winkel $\theta$, welchen die Ebene MOX mit der XOY macht, dann den Winkel $MOX = \varphi$, so wie $MO = r$, so daß man

$$x = r \cdot \cos\varphi, \quad y = r \cdot \sin\varphi \cdot \cos\theta \text{ und } z = r \cdot \sin\varphi \cdot \sin\theta$$

hat, wo $\varphi$ alle Werthe von 0 bis $\pi$, dagegen $\theta$ alle Werthe von 0 bis $2\pi$ haben kann; und denkt man sich wiederum $\theta$, $\varphi$ und r bezüglich um die unendlich kleinen $d\theta$, $d\varphi$ und dr wachsend, und dadurch bei M ein Körperchen gebildet, dessen drei unendlich kleine Kanten dr, $r \cdot d\varphi$, $r \cdot \sin\varphi \cdot d\theta$ sind, so ist dessen Inhalt wiederum das Produkt dieser 3 Kanten, also

*) Dieselbe Bemerkung, welche in der Note zu (I.) gemacht wurde, muß hier wiederholt werden. Wenn daher der Ausdruck (3) der Inhalt des Körpers nicht wäre, so wäre er doch von diesem Inhalte nur um ein Unendlich-Kleines der ersten Ordnung verschieden, d. h. nach (§. 20. Anal.) nicht verschieden.

$= r^2 \cdot \sin\varphi \cdot dr \cdot d\varphi \cdot d\theta$ *).

Also ist das Integral hievon, nach r genommen, nämlich

1) $\sin\varphi \cdot d\varphi \cdot d\theta \cdot \int_{R\div 0} r^2 \cdot dr$

der Inhalt des vierseitigen pyramidenähnlichen Körperchens, dessen Spitze in O, dessen Basis in der Fläche L liegt, und welcher durchaus denselben Winkeln $\varphi$ und $\theta$ angehört.

Dann ist das zweite Integral von (1.), nach $\varphi$ genommen, also das Integral

2) $d\theta \cdot \int_{\varphi\div 0} \sin\varphi \cdot \left(\int_{R\div 0} r^2 \cdot dr\right) \cdot d\varphi$,

die Summe aller dieser Körperchen, wie sie um O herum eine kreisförmige Scheibe bilden, deren Schärfe rechts und links von O in der Axe OX liegt, und welche durchaus zu demselben $\theta$ gehört. Endlich ist das dritte Integral

3) $\int_{2\pi\div 0} \left[\int_{\pi\div 0} \sin\varphi \cdot \left(\int_{R\div 0} r^2 \cdot dr\right) \cdot d\varphi\right] \cdot d\theta$

die Summe aller dieser Scheiben, wie solche von der Ebene XOY, rings um die Axe OX (und ihre rückwärtsgehende Verlängerung) von der Ebene XOY an bis wieder zu derselben Ebene hin sich ausbreiten, d. h. der Inhalt des ganzen von der Fläche L begrenzten Körpers **).

Anmerk. 1. Man kann vorläufig noch Folgendes bemerken: In den Ausführungen der Rechnungen können die Funktionen, deren Integrale genommen werden sollen, innerhalb der Grenzen die Form $\frac{1}{0}$ annehmen, oder imaginär werden. Dies wäre ein

*) Das Körperchen liegt zwischen den zu den Radien r und $r+dr$ gehörigen Kugelflächen, und hat die 4 Kanten, welche zu den 4 Winkel-Paaren $(\theta, \varphi)$, $(\theta+d\theta, \varphi)$, $(\theta, \varphi+d\varphi)$ und $(\theta+d\theta, \varphi+d\varphi)$ gehören. Wenn daher im Texte sein Inhalt wie der eines rechtwinklichen Parallelepipedums berechnet worden ist, so weicht das Resultat, wie sich leicht übersehen läßt, vom wahren Inhalt nur um ein Unendlich-Kleines einer höhern als der dritten Ordnung ab.

**) Auch hier muß, wie bisher immer, bemerkt werden, daß, wenn der Ausdruck (3.) den Inhalt nicht genau giebt, so ist er doch von dem wahren Inhalt nur um ein Unendlich-Kleines der ersten Ordnung, also nach (§. 20. Analys.) gar nicht verschieden.

Beweis, daß innerhalb dieser Grenzen kein Gesammt-Körper, oder keine Gesammt-Oberfläche liegt. (Diese Bemerkung ist auch dem §. 6. anzufügen.)

Anmerk. 2. Zu gleicher Zeit darf man nicht aus den Augen lassen, daß in vielen Anwendungen die einzelnen Integrationen zwischen andern Grenzen genommen werden müssen, als die hier angegebenen, nämlich jedesmal zwischen denjenigen Grenzen, bis zu denen der Körper sich erstrekkt, oder bis wie weit man seinen Inhalt finden will. Das vorstehende kann also nur als Type betrachtet werden, nach welcher überhaupt die Inhalts-Bestimmungen vor sich gehen können. — Näheres und sehr ausführliches hierüber wird man im (II. Theile, im 6. u. 7. Kapitel) finden.

## §. 16.

### Von den Linien doppelter Krümmung.

I. Sind, zwei solche Gleichungen gegeben, wie $L=0$, nämlich

1) $L_{x,y,z} = 0$ und 2) $L'_{x,y,z} = 0$,

von denen jede für sich eine krumme Fläche vorstellt; läßt man aber beide Gleichungen nur für gemeinschaftliche Werthe von x, y und z gelten, so daß y und z als zwei durch diese Gleichungen (1. u. 2.) gegebene Funktionen von x betrachtet werden, so hat man eine doppelt gekrümmte Linie vorgestellt, nämlich die Durchschnitts-Linie der beiden Flächen L und L' *).

Eliminirt man aus den beiden Gleichungen (1. u. 2.) einmal z, dann auch y, so daß die 2 neuen Gleichungen

3) $W_{x,y} = 0$ und 4) $W'_{x,z} = 0$

entstehen, so stellen diese Gleichungen (3. u. 4.) zwei Projektionen der doppelt gekrümmten Linie vor, die eine auf die Ebene XOY, die andere auf die Ebene XOZ gedacht.

II. Umgekehrt: sind zwei Gleichungen gegeben:

1) $F_{x,y} = 0$ und 2) $F'_{x,z} = 0$,

*) Ist L' eine ebene Fläche, so ist die vorgestellte Kurve eine ebene Kurve (einfach gekrümmt). — Sind L und L' alle beide ebene Flächen, so ist die durch die Gleichungen (1. u. 2.) vorgestellte Linie eine gerade.

die erstere ohne z, die andere ohne y, so stellen sie zwei ebene Kurven vor, die eine in der Ebene XOY, die andere in der Ebene XOZ. — Denkt man sich aber jede dieser Gleichungen als eine Gleichung zwischen x, y, z, in der die z oder die y nur zufällig mit Null-Koeffizienten versehen erscheinen, so stellt jede dieser Gleichungen eine krumme Cylinder-Fläche *) ohne Ende vor, welche bezüglich auf der Ebene XOY oder XOZ senkrecht steht, d. h. deren neben einander liegenden, die krumme Fläche bildenden Geraden auf diesen Ebenen XOY oder XOZ senkrecht stehen. Und beide Gleichungen $F = 0$ und $F' = 0$ in Verbindung (d. h. wenn man nur die Koordinaten-Werthe im Auge hat, welche beiden Gleichungen $F = 0$ und $F' = 0$ zu gleicher Zeit genügen) stellen dann wieder eine doppelt gekrümmte Linie vor, nämlich die Durchschnitts-Linie dieser beiden Cylinder-Flächen; und dabei sind $F = 0$ und $F' = 0$ die beiden Projektionen dieser doppelt gekrümmten Linie auf die Ebenen XOY und XOZ.

III. Bezeichnet man den Bogen einer doppelt gekrümmten Kurve von $x = x$ bis zu $x = x$ hin durch s, und denkt man sich nun x um dx wachsend, so daß auch y und z bezüglich um dy und dz wachsen, so wächst auch der Bogen s um ds, und nach der im (§. 6. III. Note) bereits näher entwikkelten Ansicht, kann man das Stück ds als geradlinig ansehen; und man hat dann nach (§. 1. VII. 4'.)

1) $$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

oder, weil nach (§. 21. Analys.)

$$dy = \partial y_x \cdot dx, \quad dz = \partial z_x \cdot dx, \quad ds = \partial s_x \cdot dx$$

ist,

2) $$ds = \sqrt{1 + \partial y_x^2 + \partial z_x^2} \cdot dx,$$

3) $$\partial s_x = \sqrt{1 + \partial y_x^2 + \partial z_x^2},$$

*) Das Wort Cylinder-Fläche im allgemeinsten Sinne gedacht, nach welcher die krumme Fläche darunter verstanden wird, welche entsteht, wenn eine unendliche Gerade längs einer Kurve hinbewegt wird, dabei aber immer mit sich oder mit irgend einer festen Geraden parallel bleibt.

also 4) $s = \int_{x\div\iota} \sqrt{1+\partial y_x^2+\partial z_x^2}\cdot dx,$

so daß man hiernach die Länge eines solchen Bogens s findet, indem man aus den für die doppelt gekrümmte Kurve gegebenen beiden Gleichungen, y und z als Funktionen von x herstellt, daraus $\partial y_x$, $\partial z_x$ findet, und diese Werthe in (4.) substituirt, nachgehends aber nach allem x integrirt.

Denkt man sich x selbst, also dann auch y und z, als Funktionen von t, so erhält man nach (§. 16. Analys.) und (§. 21. Analys.)

(♂) ... $ds = \partial s_t \cdot dt$, $dx = \partial x_t \cdot dt$, $dy = \partial y_t \cdot dt$, $dz = \partial z_t \cdot dt$,

also noch, wenn man diese Werthe in obige (1.) substituirt,

5) $\partial s_t = \sqrt{\partial x_t^2+\partial y_t^2+\partial z_t^2}$,

also 6) $s = \int_{t\div\iota} \sqrt{\partial x_t^2+\partial y_t^2+\partial z_t^2}\cdot dt,$

wo t' der Werth von t ist, der $x_t = x$ macht, nach (Analys. §. 37. II.).

IV. Verlängert man das Element ds, so hat man die Tangente dieser doppelt gekrümmten Kurve. Sind $\alpha, \beta, \gamma$ die Winkel, welche sie mit den Koordinaten-Axen OX, OY, OZ macht, so findet sich nach (§. 1. VII.)

1) $\cos\alpha = \frac{dx}{ds}$, $\cos\beta = \frac{dy}{ds}$, $\cos\gamma = \frac{dz}{ds}$,

oder, in so ferne sich nach (III. ♂) die unendlich kleinen Zuwachse dx, dy, dz, ds, wie die durch $\partial x_t$, $\partial y_t$, $\partial z_t$, $\partial s_t$ bezeichneten Funktionen von t verhalten, welche letztere wir bequemer noch bloß $\partial x$, $\partial y$, $\partial z$, $\partial s$ schreiben wollen,

2) $\cos\alpha = \frac{\partial x}{\partial s}$, $\cos\beta = \frac{\partial y}{\partial s}$, $\cos\gamma = \frac{\partial z}{\partial s}$,

während nach (III. 5.)

3) $\partial s^2 = \partial x^2+\partial y^2+\partial z^2$

ist.

Projicirt man diese geradlinige Tangente auf die Ebene XOY, so geht diese Projektion durch die Punkte (x, y) und (x+dx,

$y+dy$); ihre Gleichung ist daher, wenn $x'$, $y'$, $z'$ die Koordinaten-Werthe eines jeden Punktes der Tangente vorstellen,

$$\frac{y'-y}{x'-x} = \frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial x} = \partial y_x,$$

oder

$$4) \quad \begin{cases} (y'-y)\cdot\partial x-(x'-x)\cdot\partial y = 0, \\ \text{oder} \\ (y'-y) = \partial y_x\cdot(x'-x). \end{cases}$$

Eben so ist die Gleichung der Projektion derselben Tangente auf die Ebene XOZ diese:

$$5) \quad \begin{cases} (z'-z)\cdot\partial x-(x'-x)\cdot\partial z = 0, \\ \text{oder} \\ (z'-z) = \partial z_x\cdot(x'-x). \end{cases}$$

Diese beiden Gleichungen (4. u. 5.) sind daher nach (§. 12. II.) die Gleichungen zwischen den Koordinaten-Werthen $x'$, $y'$, $z'$ eines beliebigen Punktes unserer Tangente an die doppelt gekrümmte Linie *).

---

*) Diese Gleichungen der geradlinigen Tangente an die Kurve kann man auch dadurch finden, daß man an beide krumme Flächen

1) $L_{x,y,z} = 0$ und 2) $L'_{x,y,z} = 0$,

deren Durchschnitt unsere doppelt gekrümmte Kurve bildet, Tangential-Ebenen legt, deren Gleichungen nach (§. 14. I. (.) folgende sind:

3) $\partial L_x\cdot(x'-x)+\partial L_y\cdot(y'-y)+\partial L_z\cdot(z'-z) = 0$,

4) $\partial L'_x\cdot(x'-x)+\partial L'_y\cdot(y'-y)+\partial L'_z\cdot(z'-z) = 0$.

Die Durchschnitts-Linie dieser Tangential-Ebenen, also die durch diese Gleichungen (3. u. 4.) vorgestellte Gerade ist offenbar die geradlinige Tangente der Kurve an dem Punkte $(x, y, z)$.

Die Uebereinstimmung dieser Gleichungen (3. u. 4.) mit den obigen (4. u. 5.) des Textes weist sich so nach: Man differenziirt die Gleichungen (1. u. 2.) nach allem $x$, so daß man erhält

$$\partial L_x+\partial L_y\cdot\partial y_x+\partial L_z\cdot\partial z_x = 0,$$
$$\partial L'_x+\partial L'_y\cdot\partial y_x+\partial L'_z\cdot\partial z_x = 0;$$

setzt hier herein statt $\partial y_x$, $\partial z_x$ die Werthe, wie solche aus den Gleichungen des Textes (4. u. 5.) sich ergeben, nämlich $\frac{y'-y}{x'-x}$ statt $\partial y_x$, und $\frac{z'-z}{x'-x}$ statt $\partial z_x$; und man erhält die Gleichungen (3. u. 4.) dieser Note.

also 4) $s = \int_{x \div f} \sqrt{1 + \partial y_x^2 + \partial z_x^2} \cdot dx,$

so daß man hiernach die Länge eines solchen Bogens s findet, indem man aus den für die doppelt gekrümmte Kurve gegebenen beiden Gleichungen, y und z als Funktionen von x herstellt, daraus $\partial y_x$, $\partial z_x$ findet, und diese Werthe in (4.) substituirt, nachgehends aber nach allem x integrirt.

Denkt man sich x selbst, also dann auch y und z, als Funktionen von t, so erhält man nach (§. 16. Analys.) und (§. 21. Analys.)

(δ) ... $ds = \partial s_t \cdot dt$, $dx = \partial x_t \cdot dt$, $dy = \partial y_t \cdot dt$, $dz = \partial z_t \cdot dt$,

also nach, wenn man diese Werthe in obige (1.) substituirt,

5) $\partial s_t = \sqrt{\partial x_t^2 + \partial y_t^2 + \partial z_t^2}$,

also 6) $s = \int_{t \div v} \sqrt{\partial x_t^2 + \partial y_t^2 + \partial z_t^2} \cdot dt,$

wo t der Werth von t ist, der $x_t = x$ macht, nach (Analys. §. 37. II.).

IV. Verlängert man das Element ds, so hat man die Tangente dieser doppelt gekrümmten Kurve. Sind $\alpha, \beta, \gamma$ die Winkel, welche sie mit den Koordinaten-Axen OX, OY, OZ macht, so findet sich nach (§. 1. VII.)

1) $\cos\alpha = \frac{dx}{ds}$, $\cos\beta = \frac{dy}{ds}$, $\cos\gamma = \frac{dz}{ds}$,

oder, in so ferne sich nach (III. δ) die unendlich kleinen Zuwachse dx, dy, dz, ds, wie die durch $\partial x_t$, $\partial y_t$, $\partial z_t$, $\partial s_t$ bezeichneten Funktionen von t verhalten, welche letztere wir bequemer noch bloß $\partial x$, $\partial y$, $\partial z$, $\partial s$ schreiben wollen,

2) $\cos\alpha = \frac{\partial x}{\partial s}$, $\cos\beta = \frac{\partial y}{\partial s}$, $\cos\gamma = \frac{\partial z}{\partial s}$,

während nach (III. 5.)

3) $\partial s^2 = \partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2$

ist.

Projicirt man diese geradlinige Tangente auf die Ebene XOY, so geht diese Projektion durch die Punkte (x, y) und (x + dx,

$y+dy$); ihre Gleichung ist daher, wenn $x'$, $y'$, $z'$ die Koordinaten-Werthe eines jeden Punktes der Tangente vorstellen,

$$\frac{y'-y}{x'-x} = \frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial x} = \partial y_x,$$

oder

$$4)\quad \begin{cases} (y'-y)\cdot\partial x-(x'-x)\cdot\partial y = 0, \\ \text{oder} \\ (y'-y) = \partial y_x\cdot(x'-x). \end{cases}$$

Eben so ist die Gleichung der Projektion derselben Tangente auf die Ebene XOZ diese:

$$5)\quad \begin{cases} (z'-z)\cdot\partial x-(x'-x)\cdot\partial z = 0, \\ \text{oder} \\ (z'-z) = \partial z_x\cdot(x'-x). \end{cases}$$

Diese beiden Gleichungen (4. u. 5.) sind daher nach (§. 12. II.) die Gleichungen zwischen den Koordinaten-Werthen $x'$, $y'$, $z'$ eines beliebigen Punktes unserer Tangente an die doppelt gekrümmte Linie *).

---

*) Diese Gleichungen der geradlinigen Tangente an die Kurve kann man auch dadurch finden, daß man an beide krumme Flächen

1) $L_{x,y,z} = 0$ und 2) $L'_{x,y,z} = 0$,

deren Durchschnitt unsere doppelt gekrümmte Kurve bildet, Tangential-Ebenen legt, deren Gleichungen nach (§. 14. I. C) folgende sind:

3) $\partial L_x\cdot(x'-x)+\partial L_y\cdot(y'-y)+\partial L_z\cdot(z'-z) = 0$,

4) $\partial L'_x\cdot(x'-x)+\partial L'_y\cdot(y'-y)+\partial L'_z\cdot(z'-z) = 0$.

Die Durchschnitts-Linie dieser Tangential-Ebenen, also die durch diese Gleichungen (3. u. 4.) vorgestellte Gerade ist offenbar die geradlinige Tangente der Kurve an dem Punkte $(x, y, z)$.

Die Uebereinstimmung dieser Gleichungen (3. u. 4.) mit den obigen (4. u. 5.) des Textes weist sich so nach: Man differenzirt die Gleichungen (1. u. 2.) nach allem $x$, so daß man erhält

$$\partial L_x+\partial L_y\cdot\partial y_x+\partial L_z\cdot\partial z_x = 0,$$
$$\partial L'_x+\partial L'_y\cdot\partial y_x+\partial L'_z\cdot\partial z_x = 0;$$

setzt hier herein statt $\partial y_x$, $\partial z_x$ die Werthe, wie solche aus den Gleichungen des Textes (4. u. 5.) sich ergeben, nämlich $\frac{y'-y}{x'-x}$ statt $\partial y_x$, und $\frac{z'-z}{x'-x}$ statt $\partial z_x$; und man erhält die Gleichungen (3. u. 4.) dieser Note.

Steht irgend eine Gerade, welche mit den Axen die Winkel $\varepsilon$, $\varepsilon'$ und $\varepsilon''$ macht, senkrecht auf dieser Tangente, so ist allemal nach (§. 1. VII. 8.)

$$\cos\varepsilon\cdot\cos\alpha+\cos\varepsilon'\cdot\cos\beta+\cos\varepsilon''\cdot\cos\gamma=0,$$

daher auch, wenn man statt $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ ihre Werthe aus (1.) setzt

6) $$\cos\varepsilon\cdot\partial x+\cos\varepsilon'\cdot\partial y+\cos\varepsilon''\cdot\partial z=0.$$

V. Auf diese Tangente kann man durch den Punkt (x, y, z) eine Normal-Ebene legen, d. h. eine Ebene, die auf der Tangente senkrecht steht. Die Gleichung dieser Ebene, wenn $x''$, $y''$, $z''$ die Koordinaten-Werthe eines beliebigen ihrer Punkte sind, ist nach (§. 12. VIII.)

1) $$(z''-z)\cdot\partial z+(y''-y)\cdot\partial y+(x''-x)\cdot\partial x=0,$$

oder, weil $\partial z=\partial z_x\cdot\partial x$, $\partial y=\partial y_x\cdot\partial x$ *) ist,

2) $$(z''-z)\cdot\partial z_x+(y''-y)\cdot\partial y_x+(x''-x)=0.$$

VI. Wenn auch nicht alle Punkte einer doppelt gekrümmten Linie in einer und derselben Ebene liegen, so bilden doch 3 nächst auf einander folgende Punkte derselben, z. B. die Punkte, deren Koordinaten-Werthe bezüglich

$$x,\ y,\ z;\quad x+dx,\ y_{x+dx},\ z_{x+dx};\quad x+m\cdot dx,\ y_{x+m\cdot dx},\ z_{x+m\cdot dx}$$

sind, allemal eine Ebene, und diese Ebene heißt die **Krümmungs-Ebene**, weil in ihr der Kreis liegt, welcher durch dieselben 3 Punkte hindurchgeht, und welcher der **Krümmungs-Kreis** der Kurve an dieser Stelle genannt wird.

Ist nun

1) $$A\cdot z'+B\cdot y'+C\cdot x'+D=0$$

die Gleichung dieser Krümmungs-Ebene, so müssen A, B, C, D so beschaffen seyn, daß wenn man statt $x'$, $y'$, $z'$ nach und nach die Koordinaten-Werthe der oben gedachten 3 nächst auf einander folgenden Punkte setzt, diese Gleichung (1.) drei mal identisch wird. — Dies giebt zunächst

*) Man vergesse nicht, daß wir bloß der Bequemlichkeit wegen $\partial x$, $\partial y$, $\partial z$ statt der zu schreibenden $\partial x_t$, $\partial y_t$, $\partial z_t$ gesetzt haben und setzen.

2) $A \cdot z + B \cdot y + C \cdot x + D = 0$, oder $f_{(x)} = 0$,

so wie nach (Analyſ. §. 20. Nr. 10.) nach

3) $\partial f_{(x)} = 0$, d. h. $A \cdot \partial z_x + B \cdot \partial y_x + C = 0$

und 4) $\partial^2 f_{(x)} = 0$, d. h. $A \cdot \partial^2 z_x + B \cdot \partial^2 y_x = 0$.

Dieſe 3 Gleichungen (2. 3. 4.) geben nun

$A = \partial^2 y_x$, $B = -\partial^2 z_x$, $C = \partial y_x \cdot \partial^2 z_x - \partial z_x \cdot \partial^2 y_x$

und $D = -z \cdot \partial^2 y_x - y \cdot \partial^2 z_x - x \cdot (\partial y \cdot \partial^2 z_x - \partial z_x \cdot \partial^2 y_x)$,

indem man der Bequemlichkeit wegen das unbeſtimmt bleibende $A$, $= \partial^2 y_x$ nimmt, damit die aus (2. — 4.) ſich findenden Werthe von B, C, D keine Bruchform annehmen. — Die Gleichung (1.) der Krümmungs-Ebene iſt daher

5) $\partial^2 y_x \cdot (z' - z) - \partial^2 z_x \cdot (y' - y) +$

$$(\partial y_x \cdot \partial^2 z_x - \partial z_x \cdot \partial^2 y_x) \cdot (x' - x) = 0.$$

Denkt man ſich x noch als Funktion von t, alſo auch y und z dann als die zugehörigen Funktionen von t, ſo hat man nach (§. 16. Analyſ.), wenn man wieder bloß $\partial x$, $\partial y$, $\partial z$, $\partial^2 x$, $\partial^2 y$, $\partial^2 z$ ſtatt $\partial x_t$, $\partial y_t$, $\partial z_t$, $\partial^2 x_t$, $\partial^2 y_t$, $\partial^2 z_t$ ſchreibt,

$$\partial y_x = \frac{\partial y}{\partial x}, \quad \partial z_x = \frac{\partial z}{\partial x},$$

$$\partial^2 y_x = \frac{\partial x \cdot \partial^2 y - \partial y \cdot \partial^2 x}{\partial x^3}, \quad \partial^2 z_x = \frac{\partial x \cdot \partial^2 z - \partial z \cdot \partial^2 x}{\partial x^3}.$$

Die Gleichung der Krümmungs-Ebene (5.) geht dadurch über in

6) $\mathfrak{A} \cdot (x' - x) + \mathfrak{B} \cdot (y' - y) + \mathfrak{C} \cdot (x' - x) = 0$,

wo $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ folgende Bedeutungen haben, nämlich:

7) $\mathfrak{A} = \partial x \cdot \partial^2 y - \partial y \cdot \partial^2 x$; $\mathfrak{B} = \partial z \cdot \partial^2 x - \partial x \cdot \partial^2 z$;

$$\mathfrak{C} = \partial y \cdot \partial^2 z - \partial z \cdot \partial^2 y.$$

Dieſe Bedeutungen von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ ſind dabei ſo, daß wenn man ſie bezüglich mit $\partial z$, $\partial y$ und $\partial x$ multiplizirt und addirt, ſogleich

8) $\mathfrak{A} \cdot \partial z + \mathfrak{B} \cdot \partial y + \mathfrak{C} \cdot \partial x = 0$

hervorgeht.

Sind $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa''$ die Winkel, welche die Krümmungs-Ebene mit den 3 Koordinaten-Ebenen XOY, XOZ und YOZ (oder eine auf die Krümmungs-Ebene ſenkrechte Gerade mit den 3

Axen OZ, OY, OX) macht, so folgt aus der Gleichung (6.) der Krümmungs-Ebene, wenn der Kürze wegen

9) $\sqrt{\mathfrak{A}^2+\mathfrak{B}^2+\mathfrak{C}^2} = \mathfrak{W}$

gesetzt wird,

10) $\cos x = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{W}}$, $\cos x' = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{W}}$ und $\cos x'' = \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{W}}$,

wo $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ immer die Bedeutung der (7.) haben, so daß die Gleichung (8.) identisch wird.

VII. Legt man durch dieselben 3 nächst auf einander folgenden Punkte der Kurve eine Kugel

$(\odot) \cdots (z'-c)^2+(y'-b)^2+(x'-a)^2-\varrho^2 = 0$,

deren Mittelpunkt (a, b, c) in der Krümmungs-Ebene liegt, so bildet letztere mit ersterer einen Kreis, welcher **Krümmungs-Kreis** genannt wird, und dessen Halbmesser $\varrho$ der **Krümmungs-Halbmesser** heißt.

Um nun für diesen Kreis sowohl a, b, c, als auch $\varrho$ zu finden, bemerke man zunächst, daß, wenn a, b, c statt $x'$, $y'$, $z'$ in die Gleichung der Krümmungs-Ebene (VI. 6.) gesetzt werden, letztere identisch werden muß. Dies giebt die Gleichung

1) $\mathfrak{A}\cdot(c-z)+\mathfrak{B}\cdot(b-y)+\mathfrak{C}\cdot(a-x) = 0$.

Ferner muß wieder, da die Kugel durch die 3 nächst auf einander folgenden Punkte der Kurve gehen soll, die Gleichung der Kugel $(\odot)$ für 3 nächst auf einander folgende Werthe x, $x+dx$, $x+m\cdot dx$ von $x'$ (und den zugehörigen Werthen von $y'$ und $z'$, wie sie sich aus den beiden Gleichungen der Kurve ergeben) identisch werden, so daß nach (§. 20. Nr. 10. Analys.) die Gleichung

2) $(z-c)^2+(y-b)^2+(x-a)^2-\varrho^2 = 0$

und ihre beiden ersten Differenzial-Gleichungen (nach allem x, und daher auch nach allem t), nämlich

3) $(z-c)\cdot\partial z+(y-b)\cdot\partial y+(x-a)\cdot\partial x = 0$

und

4) $(z-c)\cdot\partial^2 z+(y-b)\cdot\partial^2 y+(x-a)\cdot\partial^2 x+\partial s^2 = 0$

statt finden müssen, wo

5) $\partial s^2 = \partial x^2+\partial y^2+\partial z^2$

ist.

ist. Aus diesen 4 Gleichungen (1. — 4.) muß nun a, b, c und $\varrho$ gefunden werden. Die (1. 3. u. 4.) geben sogleich

$$6)\quad \begin{cases} z-c = \dfrac{\partial s^2}{\mathfrak{A}^2+\mathfrak{B}^2+\mathfrak{C}^2}\cdot(\mathfrak{B}\cdot\partial x-\mathfrak{C}\cdot\partial y) \\ y-b = \dfrac{\partial s^2}{\mathfrak{A}^2+\mathfrak{B}^2+\mathfrak{C}^2}\cdot(\mathfrak{C}\cdot\partial z-\mathfrak{A}\cdot\partial x) \\ x-a = \dfrac{\partial s^2}{\mathfrak{A}^2+\mathfrak{B}^2+\mathfrak{C}^2}\cdot(\mathfrak{A}\cdot\partial y-\mathfrak{B}\cdot\partial z), \end{cases}$$

wo $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ die Bedeutung der (VI. 7.) haben, so daß auch noch die (VI. 8.) statt findet, nämlich

$$7)\qquad \mathfrak{A}\cdot\partial z+\mathfrak{B}\cdot\partial y+\mathfrak{C}\cdot\partial x = 0.$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen (6. u. 7.) giebt dann die (2.) sogleich

$$8)\qquad \varrho = \frac{\partial s^3}{\sqrt{\mathfrak{A}^2+\mathfrak{B}^2+\mathfrak{C}^2}},$$

welches die Gleichung für den Krümmungs-Halbmesser ist *).

Um von allen diesen Ausdrücken ihre symmetrische Form desto bequemer übersehen zu lassen, bemerke man noch, daß nach (VI.), wenn $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ die Winkel bedeuten, welche die Tangente der Kurve mit den Axen OX, OY, OZ macht,

$$9)\quad \cos\alpha = \frac{\partial x}{\partial s},\ \text{also}\ \partial(\cos\alpha) = \frac{\partial s\cdot\partial^2 x-\partial x\cdot\partial^2 s}{\partial s^2}$$

ist, während man auf der andern Seite, wenn statt $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ ihre Werthe gesetzt werden,

$$\begin{aligned}&\mathfrak{A}\cdot\partial y-\mathfrak{B}\cdot\partial z\\ &=\partial x\cdot(\partial y\cdot\partial^2 y+\partial z\cdot\partial^2 z)-(\partial y^2+\partial z^2)\cdot\partial^2 x\\ &=\partial x\cdot(\partial x\cdot\partial^2 x+\partial y\cdot\partial^2 y+\partial z\cdot\partial^2 z)-(\partial x^2+\partial y^2+\partial z^2)\cdot\partial^2 x\end{aligned}$$

erhält, so daß, weil die (5.), differenziirt,

$$10)\qquad \partial s\cdot\partial^2 s = \partial x\cdot\partial^2 x+\partial y\cdot\partial^2 y+\partial z\cdot\partial^2 z$$

liefert,

---

*) Dieser Ausdruck (9.) für den Krümmungs-Halbmesser $\varrho$ geht in den (§. 7. III. D.) für ebene Kurven gefundenen über, sobald $z=0$, also auch $\partial z=0$, $\partial^2 z=0$ gesetzt wird, weil dann $\partial s^2=\partial x^2+\partial y^2$ und $\mathfrak{B}=0$, so wie noch $\mathfrak{C}=0$ wird, also $\varrho=\frac{\partial s^3}{\mathfrak{A}}$.

11) $\mathfrak{A}\cdot\partial y - \mathfrak{B}\cdot\partial z = \partial s\cdot(\partial x\cdot\partial^2 s - \partial s\cdot\partial^2 x) = -\partial s^2\cdot\partial(\cos\alpha)$

wird.

Da nun die Gleichung (8.) noch

12) $$\sqrt{\mathfrak{A}^2+\mathfrak{B}^2+\mathfrak{C}^2} = \frac{\partial s^3}{\varrho}$$

liefert, so folgt, daß wenn man diese (so wie natürlich die leicht zu erhaltenden analogen) Werthe in die (6.) substituirt, letztere diese Form annehmen:

13)
$$\begin{cases} z-c = \frac{\varrho^2}{\partial s^3}\cdot(\partial z\cdot\partial^2 s - \partial s\cdot\partial^2 z) = -\frac{\varrho^2}{\partial s}\cdot\partial(\cos\gamma) \\ y-b = \frac{\varrho^2}{\partial s^3}\cdot(\partial y\cdot\partial^2 s - \partial s\cdot\partial^2 y) = -\frac{\varrho^2}{\partial s}\cdot\partial(\cos\beta) \\ x-a = \frac{\varrho^2}{\partial s^3}\cdot(\partial x\cdot\partial^2 s - \partial s\cdot\partial^2 x) = -\frac{\varrho^2}{\partial s}\cdot\partial(\cos\alpha). \end{cases}$$

Sind nun $\zeta$, $\zeta'$, $\zeta''$ die Winkel, welche die Richtung des Krümmungs-Halbmessers (vom Mittelpunkt an in's Unendliche gedacht) mit den 3 Axen macht, so hat man noch nach (§. 1. VII.) vermöge der Gleichungen (13.)

14)
$$\begin{cases} \cos\zeta = \frac{\varrho}{\partial s^3}\cdot(\partial x\cdot\partial^2 s - \partial s\cdot\partial^2 x) = -\frac{\varrho}{\partial s}\cdot\partial(\cos\alpha) \\ \cos\zeta' = \frac{\varrho}{\partial s^3}\cdot(\partial y\cdot\partial^2 s - \partial s\cdot\partial^2 y) = -\frac{\varrho}{\partial s}\cdot\partial(\cos\beta) \\ \cos\zeta'' = \frac{\varrho}{\partial s^3}\cdot(\partial z\cdot\partial^2 s - \partial s\cdot\partial^2 z) = -\frac{\varrho}{\partial s}\cdot\partial(\cos\gamma). \end{cases}$$

VIII. Diese 3 nächst auf einander folgenden Punkte der einfach oder doppelt gekrümmten Linie, durch welche die Krümmungs-Ebene und der Krümmungs-Kreis hindurchgehen, bilden 2 nächst auf einander folgende geradlinige Tangenten der Kurve und diese unter sich einen (offenbar unendlich kleinen) Winkel $\delta$, welcher der Berührungs-Winkel genannt wird. — Um diesen Winkel $\delta$ zu finden, muß man den Satz zu Hülfe nehmen (§. 1. VII. 7.), nach welchem

1) $\cos\delta = \cos\alpha\cdot\cos\alpha' + \cos\beta\cdot\cos\beta' + \cos\gamma\cdot\cos\gamma'$

ist, wenn $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ die Winkel sind, welche die erstere Tangente mit den Axen macht, und wenn man dagegen unter $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ die

Winkel versteht, welche die nächst folgende Tangente mit den Axen bildet.

Denkt man sich nun, der Gleichförmigkeit der Rechnungen wegen, x, und daher auch y und z als Funktionen von t, so sind auch $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\alpha'$, $\beta'$; $\gamma'$ Funktionen von t, und zwar ist

2) $\alpha' = \alpha_{t+dt}$, $\beta' = \beta_{t+dt}$, $\gamma' = \gamma_{t+dt}$.

Daraus folgt nach dem Taylor'schen Lehrsatze

3) $\cos\alpha' = \cos\alpha + \vartheta(\cos\alpha)\cdot dt + \vartheta^2(\cos\alpha)\cdot\frac{dt^2}{2!} + \cdots$

4) $\cos\beta' = \cos\beta + \vartheta(\cos\beta)\cdot dt + \vartheta^2(\cos\beta)\cdot\frac{dt^2}{2!} + \cdots$

5) $\cos\gamma' = \cos\gamma + \vartheta(\cos\gamma)\cdot dt + \vartheta^2(\cos\gamma)\cdot\frac{dt^2}{2!} + \cdots$,

wo wir wieder, der Kürze wegen, $\vartheta(\cos\alpha)$ ꝛc. ꝛc. statt $\vartheta(\cos\alpha)$, ꝛc. ꝛc. geschrieben haben.

Dabei ist aber nach (§. 1. VII.)

6) $(\cos\alpha)^2 + (\cos\beta)^2 + (\cos\gamma)^2 = 1$,

also auch, wenn man diese Gleichung zwei mal hinter einander nach allem t differenziirt,

7) $\cos\alpha\cdot\vartheta(\cos\alpha) + \cos\beta\cdot\vartheta(\cos\beta) + \cos\gamma\cdot\vartheta(\cos\gamma) = 0$,

8) $[\vartheta(\cos\alpha)]^2 + [\vartheta(\cos\beta)]^2 + [\vartheta(\cos\gamma)]^2 + \cos\alpha\cdot\vartheta^2(\cos\alpha) + \cos\beta\cdot\vartheta^2(\cos\beta) + \cos\gamma\cdot\vartheta^2(\cos\gamma) = 0$.

Substituirt man nun die Werthe aus (3. — 5.) in die (1.), und berücksichtigt man die Gleichungen (6. — 8.), so ergiebt sich, wenn man die Unendlich-Kleinen der dritten und höhern Ordnungen wegläßt,

9) $\cos\delta = 1 - \frac{1}{2}\left([\vartheta(\cos\alpha)]^2 + [\vartheta(\cos\beta)]^2 + [\vartheta(\cos\gamma)]^2\right)\cdot dt^2$,

woraus, wegen $\sin\delta^2 = 1 - \cos\delta^2$, wenn man wieder das mit $dt^4$ behaftete Glied wegläßt,

10) $\sin\delta^2 = \left([\vartheta(\cos\alpha)]^2 + [\vartheta(\cos\beta)]^2 + [\vartheta(\cos\gamma)]^2\right)\cdot dt^2$

sich ergiebt.

Daraus folgt, daß $\sin\delta$ unendlich klein von der ersten Ordnung ist. Da nun nach (Analyt. §. 13.)

11) $$\sin\delta = \delta - \frac{\delta^3}{3!} + \frac{\delta^5}{5!} - \cdots$$

ist, so folgt, wenn man die Unendlich-Kleinen der höhern Ordnungen wegläßt,

12) $$\sin\delta = \delta,$$

also

13) $$\delta = \left([\vartheta(\cos\alpha)]^2 + [\vartheta(\cos\beta)]^2 + [\vartheta(\cos\gamma)]^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot dt.$$

Substituirt man nun hier statt $\vartheta(\cos\alpha)$ ꝛc. ꝛc. die Werthe, wie sich solche aus (VII. 13.) ergeben, und berücksichtigt man, daß nach (VII. 2.)

$$(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2 = \varrho^2$$

ist, wo $\varrho$ den Krümmungs-Halbmesser bedeutet, so findet man

14) $$\delta = \frac{\vartheta s}{\varrho} \cdot dt = \frac{ds}{\varrho},$$

d. h. dieser Berührungs-Winkel $\delta$ (versteht sich im Bogen für den Radius 1 ausgedrückt) findet sich, wenn man das Element ds des Bogens der doppelt gekrümmten Kurve durch den Krümmungs-Halbmesser dividirt; daher ist er derselbe Winkel, den die beiden durch die Endpunkte von ds gelegten Normalen der Kurve (d. h. die beiden Radien des Krümmungs-Kreises, welche durch die Endpunkte von ds gehen) unter sich bilden *).

Anmerk. Alles über die Kurven doppelter Krümmung Gesagte gilt aber natürlich auch, wenn die Kurve eben, d. h. nur einfach gekrümmt seyn sollte.

---

*) Dieses Letztere kann man aus geometrischen Betrachtungen ebenfalls ableiten. — Es sey nämlich (Fig. 38.) LMN das Element ds des Bogens; und LMP und MN seyen die beiden Tangenten in den Endpunkten L und N, welche sich in M schneiden. Dann ist NMP der gesuchte Winkel $\delta$, so wie $OL = ON = \varrho$, sobald OL, ON von L und N aus senkrecht auf NM und LM gedacht und verlängert sind, bis sie sich in O schneiden. Also ist $\delta = NMP = LON$, weil das Viereck OLMN bei L und N rechte Winkel hat. Aber eben deshalb ist dann auch Bog. LN = OL·δ, d. h. $ds = \varrho \cdot \delta$ oder $\delta = \frac{ds}{\varrho}$, wenn nur $\delta$ den Bogen vorstellt für den Radius 1, der dem Berührungs-Winkel NMP oder LON zukommt.

Wir haben aber oben im Texte absichtlich den umgekehrten Weg vorgezogen.

## §. 17.

### Von den Flächen der zweiten Ordnung.

I. Die allgemeinste Gleichung der Flächen der zweiten Ordnung auf senkrechte Axen bezogen ist nach (§. 10. IV.)

$$(\odot)\cdots A\cdot z^2+B\cdot y^2+C\cdot x^2+D\cdot xy+E\cdot xz+F\cdot yz+G\cdot z+H\cdot y+K\cdot x+L=0.$$

Will man die Durchschnitts-Linien haben, in welchen die Koordinaten-Ebenen XOY, XOZ und YOZ diese Fläche der zweiten Ordnung schneidet, so muß man (nach §. 10. III.) abwechselnd $z=0$, $y=0$ und $x=0$ setzen. Diese Durchschnitte sind also, wenn sie Kurven sind, nothwendig Linien der zweiten Ordnung oder Kegelschnitte. Eine dieser Gleichungen ist z. B.

$$B\cdot y^2+C\cdot x^2+D\cdot xy+Hy+Kx+L=0.$$

Giebt nun diese Gleichung überhaupt eine Kurve, so ist dieselbe eine Parabel, Ellipse oder Hyperbel, je nachdem $D^2-4BC$ Null, negativ oder positiv ist. (Vgl. §. 8. III.)

Legt man durch einen Punkt in der Axe OZ, dessen dritte Koordinate r ist, eine Ebene parallel mit XOY, und sucht man die Durchschnitts-Linie dieser Ebene mit der Fläche der zweiten Ordnung, so muß man in der Gleichung $(\odot)$ r statt z setzen. Die Gleichung zwischen x und y, welche dann hervorgeht, ist wieder von der zweiten Ordnung, und giebt, wenn überhaupt eine Kurve, wiederum eine Parabel, Ellipse oder Hyperbel, je nachdem $D^2-4BC$ Null, negativ oder positiv ist. Alle mit der Ebene XOY parallele Ebenen schneiden daher die Fläche der zweiten Ordnung in gleichartigen Kegelschnitten, d. h. in lauter Parabeln, in lauter Ellipsen oder in lauter Hyperbeln. Dasselbe gilt von jeder der Koordinaten-Ebenen.

Während aber in der einen Richtung z. B. lauter Ellipsen liegen, können in jeder der beiden andern Richtungen lauter Parabeln oder Hyperbeln gefunden werden.

Führt man neue Koordinaten-Axen ein (nach §. 10. V.), so bleibt die Gleichung, welche für die Fläche der zweiten Ordnung aus der Gleichung $(\odot)$ hervorgeht, noch von der zweiten

Ordnung, während eine der neuen Koordinaten-Ebenen jede beliebige Ebene seyn kann. Die Fläche der zweiten Ordnung wird daher von jeder beliebigen Ebene, wenn überhaupt in einer Kurve, allemal in einem Kegelschnitte geschnitten, und alle mit dieser Ebene parallelen Ebenen schneiden die Fläche der zweiten Ordnung in lauter gleichartigen Kegelschnitten *).

II. Durch neue wiederum auf einander senkrechte Koordinaten-Axen können 6 Unbestimmte eingeführt werden, nämlich die 3 Koordinaten-Werthe des neuen Anfangs-Punktes der Koordinaten, und die 3 Winkel, wodurch die Lage der neuen Axen gegen die alten festgestellt wird. Ueber diese 6 Unbestimmten kann man dann so disponiren, daß die neue Gleichung 6 Glieder weniger bekommt, als die alte deren hat (vergl. §. 8. I.). Namentlich kann man aber allemal durch Bestimmung dreier dieser 6 Unbestimmten in reellen Werthen, die mit xy, xz und yz behafteten Glieder herausfallen machen.

Wie daher auch die Fläche der zweiten Ordnung seyn mag, so lassen sich doch allemal Koordinaten-Axen so legen, daß in Bezug auf diese Axen, die Gleichung dieser beliebigen, also jeder Fläche der zweiten Ordnung, einfacher sich so ausdrükken läßt

$$(\mathfrak{C}) \cdots A \cdot z^2 + B \cdot y^2 + C \cdot x^2 + D \cdot z + E \cdot y + F \cdot x + G = 0.$$

Diese neuen Axen wollen wir aber auf's Neue durch OX, OY, OZ vorstellen.

Alle mit dieser jetzigen XOY parallelen Ebenen schneiden nun die Fläche der zweiten Ordnung ($\mathfrak{C}$) in lauter Parabeln, in lauter Ellipsen, oder in lauter Hyperbeln, je nachdem das Produkt B·C Null, positiv oder negativ ist. Ganz analoges gilt von den Durchschnitten, welche mit den beiden andern

*) Es können Ebenen gelegt werden, welche die Fläche der zweiten Ordnung gar nicht schneiden. Und wiederum giebt es Flächen der zweiten Ordnung, welche von gewissen Ebenen bloß in geraden Linien geschnitten werden. Sind diese Geraden parallel unter sich, so hat man den gemeinen Cylinder; schneiden sich aber diese Geraden in einem Punkte, so hat man den gemeinen Kegel.

Koordinaten-Ebenen XOZ und YOZ parallel laufen. Die Bestimmung hängt dann davon ab, ob hinsichtlich der mit XOZ parallelen Schnitte das Produkt $A \cdot C$, hinsichtlich der mit YOZ parallelen Schnitte aber das Produkt $A \cdot B$ Null, positiv oder negativ ist. Daraus folgt aber:

1) Wenn die Schnitte nach einer Richtung Parabeln sind, so sind sie nach einer zweiten der 3 Richtungen OX, OY, OZ nothwendig wiederum Parabeln, aber nie nach allen 3 Richtungen zugleich.

Denn, wenn z. B. $B \cdot C = 0$ ist, so ist entweder $B = 0$ oder $C = 0$; d. h. entweder noch $A \cdot B = 0$ oder noch $A \cdot C = 0$. — Wären aber alle 3 Produkte $A \cdot B$, $A \cdot C$ und $B \cdot C$ zu gleicher Zeit $= 0$, so wäre auch $A = B = C = 0$ und die Gleichung (C) wäre dann nicht mehr von der zweiten Ordnung.

2) Die Schnitte nach allen 3 Richtungen können Ellipsen, aber nicht nach allen 3 Richtungen Hyperbeln seyn.

Denn wären z. B. $A \cdot B$ und $A \cdot C$ beide negativ, so wäre $\frac{A \cdot B}{A \cdot C}$ also $\frac{B}{C}$, also auch $\frac{B}{C} \cdot C^2$, oder $B \cdot C$ positiv; d. h. wenn die Schnitte in zweien Richtungen Hyperbeln sind, so sind sie doch in der dritten Richtung Ellipsen. —

Einen solchen hier zuletzt gedachten Körper nennt man aber ein Hyperboloid.

3) Wenn die Schnitte nach zweien der 3 Richtungen Ellipsen sind, so sind sie nach der dritten dieser 3 Richtungen ebenfalls Ellipsen. — Den von dieser Fläche der zweiten Ordnung begrenzten Körper nennt man aber Ellipsoid.

III. Führt man in einem solchen Ellipsoid 3 neue Koordinaten-Ebenen parallel mit den alten ein, um unbestimmte positive oder negative Werthe p, q, r von den alten entfernt, so daß $x+p$, $y+q$, $z+r$ bezüglich statt x, y, z zu stehen kommt, so kann man p, q, r immer so bestimmen, daß die Gleichung der Oberfläche dieses Ellipsoids diese Form annimmt:

$$(\mathcal{O}) \cdots \quad A \cdot z^2 + B \cdot y^2 + C \cdot x^2 = D,$$

wo A, B, C, D alle positiv sind. — Diese Koordinaten-Ebenen theilen daher das Ellipsoid in 8 congruente Theile.

Nennt man 2a, 2b, 2c die Längen der Axen OX, OY, OZ, welche auf beiden Seiten von der Oberfläche des Ellipsoids begrenzt sind, so muß die Gleichung (♂) für $z = y = 0$ das zugehörige $x = a$ geben; eben so $y = b$, wenn $x = z = 0$ ist, und $z = c$, so oft $x = y = 0$ gesetzt wird. Dies giebt die 3 Gleichungen

$$C \cdot a^2 = D, \quad B \cdot b^2 = D, \quad A \cdot c^2 = D;$$

und dadurch geht die Gleichung des Ellipsoids in

$$\frac{z^2}{c^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1,$$

oder in

$$(♂) \cdots \quad a^2b^2 \cdot z^2 + a^2c^2 \cdot y^2 + b^2c^2 \cdot x^2 = a^2b^2c^2$$

über.

Ist $b = c$, so nennt man das Ellipsoid ein Umdrehungs-Ellipsoid, weil es dann durch Umdrehung der durch

$$a^2 \cdot y^2 + b^2 \cdot x^2 = a^2 \cdot b^2$$

gegebenen Ellipse, um die Axe 2a derselben, hervorgebracht werden kann *). Die Gleichung desselben Umdrehungs-Ellipsoids ist aber

$$a^2 \cdot (z^2 + y^2) + b^2 \cdot x^2 = a^2b^2.$$

Und ist endlich $a = b = c$, so geht die Gleichung des Ellipsoids in diese

$$z^2 + y^2 + x^2 = a^2$$

über, und das Ellipsoid selbst wird dann Kugel genannt.

---

*) Daß es eben so ein Umdrehungs-Hyperboloid, auch ein Umdrehungs-Paraboloid geben kann, bedarf keiner besondern Erwähnung. Die Querschnitte, welche senkrecht auf die Umdrehungs-Axe gelegt werden, sind dabei allemal Kreise. Eben so giebt es einen Umdrehungs-Kegel (gewöhnlich in den Elementen senkrechter oder gleichseitiger genannt) und einen Umdrehungs-Cylinder (gewöhnlich senkrechter Cylinder genannt).

# C. Mechanik, oder Statik und Dynamik.

## Erster Theil.

## Mechanik des Atoms.

wiederum beide von demselben Anfangs-Punkte A an gerechnet. Aber eben deshalb, weil hiernach

$$AM = s_t, \quad AN = s_{t+dt}$$

ist, folgt nun auch

$$MN = s_{t+dt} - s_t = \partial s_t \cdot dt + \partial^2 s_t \cdot \frac{dt^2}{2!} + \cdots,$$

d. h. in so ferne MN = ds und dt unendlich-klein ist, nach (§. 20. Analys.)

$$2) \qquad ds = \partial s_t \cdot dt, \quad \text{oder} \quad \frac{ds}{dt} = \partial s_t,$$

wo $\partial s_t$ eine von $s_t$ abhängige, nach den Regeln der Ableitungs- oder Differenzial-Rechnung aus $s_t$ zu findende Funktion von t ist *).

## §. 4.

Je größer bei einerlei Zeit-Theil dt, der beschriebene Bahn-Theil ds ist, desto geschwinder wird die Bewegung genannt. Diese Geschwindigkeit der Bewegung hängt also einzig und allein von dem Koeffizienten $\partial s_t$ der Gleichung (2.) ab. — Wir drücken daher von nun an die Geschwindigkeit einer Bewegung, in Zahlen, durch den Werth von

$$\partial s_t \quad \text{oder} \quad \frac{ds}{dt} \text{ **)}$$

aus. Enthält nun der Ausdruck $\partial s_t$, die Zeit t selbst gar nicht, d. h. ist $\partial s_t$ nach t konstant, so heißt die Geschwindigkeit schlechtweg konstant; der Atom beschreibt nun zu allen Zeiten

*) Wir bitten hier insbesondere den (§. 20. Analys.) mit Aufmerksamkeit nachzulesen, damit die Ueberzeugung hervorgehe, daß die Gleichung (2.) nicht bloß genähert, sondern genau wahr ist.

**) Man sagt daher auch: Geschwindigkeit zu Ende einer jeden Zeit t wäre das Verhältniß des Raumes ds zu der dazu verwandten Zeit dt. — Man muß jedoch dabei nicht übersehen, daß ds, dt unendlich-kleine unbenannte Zahlen sind, die anfangen, wenn s und t selbst eben aufhören.

Wenn wir daher sagen: In der Zeit t habe der Atom den Raum s beschrieben, so verstehen wir unter t und s allemal die unbenannten Zahlen der Sekunden und Fuße, durch welche Zeit und Raum vorgestellt sind.

Einen unendlich-kleinen (§. 20. Analys.) Theil der Sekunde bezeichnen wir, sobald solcher vom Ende der durch t bezeichneten Zeit an gerechnet wird, durch dt. — Ist nun der in der Zeit t beschriebene Raum durch s bezeichnet, so bezeichnen wir das in dieser Zeit dt beschriebene Bahn-Theilchen durch ds.

In (Figg. 24. oder 25.) sey AM = s, und t die Zeit, welche der Atom gebraucht, um von A bis M zu gelangen. Versteht man nun unter dt die Zeit, welche der Atom gebraucht, um von M bis N zu gelangen, so ist MN der Bahn-Theil, den wir so eben durch ds bezeichnet haben. Dann ist AN = s + ds, und zugleich ist t + dt die zu diesem Wege AN oder s + ds verwandte Zeit.

## §. 3.

Der zu jeder beliebigen Zeit t gehörige Theil s der Bahn ist abhängig theils von den Ursachen der Bewegung, die wir zur Zeit noch nicht in Betrachtung ziehen wollen, theils aber auch von der Dauer der Bewegung. Es findet daher zwischen den unbenannten Zahlen s und t eine Abhängigkeit statt, welche in einer Gleichung ausgesprochen seyn muß. — Denkt man sich nun diese Gleichung nach s aufgelöst, so wird sie die Form

1) $$s = s_t$$

annehmen, wo wir durch $s_t$ die Funktion von t vorstellen, welche für s durch Auflösung der eben gedachten Gleichung gefunden wird (so daß also in dem durch $s_t$ vorgestellten Ausdruck der Buchstabe s selbst nicht vorkommt).

Nach (§. 2.) bedeuten nun t und t + dt zwei nächst auf einander folgende Zeiten, die einerlei Anfang haben; daher sind vermöge der Gleichung (1.)

$$s_t \text{ und } s_{t+dt}$$

die zugehörigen Wege AM und AN (Figg. 24. oder 25.),

wiederum beide von demselben Anfangs-Punkte A an gerechnet. Aber eben deshalb, weil hiernach

$$AM = s_t, \quad AN = s_{t+dt}$$

ist, folgt nun auch

$$MN = s_{t+dt} - s_t = \partial s_t \cdot dt + \partial^2 s_t \cdot \frac{dt^2}{2!} + \cdots,$$

d. h. in so ferne MN = ds und dt unendlich-klein ist, nach (§. 20. Analys.)

$$2) \qquad ds = \partial s_t \cdot dt, \quad \text{oder} \quad \frac{ds}{dt} = \partial s_t,$$

wo $\partial s_t$ eine von $s_t$ abhängige, nach den Regeln der Ableitungs- oder Differenzial-Rechnung aus $s_t$ zu findende Funktion von t ist *).

## §. 4.

Je größer bei einerlei Zeit-Theil dt, der beschriebene Bahn-Theil ds ist, desto **geschwinder** wird die Bewegung genannt. Diese **Geschwindigkeit** der Bewegung hängt also einzig und allein von dem Koeffizienten $\partial s_t$ der Gleichung (2.) ab. — Wir drücken daher von nun an die **Geschwindigkeit** einer Bewegung, in Zahlen, durch den Werth von

$$\partial s_t \quad \text{oder} \quad \frac{ds}{dt} \text{ **)}$$

aus. Enthält nun der Ausdruck $\partial s_t$, die Zeit t selbst gar nicht, d. h. ist $\partial s_t$ nach t konstant, so heißt die **Geschwindigkeit** schlechtweg **konstant**; der Atom beschreibt nun zu allen Zeiten

*) Wir bitten hier insbesondere den (§. 20. Analys.) mit Aufmerksamkeit nachzulesen, damit die Ueberzeugung hervorgehe, daß die Gleichung (2.) **nicht bloß genähert**, sondern **genau** wahr ist.

**) Man sagt daher auch: **Geschwindigkeit** zu Ende einer jeden Zeit t wäre das **Verhältniß** des Raumes ds zu der dazu verwandten Zeit dt. — Man muß jedoch dabei nicht übersehen, daß ds, dt unendlich-kleine **unbenannte** Zahlen sind, die anfangen, wenn s und t selbst eben aufhören.

in demselben Zeit-Theilchen dt auch dasselbe Bahn-Theilchen ds; die Bewegung selbst ist daher während ihrer ganzen Dauer gleichförmig oder konstant nach (§. 1.). —

Ist aber $\partial s_t$ noch eine Funktion von t, so ist dieser Werth von $\partial s_t$ oder $\frac{ds}{dt}$ zu Ende einer jeden andern Zeit t auch (im Allgemeinen) ein anderer; die Geschwindigkeit $\partial s_t$ oder $\frac{ds}{dt}$ ist nun veränderlich mit der Zeit t, und die Bewegung selbst (da nun die in demselben Zeit-Theilchen dt beschriebenen Bahn-Theilchen ds nach der Gleichung (2.) mit t sich ändern) ist nun eine ungleichförmige oder veränderliche, nach (§. 1.).

Anmerk. Ist für irgend einen Werth von t der Werth der Geschwindigkeit $\partial s_t = 0$, so ist nach der Gleichung (§. 3. Nr. 2.) der in der Zeit dt beschriebene Raum ds ebenfalls $= 0$; d. h. der Atom ist dann in Ruhe.

Die Geschwindigkeit Null zeigt also an, daß in diesem Augenblick der Atom sich gar nicht bewege.

## §. 5.

Bezeichnet man, während s den in der Zeit t beschriebenen Weg bedeutet, die zu Ende der Zeit t vorhandene Geschwindigkeit der Bewegung durch v, so hat man offenbar das ganze Gesetz der Bewegung, wenn man zwischen s, v, t irgend eine Gleichung $\varphi_{s,v,t} = 0$ gefunden hat. — Und die beiden Gleichungen

1) $\varphi_{s,v,t} = 0$ und 2) $\partial s_t = v$

lassen 2 der 3 Veränderlichen s, v, t als Funktionen der dritten finden.

Man kann nämlich aus diesen beiden Gleichungen (1. u. 2.) den Buchstaben v eliminiren, so daß man die Gleichung

3) $\varphi_{s,\partial s_t,t} = 0,$

also eine Differenzial-Gleichung der ersten Ordnung zwischen den beiden Veränderlichen s und t erhält. Wird diese letztere allge-

mein integrirt, so erhält man eine (algebraische oder transcendente) Ur-Gleichung zwischen s, t und einer Konstante C, welche letztere noch aus irgend einem Paare bekannter und zusammengehöriger Werthe von s, und t bestimmt werden muß. Weil aber für $t = 0$, unserer bisherigen Voraussetzung zu Folge, auch $s = 0$ werden muß, so setzt man in letzterer Gleichung $t = 0$ und $s = 0$, und hat nun die Gleichung zur Bestimmung der Konstante C.

Diese Gleichung zwischen s und t giebt nun s als Funktion von t (oder auch t als Funktion von s), während die Differenzial-Rechnung aus dieser Gleichung zwischen s und t auch wiederum die Geschwindigkeit $\partial s_t$ findet, wie solche zu Ende einer jeden Zeit t (bei dieser Bewegung) vorhanden seyn wird.

Betrachten wir noch einige sehr spezielle Fälle.

A. Konstante Bewegung.

I. Ist gegeben eine konstante Bewegung durch die Gleichung

$$v = c \quad \text{(vgl. §. 4.)}$$

(statt der obigen $\varphi_{s,v,t} = 0$), so hat man

1) $v = c$, 2) $\partial s_t = v$, also 3) $\partial s_t = c$.

Diese letztere Gleichung integrirt, und das Integral so genommen, daß für $t = 0$ auch $s = 0$ wird, giebt

4) $s = \int_{t=0} c \cdot dt$, d. h. $s = c \cdot t$.

Diese Gleichung (4.) drückt nun das ganze Gesetz dieser konstanten Bewegung, deren (konstante) Geschwindigkeit $= c$ vorausgesetzt worden ist, algebraisch aus.

Dieser Gleichung (4.) zu Folge hat aber die konstante Bewegung auch noch nachstehende Eigenschaften:

II. Bei der konstanten Bewegung verhalten sich zwei in verschiedenen Zeiten $t_1$ und $t_2$ beschriebenen Wege $s_1$ und $s_2$, wie die dazu verwandten Zeiten.

Denn es ist nach (4.)

$$s_1 = c \cdot t_1 \quad \text{und} \quad s_2 = c \cdot t_2.$$

Eliminirt man daher c aus diesen letztern beiden Gleichungen, so ergiebt sich

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{t_1}{t_2} \text{ oder } s_1 : s_2 = t_1 : t_2.$$

III. Es ist

$$c = \frac{s}{t};$$

d. h. bei der konstanten Bewegung ist die Geschwindigkeit c das Verhältniß des Raumes s zur Zeit t, auch wenn t (und daher auch s) nicht gerade unendlich-klein, sondern beliebig groß sind.

IV. Bezeichnet $\sigma$ den Bahn-Theil, welchen der Atom in der ersten Sekunde beschreibt; stellt ferner $\sigma'$ den Bahn-Theil vor, welchen der Atom in der nten Sekunde durchläuft; so hat man nach der Gleichung (4.)

$$\sigma = c \cdot 1 = c,$$

dagegen $\sigma' = c \cdot n - c \cdot (n-1) = c$ *).

D. h. bei der konstanten Bewegung wird in jeder folgenden Sekunde derselbe Raum beschrieben, wie in der ersten; und dieser ist genau durch die Zahl c vorgestellt, welche wir die Geschwindigkeit dieser Bewegung nennen **).

B. Gleichförmig beschleunigte Bewegung.

I. Ist (statt der obigen Gleichung $\varphi_{s,v,t} = 0$) gegeben diese andere Gleichung, nämlich:

1) $$v = a + b \cdot t,$$

so nennt man diese Bewegung eine gleichförmig beschleunigte,

*) Es drückt nämlich $c \cdot n$ den Weg aus, welcher in den ersten n Sekunden beschrieben ist; so wie $c \cdot (n-1)$ den Weg vorstellt, den die Bewegung in den ersten $n-1$ Sekunden durchlaufen hat; alles der Gleichung (4.) gemäß. — Subtrahirt man nun beide Bahn-Theile von einander, so bleibt offenbar der Bahn-Theil $\sigma'$ übrig, der in der $n^{ten}$ Sekunde beschrieben worden ist.

**) Hätte man daher bloß konstante Bewegungen zu betrachten, so würde man die Geschwindigkeit gleich von vorne herein als die Zahl der Fuße definiren können, welche die Bewegung in der ersten und deshalb auch in jeder Sekunde durchläuft, in so ferne der obige allgemeine Begriff von Geschwindigkeit in diesem Falle auf den so eben ausgesprochenen zurückkömmt.

nigte, wenn b positiv ist, dagegen eine gleichförmig verzögerte, im Falle b negativ seyn sollte *). Diese Gleichung (1.) in Verbindung mit der

2) $\partial s_t = v$

giebt sogleich

3) $\partial s_t = a + b \cdot t;$

folglich ist jetzt, wenn man integrirt, so daß für $t = 0$ auch $s = 0$ wird,

4) $s = a \cdot t + \frac{1}{2} b \cdot t^2.$

Diese Ur-Gleichung (4.) zwischen s und t drückt nun das ganze Gesetz der gleichförmig beschleunigten oder der gleichförmig verzögerten Bewegung algebraisch aus.

Aus dieser Gleichung lassen sich noch leicht nachstehende Einzelnheiten ableiten:

II. Den Raum s kann man in zwei Räume zerlegen, x und h, so daß man

$s = x + h$ und $x = a \cdot t$, so wie $h = \frac{1}{2} b \cdot t^2$

hat. Der Raum x ist dann derjenige, welcher dem konstanten Theil a der Geschwindigkeit seine Entstehung verdankt, während der andere Theil h derjenige Theil des Raumes s ist, welcher von der Geschwindigkeit $b \cdot t$ herrührt, welcher also ganz allein entstehen würde, wenn die Anfangs-Geschwindigkeit a der Null gleich wäre, d. h. gar nicht wäre.

III. Betrachten wir bloß die Bahn

*) Für $t = 0$ wird $v = a$, d. h. die Geschwindigkeit zu Anfang der Zeit t, ist $= a$. — Denkt man sich die Geschwindigkeit v zu jeder Zeit t in zwei Theile zertheilt, wovon der eine dieser konstante Theil a, der andere $b \cdot t$ aber durch v' bezeichnet wird, so verhalten sich zwei zu verschiedenen Zeiten $t_1$ und $t_2$ gehörigen Werthe $v'_1$ und $v'_2$ (von $v'$), wie diese Zeiten. — Denn es ist $v'_1 = b \cdot t_1$ und $v'_2 = b \cdot t_2$; dividirt man aber diese beiden Gleichungen durch einander, so erhält man $v'_1 : v'_2 = t_1 : t_2$. Das v', um welches bei dieser gleichförmig beschleunigten Bewegung die Anfangs-Geschwindigkeit a mit der Zeit wächst, ist daher mit der Zeit t selbst proportional. — Ist b negativ, so finden ganz analoge Betrachtungen statt; in der gleichförmig verzögerten Bewegung nimmt daher die Anfangs-Geschwindigkeit um Stücke ab, welche mit der Zeit der Bewegung proportional sind.

1) $$s = \tfrac{1}{2} b \cdot t^2,$$

wie sie zu der Geschwindigkeit

2) $$v = b \cdot t$$

gehört, und nennen wir $s_1$, $s_2$ die in den Zeiten $t_1$, $t_2$ vom Anfang der Bewegung an beschriebenen Räume, so hat man nach dieser Voraussetzung

$$s_1 = \tfrac{1}{2} b \cdot t_1^2 \quad \text{und} \quad s_2 = \tfrac{1}{2} b \cdot t_2^2.$$

Eliminirt man nun aus diesen beiden Gleichungen den Buchstaben b, so erhält man

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{t_1^2}{t_2^2}, \quad \text{oder} \quad s_1 : s_2 = t_1^2 : t_2^2;$$

d. h. bei derjenigen gleichförmig beschleunigten Bewegung, in welcher die Anfangs-Geschwindigkeit Null ist, verhalten sich zwei vom Anfang der Bewegung an gerechnete Wege $s_1$ und $s_2$, wie die Quadrate der darauf verwandten Zeiten $t_1$ und $t_2$, daher auch wie die Quadrate der zu Ende dieser Zeiten vorhandenen Geschwindigkeiten $v_1$ und $v_2$ (in so ferne der Voraussetzung zu Folge $v_1 = b \cdot t_1$ und $v_2 = b \cdot t_2$ ist, also auch $v_1 : v_2 = t_1 : t_2$). Eliminirt man aus den Gleichungen (1. u. 2.) die Zeit t, so erhält man

3) $$v^2 = 2b \cdot s, \quad \text{oder} \quad v = \sqrt{2b \cdot s},$$

wodurch die Geschwindigkeit v, wie sie zu Ende der Zeit t statt findet, direkt aus dem in dieser Zeit t beschriebenen Wege s gefunden werden kann, so wie auch umgekehrt s direkt in v. — Auch diese Gleichung (3.) läßt sehen, daß bei diesem speziellen Falle der gleichförmig beschleunigten Bewegung, in welchem die Anfangs-Geschwindigkeit $= 0$ ist, die zu verschiedenen Zeiten vorhandenen Geschwindigkeiten, wie die Quadrat-Wurzeln aus den in denselben Zeiten beschriebenen Räumen, oder letzten Räume wie die Quadrate der Geschwindigkeiten sich verhalten.

Suchen wir wieder die in der ersten Sekunde und in der nten Sekunde beschriebenen Wege $\sigma$ und $\sigma'$, so findet sich für die hier gedachte gleichförmig beschleunigte Bewegung, deren Anfangs-Geschwindigkeit $= 0$ ist, aus (1.):

$$\sigma = \tfrac{1}{2}b \cdot 1^2 = \tfrac{1}{2}b = \tfrac{1}{2}b \cdot 1;$$

und $$\sigma' = \tfrac{1}{2}b \cdot n^2 - \tfrac{1}{2}b \cdot (n-1)^2 = \tfrac{1}{2}b \cdot (2n-1);$$

d. h. bei dieser gleichförmig beschleunigten Bewegung (deren Anfangs-Geschwindigkeit Null ist) verhalten sich die in der

1sten, 2ten, 3ten, 4ten, ... nten Sekunde

beschriebenen Wege, wie die ungeraden Zahlen

$$1, \quad 3, \quad 5, \quad 7, \quad \cdots \quad 2n-1.$$

Ist $s'$ der Raum, den eine konstante Bewegung in der bestimmten Zeit $\tau$ mit der konstanten Geschwindigkeit $v = b \cdot \tau$ durchläuft, so ist nach (A. I.)

4) $$s' = v \cdot \tau = b\tau \cdot \tau = b \cdot \tau^2.$$

Ist aber $s''$ der Weg, den die hier betrachtete gleichförmig beschleunigte Bewegung (deren Anfangs-Geschwindigkeit Null ist) in der Zeit $\tau$ durchläuft, so findet sich nach (1.)

5) $$s'' = \tfrac{1}{2}b \cdot \tau^2$$

während zu Ende der Zeit $\tau$ die Geschwindigkeit $v$ dieser Bewegung nach (2.) durch die Gleichung

6) $$v = b \cdot \tau$$

ausgedrückt, also dieselbe $v$ ist, die wir uns in (4.) gedacht haben. Durch die Vergleichung der Resultate (4. u. 5.) erhält man aber nun

7) $$s' = 2s''.$$

Es hat also diese gleichförmig beschleunigte Bewegung (deren Anfangs-Geschwindigkeit Null ist) zu Ende einer jeden Zeit $\tau$ einen solchen Weg $s''$ gemacht und eine solche Geschwindigkeit $v$ erlangt, daß ein Atom, der diese End-Geschwindigkeit $v$ gleich zu Anfange hätte und mit derselben eine gleiche Zeit $\tau$ hindurch konstant sich bewegte, einen Weg $s'$ beschreiben würde, welcher genau das Doppelte des obigen Weges $s''$ ist.

IV. Umgekehrt: Verhalten sich bei irgend einer Bewegung die Geschwindigkeiten wie die Quadrat-Wurzeln aus den, von einem und demselben Anfangs-Punkt an gerechneten Räumen, so ist die Bewegung allemal eine gleichförmig beschleunigte. Dieselbe hat noch überdies die Anfangs-Geschwindigkeit Null, wenn Zeiten und Räume mit einander anfangen.

Denn nach der Voraussetzung ist, wenn $v'$ und $s'$, eben so $v$ und $s$ solche zusammengehörige Geschwindigkeiten und Räume sind,

$$v' : v = \sqrt{s'} : \sqrt{s}, \quad \text{d. h.} \quad v = \frac{v'}{\sqrt{s'}} \cdot \sqrt{s} = \sqrt{\left(\frac{v'^2}{s'} \cdot s\right)},$$

oder 1) $$v = \sqrt{b \cdot s},$$

wenn $\frac{v'^2}{s'}$ als gegeben, durch $b$ bezeichnet wird.

Diese Gleichung (1.) mit

2) $$\partial s_t = v$$

in Verbindung gebracht, giebt die Differenzial-Gleichung

3) $$\partial s_t = \sqrt{b \cdot s},$$

welche nun integrirt werden muß, um $s$ in $t$ zu haben.

Setzt man hier (wie immer in solchen Differenzial-Gleichungen, die $t$ selbst nicht enthalten, nach (§. 16. Analys.)) $\frac{1}{\partial t_s}$ statt $\partial s_t$, so giebt diese Gleichung (2.) sogleich

$$\partial t_s = \frac{1}{\sqrt{b \cdot s}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \cdot \frac{1}{s^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \cdot s^{-\frac{1}{2}};$$

und integrirt man diese Gleichung so, daß für $s = 0$ auch $t = 0$ wird, so erhält man

4) $$t = \frac{2}{\sqrt{b}} \cdot s^{\frac{1}{2}}, \quad \text{oder} \quad s = \tfrac{1}{4} b \cdot t^2,$$

woraus noch

5) $$\partial s_t = v = \tfrac{1}{2} b \cdot t$$

hervorgeht. — Dadurch ist aber das oben Behauptete außer Zweifel gesetzt.

V. Bei der gleichförmig verzögerten Bewegung, wo

$$v = a - b \cdot t \quad \text{und} \quad s = a \cdot t - \tfrac{1}{2} b \cdot t^2$$

ist, kann man nach der Zeit $t'$ fragen, wo die Bewegung aufhört, d. h. wo der Atom in Ruhe kommt, also wo $v = 0$ ist *). — Man findet diese Zeit aus der Gleichung

$$0 = a - b \cdot t',$$

und diese giebt

$$t' = \frac{a}{b}.$$

*) Bei jeder beliebigen veränderlichen Bewegung kann man dieselbe Frage thun. — Giebt aber die Gleichung zwischen $v$ und $t$, wenn $v = 0$ gesetzt wird, für $t$ nicht etwas Positives, so ist dies ein Beweis, daß sich solcher Fall nie ereignet, d. h. der Atom wird dann in keiner noch kommenden Zeit seine Bewegung mit Ruhe vertauschen.

Wird der ganze, in dieser Zeit $t'$ beschriebene Weg durch $s'$ bezeichnet, so hat man noch

$$s' = a \cdot t' - \tfrac{1}{2} b \cdot t'^2 = \frac{a^2}{2b}.$$

Anmerk. 1. Alle diese Lehren (§. 1. — §. 5.) gelten, die Bewegung mag geradlinig oder krummlinig seyn, wenn nur unter t die Zeit vom Anfang der Bewegung an, — unter s der in dieser Zeit t beschriebene geradlinige oder krummlinige Weg, und unter v die zu Ende dieser beliebigen Zeit t vorhandene Geschwindigkeit der Bewegung verstanden wird.

Anmerk. 2. Ist Figg. (24. oder 25.) AM der in der Zeit t beschriebene Weg s, und nimmt man O oder O' von A um eine bestimmte Strecke ab, etwa so, daß $OA = p$, $O'A = q$ wird, während p oder q von der Zeit t völlig unabhängig sind, so kann man, während $AM = s$ ist, $OM = s'$, oder $O'M = s''$ setzen; dann ist

$$s = s' - p, \quad \text{oder auch} \quad s = s'' + q;$$

folglich

$$\partial s_t = \partial s'_t, \qquad \text{auch} \qquad \partial s_t = \partial s''_t.$$

Demnach kann man die Geschwindigkeit v nicht bloß durch $\partial s_t$, sondern auch noch durch $\partial s'_t$, so wie auch noch durch $\partial s''_t$ bezeichnen.

Jede Gleichung zwischen s, v und t kann daher sogleich in eine Gleichung zwischen $s'$, $\partial s'_t$ und t, oder auch in eine Gleichung zwischen $s''$, $\partial s''_t$ und t verwandelt werden; und wenn man die eine oder die andere integrirt, so erhält man entweder eine Gleichung zwischen $s'$, t und einer Konstante $c'$, oder eine Gleichung zwischen $s''$, t und einer Konstante $c''$. — Um nun in dem einen Fall die Konstante $c'$ zu bestimmen, so muß man bedenken, daß für $t = 0$, $s' = OA = p$ ist, daß also gleichzeitig $t = 0$ und $s' = p$ gesetzt werden muß. — Soll aber in dem andern Fall die Konstante $c''$ bestimmt werden, so muß man gleichzeitig $t = 0$ und $s'' = -q$ setzen, um die Gleichung

zur Bestimmung der Konstante $v''$ zu haben; denn es muß gleichzeitig $t = 0$ und $s = 0$ seyn; da nun allgemein $s'' = s - q$ ist, so ist für $s = 0$ nothwendig $s'' = 0 - q = -q$.

Da endlich, wenn $s''$ oder $s'$ bekannt ist, auch allemal sogleich $s$ als bekannt angesehen werden kann, so kann man auch, wenn man will, $s'$ oder $s''$ den zu $t$ gehörigen Weg des Atoms nennen; und dies geschieht in der Regel allemal, so oft man aus irgend einem Grunde statt $s$ lieber $s'$ oder lieber $s''$ in Rechnung bringen will.

# Mechanik des Atoms.

## Zweites Kapitel.

### Von den Ursachen der Bewegung eines Atoms. Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte.

§. 6.

Die (allemal unbekannte) Ursache der Bewegung eines Atoms, oder einer Veränderung derselben hinsichtlich ihrer Richtung oder hinsichtlich ihrer Geschwindigkeit oder hinsichtlich beider, heißt **Kraft**.

§. 7.

Eine solche Ursache der Bewegung eines Atoms ist entweder nur einmal vorhanden gewesen, und dann sagen wir: „eine Kraft habe nur **augenblicklich** gewirkt." — Eine solche setzt den Atom aus der Ruhe in Bewegung, in einer bestimmten Richtung, und mit einer bestimmten Geschwindigkeit. Die erstere nennen wir die **Richtung der Kraft**, die andere dagegen die **Größe der Kraft**. — In Zahlen ausgedrückt ist daher **Kraft**, der Größe nach, und **Geschwindigkeit** (der durch diese Kraft allein hervorgebrachten Bewegung) ein und dasselbe. — Diese Bewegung ist nothwendig **geradlinig** und **konstant**, und bleibt so lange unverändert dieselbe, so lange keine (neue) Ursache der Aenderung hinzutritt.

§. 8.

Oder es treten in mehr oder weniger von einander entfernten Zeitpunkten neue solche Kräfte hinzu. — Die nächste neu hinzutretende Kraft wird entweder 1) die Geschwindigkeit, oder 2) die Richtung, oder 3) Geschwindigkeit und Richtung zugleich ändern. So wie aber die neue Bewegung eingetreten ist, so bleibt sie wieder genau so wie sie ist, unverändert, also (in der alten oder in einer neuen Richtung) geradlinig und (mit der alten oder mit einer neuen Geschwindigkeit) konstant, bis der Zeitpunkt eintritt, wo die dritte Ursache (Kraft) hinzukommt und abermals eine Aenderung der Bewegung entweder 1) hinsichtlich der Richtung, oder 2) hinsichtlich der Geschwindigkeit, oder 3) hinsichtlich beider, hervorbringt. — Man begreift leicht, daß diese Bewegung, so viel neue Kräfte auch nach und nach hinzutreten mögen, nichts weiter ist, als ein Aggregat von eben so vielen einzelnen geradlinigen und konstanten Bewegungen, deren jede für sich so lange dauert, bis die neue Kraft hinzutritt, welche sie ändert. — Die Gesammtbahn ist dabei entweder eine einzige gerade Linie (wenn sich die Richtung nie geändert hat) oder ein Aggregat von einzelnen geraden Linien, welche eine gebrochene Linie bilden. — Jedenfalls findet für jeden einzelnen Theil dieses Aggregats von Bewegungen, zwischen der Bahn s und der dazu verwandten Zeit t, beide vom Anfang dieses Theils der Bewegung an gerechnet, eine Gleichung von der Form

$$s = a \cdot t$$

statt, wo a die Geschwindigkeit dieses Theils der Bewegung ist (nach §. 5. A.). Sind außer diesen verschiedenen Geschwindigkeiten a auch noch die Winkel bekannt, welche jeder neue geradlinige Theil der Bahn mit dem nächst vorhergehenden macht, so ist diese ganze Bewegung völlig bestimmt.

§. 9.

Oder es treten außer der ersten Kraft, welche den Atom aus der Ruhe in Bewegung gesetzt hat, stetig, d. h. ohne merkliche,

oder in unendlich-kleiner (§. 20. Analys.) Zwischenzeit, neue Kräfte hinzu. — Alle diese stetig neu hinzutretenden Kräfte können Werthe seyn einer und derselben Funktion von t, also zu jeder andern Zeit anders; sie können aber auch zu jeder Zeit dieselbe Größe haben; endlich können sie zu jeder Zeit in der Richtung der Bewegung hinzutreten, oder auch in jeder andern davon verschiedenen Richtung. Und sind diese stetig neu hinzutretenden Kräfte von der Zeit abhängig, also zu jeder andern Zeit anders, sind sie also durch eine Funktion der Zeit auszudrücken, so kann diese Funktion auch t mittelbar, nämlich v und s in sich aufnehmen.

Diese Bewegung kann ihre Richtung und ihre Geschwindigkeit, oder auch nur eines von beiden, **stetig** abändern, und sie kann daher **krummlinig** und **veränderlich**, aber auch **geradlinig** und **veränderlich**, so wie auch **krummlinig** und **konstant** seyn.

**Anmerk. 1.** Diese **stetig hinzutretenden** Kräfte sind ihrer Natur nach von den **augenblicklich wirkenden** Kräften (§. 7.) durchaus nicht verschieden. Bei jeder durch sie hervorgebrachten, noch in die Sinne fallenden Bewegung sind sie jedoch gegen letztere, wenn sie ebenfalls eine in die Sinne fallende Bewegung hervorgebracht haben, unendlich-klein, wie klein letztere selbst auch immer seyn mögen. Solches wird aber erst aus den Untersuchungen des nächsten Kapitels mit Nothwendigkeit hervorgehen.

**Anmerk. 2.** Nach dem (§. 8.) ist die durch stetig hinzutretende Kräfte hervorgebrachte Bewegung des (§. 9.) von dem im (§. 8.) betrachteten Aggregat geradliniger Bewegungen nur dadurch verschieden, daß im (§. 9.) jede neue Bewegung schon beginnt, wenn die vorhergehende nur erst eine unendlich-kleine Zeit gedauert hat. — Wenn man daher in der Bewegung des (§. 8.) die Zwischenzeiten zwischen den Wirkungen der Kräfte immer kleiner und kleiner sich denkt, so rückt man der stetig geänderten (der **veränderlichen**) Bewegung des (§. 9.) immer näher und näher, so daß diese stetig geänderte Bewegung

auch als ein Aggregat geradliniger und konstanter Bewegungen, wo jede einzelne aber von unendlich-kleiner Dauer ist, gedacht werden kann; ungefähr eben so wie man eine stetig gekrümmte Linie auch als eine gebrochene Linie sich denken kann, deren einzelne Seiten unendlich klein sind, und unter sich unendlich-kleine Winkel bilden.

## §. 10.

Von den Kräften postuliren wir Folgendes *): Nimmt ein Atom, der bereits die Kraft a in sich aufgenommen, also die Geschwindigkeit a in einer gegebenen Richtung OX (Fig. 20.) hat, während derselbe sich in O befindet, noch eine zweite Kraft in sich auf, welche ihm, wenn er ruhte, die Geschwindigkeit b in einer bestimmten Richtung beibringen würde, so sind 3 Fälle zu unterscheiden:

I. Fällt die Richtung der zweiten Kraft b genau mit der Richtung OX der ersten Kraft a zusammen, so geht der Atom von nun an in derselben Richtung OX, aber mit der Geschwindigkeit $a+b$ fort, also gerade so, wie wenn eine einzige Kraft von der Größe $a+b$ in derselben Richtung OX auf ihn, während er in Ruhe war, gewirkt hätte.

II. Ist die Richtung der zweiten Kraft b genau die entgegengesetzte OX′ von der Richtung OX der ersten Kraft a, so geht der Atom in der Richtung OX der ersten Kraft a, aber mit der Geschwindigkeit $a-b$ fort, im Falle $a>b$ seyn sollte. — Der Atom geht dagegen in der genau entgegengesetzten Richtung OX′ mit der Geschwindigkeit $b-a$ fort, im Falle $b>a$ ist; und endlich bleibt der Atom in O ruhend, wenn $b=a$, oder $b-a=a-b=0$ seyn sollte.

*) D. h. wir setzen Kräfte voraus, welche die hier näher beschriebenen Eigenschaften haben. In den Anwendungen auf wirkliche Naturkräfte muß man dann untersuchen, ob die hier gezogenen Folgerungen mit den Erfahrungen in der Natur übereinstimmen. Ist dies durchaus der Fall, so hat man einen physikalischen Beweis, daß die Naturkräfte diesen Voraussetzungen entsprechen.

III. Iſt aber die Richtung OY der zweiten Kraft b genau ſenkrecht auf der Richtung OX der erſten Kraft a, ſo verfolgt der Atom eine Bahn, auf welcher er ſich von den Richtungen OX und OY in jeder beliebig gedachten Zeit t genau ſo weit (ſenkrecht auf ſie) entfernt, als ihn jede der Kräfte b und a, wenn jede einzeln und ohne Mitwirkung der andern auf ihn einmal gewirkt hätte, ebenfalls von dieſen Richtungen OX und OY entfernt haben würde.

Anmerk. Dieſe poſtulirten Eigenſchaften (I. II. III.) der von uns hier zu betrachtenden Kräfte kann man vielleicht aus der Annahme der einzigen Eigenſchaft ableiten, nach welcher jede Kraft auf einen Atom ganz eben ſo wirkt, ſie mag den Atom in Ruhe oder bereits in Bewegung (d. h. mit einer Geſchwindigkeit in einer beſtimmten Richtung begabt) vorfinden.

## §. 11.

Es kann nie eine negative Kraft und nie eine negative Geſchwindigkeit geben. Jede Kraft und jede Geſchwindigkeit iſt nämlich abſolut und wird allemal durch eine abſolute Zahl in Rechnung gebracht. Um aber die 3 Fälle in (§. 10. II.) in eine und dieſelbe Rechnungs-Form vereinigen zu können, ſo wollen wir von nun an unter einer negativen Kraft und negativen Geſchwindigkeit in der Richtung irgend einer Axe OX allemal eine eben ſo große abſolute Kraft und abſolute Geſchwindigkeit in der genau entgegengeſetzten Richtung dieſer Axe verſtehen.

Die beiden erſtern Poſtulate des (§. 10.) ſprechen ſich nun vereinigt ſo aus:

I. Es mögen in der Richtung einer Axe OX zwei beliebige poſitive oder negative Kräfte a und b gleichzeitig auf den Atom in O wirken, ſo kann man immer eine einzige Kraft dafür ſetzen, welche genau daſſelbe leiſtet, und welche der Größe nach durch a+b ausgedrückt iſt, aber in derſelben Richtung der Axe OX wirkend gedacht, übrigens poſitiv, negativ oder Null ſeyn wird;

wobei das letztere andeutet, daß nun gar keine Kraft wirkt und daß der Atom ruht.

Das dritte Postulat (III. des §. 10.) läßt sich auch so umformen:

II. Wirken zwei positive oder negative Kräfte a und b auf einen Atom O gleichzeitig in den Richtungen zweier auf einander senkrechten Axen OX und OY (Fig. 20.), so ist die Wirkung genau dieselbe, wie wenn eine einzige absolute Kraft $c = +\sqrt{a^2+b^2}$ auf ihn wirkte, in einer Richtung, welche mit den Axen-Richtungen OX und OY (und nicht mit den entgegengesetzten Richtungen) Winkel $\alpha$ und $\beta$ bildet, welche gegeben sind durch die Gleichungen

$$\cos\alpha = \frac{a}{c} \quad \text{und} \quad \cos\beta = \frac{b}{c};$$

so daß $\cos\alpha$ mit a zugleich positiv, negativ oder Null ist, und $\cos\beta$ mit b einerlei Vorzeichen hat; also daß $\alpha$ spitz, stumpf oder ein rechter Winkel ist, je nachdem a positiv, negativ oder Null; während ganz analoges von $\beta$ gilt in Beziehung auf b.

Um dieses zu beweisen, müssen wir zeigen, daß die von diesen beiden Kräften a und b hervorgebrachte Bewegung 1) geradlinig, 2) konstant ist und 3) in der behaupteten Richtung und mit der Geschwindigkeit $c = \sqrt{a^2+b^2}$ statt findet.

Zu dem Ende denke man sich zuerst a und b positiv; ferner sey der Atom zu Ende der Zeit t in M. Zieht man nun das Rechteck OPMQ aus, setzt $OP = x$, $OQ = y$, so hat man nach dem gedachten Postulat

1) $x = a \cdot t$ und 2) $y = b \cdot t$;

also erhält man, wenn t eliminirt wird, die Gleichung zwischen den Koordinaten-Werthen x und y zu jeder Zeit, nämlich

3) $ay - b \cdot x = 0$.

Weil aber dies nach (Geom. §. 4.) die Gleichung einer Geraden und zwar die Gleichung der Diagonale OMV des Rechtecks OPMQ ist, so ist die Bewegung des Atoms geradlinig und zwar in der Richtung der Diagonale OM.

Ist nun der Atom zur Zeit $t = 1$ in m, und zieht man das Rechteck Opmq aus, so hat man aus (1. und 2.), wenn man 1 statt t setzt,

4) $Op = a$, 5) $Oq = b$

und 6) $Om = \sqrt{a^2+b^2} = c$.

Wird nun OM durch s bezeichnet, so hat man offenbar

$$s = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{a^2t^2+b^2t^2} = t \cdot \sqrt{a^2+b^2} = c \cdot t;$$

d. h. die Bewegung des Atoms in der Diagonale OM iſt auch konſtant, und hat die Geſchwindigkeit c; ſo daß c die Kraft iſt, welche in der Richtung der Diagonale Om des Rechtecks aus den beiden Seiten Op = a und Oq = b angebracht, dieſe Bewegung hervorbringt. Auch iſt, wie man aus der Figur ſieht,

$$\cos\alpha = \cos mOX = \frac{a}{c} \quad \text{und} \quad \cos\beta = \cos mOY = \frac{b}{c};$$

alles ſo wie es behauptet worden war.

Betrachtet man aber jeden der 3 übrigen Fälle, wo a poſitiv, b negativ, oder a negativ, b poſitiv, oder endlich a und b negativ ſind, einzeln, ſo findet ſich die Behauptung in allen Fällen gerechtfertigt.

III. Wirkt alſo umgekehrt auf einen Atom in O (Fig. 20.) eine Kraft P in der Richtung OM, welche mit zweien andern beliebig genommenen, aber auf einander ſenkrechten Richtungen OX und OY die Winkel MOX = $\alpha$ und MOY = $\beta$ macht, ſo kann man ſtatt dieſer einzigen Kraft P zwei Kräfte, nämlich

$P \cdot \cos\alpha$ in der Richtung OX,

und $P \cdot \cos\beta$ in der Richtung OY

ſetzen, und dieſe letzteren beiden leiſten, wenn ſie gleichzeitig auf den Atom in O wirken, genau daſſelbe, was die einzige Kraft P in ihrer Richtung OM geleiſtet hat. Und dies gilt noch, wenn einer oder der andere der Winkel $\alpha$ und $\beta$, oder beide Winkel $\alpha$ und $\beta$ zugleich, ſtumpf ſeyn ſollten, alſo wenn die Kraft P in der Richtung OM′, oder in den Richtungen OM″, oder OM‴ wirken ſollte, wenn man nur immer unter $\alpha$ und $\beta$ die Winkel verſteht, welche die wirkliche Richtung der Kraft (und nicht die entgegengeſetzte) mit den Richtungen OX und OY ſelbſt (und nicht mit ihren Verlängerungen OX′ oder OY′) macht, und welche immer hohl*) genommen werden; — vorausgeſetzt jedoch, daß man, im Falle $\cos\alpha$ oder $\cos\beta$ negativ werden ſollten, unter der negativen Kraft $P \cdot \cos\alpha$ oder $P \cdot \cos\beta$ eine eben ſo große abſolute, aber genau

*) Da allemal $\cos z = \cos(360 - z)$ iſt, ſo folgt, daß wenn man lauter Koſinus in Rechnung bringt und nicht Sinus, es ganz einerlei iſt, ob man den hohlen Winkel nimmt, den zwei Richtungen mit einander machen, oder den erhabenen.

in entgegengesetzter Richtung der Axen wirkende Kraft versteht, genau so, wie solches oben festgesetzt worden ist.

Dabei ist P selbst, in welcher Richtung diese Kraft auch gedacht seyn mag, doch immer absolut (positiv) gedacht. — Dies ist in den Anwendungen besonders zu beachten.

Endlich gilt dasselbe auch noch, wenn einer oder der andere dieser Winkel $\alpha$ oder $\beta$ ein rechter, oder Null, oder zweien Rechten gleich werden sollte, so daß $\cos\alpha$ oder $\cos\beta$ entweder Null oder $+1$ oder $-1$ wäre *).

IV. Dabei ist aber allemal und in jedem Falle nach (Geometrie §. 1.)

$$\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 = 1,$$

und auch

$$\cos\beta = \pm\sin\alpha, \text{ je nachdem } \beta \left\{ \begin{matrix} \text{spitz} \\ \text{stumpf} \end{matrix} \right\}$$

und

$$\cos\alpha = \pm\sin\beta, \text{ je nachdem } \alpha \left\{ \begin{matrix} \text{spitz} \\ \text{stumpf} \end{matrix} \right\}$$

## §. 12.

Aufgabe. Es wirken zwei Kräfte gleichzeitig auf einen Atom in O, nämlich $P_1$ in der Richtung OM (Fig. 21.), welche mit OX und OY bezüglich die Winkel $\alpha_1$ und $\beta_1$ macht, und $P_2$ in der Richtung ON, welche mit OX und OY bezüglich die Winkel $\alpha_2$ und $\beta_2$ macht, während OX und OY auf einander senkrecht stehen. — Man soll die einzige Kraft $P_0$ finden, ihrer Größe und ihrer Richtung nach, welche dasselbe leistet.

Auflösung. Statt $P_1$ setze man nach (§. 11. III.) die beiden Kräfte

*) Liegt die Kraft P in der Axe OX selbst, aber in der Richtung XO, so wird statt P nichts desto weniger eine positive Zahl gesetzt; aber die eine Seiten-Kraft $P\cdot\cos\alpha$, wird nun $P\cdot(-1)$, d. h. $-P$, die andere $P\cdot\cos\beta$ dagegen, $=0$; und so kommt also statt P in der Richtung XO jetzt $-P$ in der Richtung OX in Rechnung, gerade so wie solches nach unseren Anordnungen seyn muß. — Statt P selbst muß also immer eine positive Zahl gesetzt werden, welche Richtung P haben mag.

$P_1 \cdot \cos\alpha_1$ in der Richtung OX
und $P_1 \cdot \cos\beta_1$ in der Richtung OY;
eben ſo ſetze man ſtatt $P_2$ die beiden Kräfte
$P_2 \cdot \cos\alpha_2$ in der Richtung OX
und $P_2 \cdot \cos\beta_2$ in der Richtung OY.

Statt der beiden Kräfte $P_1$ und $P_2$ kann man alſo ſetzen nach (§. 11. I.) die beiden Kräfte

1) $X = P_1 \cdot \cos\alpha_1 + P_2 \cdot \cos\alpha_2$ in der Richtung OX
und 2) $Y = P_1 \cdot \cos\beta_1 + P_2 \cdot \cos\beta_2$ in der Richtung OY,

welche poſitiv oder negativ, auch Null ſeyn können, und welche genau daſſelbe leiſten (wenn ſie gleichzeitig auf den Atom in O wirken), was die gleichzeitig wirkenden Kräfte $P_1$ und $P_2$ ausrichten.

Statt dieſer beiden Kräfte X und Y, die in den Richtungen OX und OY wirken, kann man aber wieder nach (§. 11. II.) eine einzige Kraft $P_0$ ſetzen, welche mit OX und OY die Winkel $\alpha_0$ und $\beta_0$ macht, und welche ihrer Größe nach durch

3) $P_0 = \sqrt{X^2 + Y^2}$
$= \sqrt{(P_1 \cdot \cos\alpha_1 + P_2 \cdot \cos\alpha_2)^2 + (P_1 \cdot \cos\beta_1 + P_2 \cdot \cos\beta_2)^2}$,

der Richtung nach aber durch

4) $\cos\alpha_0 = \frac{X}{P_0}$ und 5) $\cos\beta_0 = \frac{Y}{P_0}$

ausgedrückt ſeyn wird; wo $P_0$ immer abſolut (nicht negativ) gedacht iſt, ſo daß $\cos\alpha_0$ mit X zugleich poſitiv oder negativ oder Null iſt, und eben ſo $\cos\beta_0$ mit Y zugleich; alſo daß $\alpha_0$ ſpitz oder ſtumpf oder ein rechter Winkel wird, je nachdem X ſich poſitiv oder negativ oder Null berechnet, — und $\beta_0$ ſpitz oder ſtumpf oder ein rechter Winkel wird, je nachdem Y poſitiv oder negativ oder Null geworden iſt.

## §. 13.

### Das Kräften-Parallelogramm.

Berechnet man danach die Kraft $P_0$ ihrer Größe und Richtung nach, ſo findet man:

Wenn zwei Kräfte $P_1$ und $P_2$ gleichzeitig auf einen Atom O wirken, unter einem beliebigen spitzen, rechten oder stumpfen Winkel $\varphi$, so ist die einzige Kraft $P_0$, welche an die Stelle dieser beiden gesetzt werden kann, und welche dann genau dasselbe leistet, was diese beiden leisten, allemal der Größe und der Richtung nach die Diagonale des Parallelogramms, welches von den Richtungen der Kräfte $P_1$ und $P_2$ gebildet wird, und diese Kräfte $P_1$ und $P_2$ selbst, in Linien ausgedrückt, zu Seiten hat *).

Die

*) Die Rechnungen führen sich am bequemsten aus, wenn man die Diagonale OS (Fig. 27.) des Parallelogramms OMNS (dessen Seiten $OM = P_1$ und $ON = P_2$ sind, und dessen Winkel $MON = \varphi$ ist) zur Axe OX nimmt, so wie senkrecht darauf die Axe OY. Dann ist $MOX = \alpha_1$ $NOX = \alpha_2$ und $\alpha_1 + \alpha_2 = \varphi$. — Da $\varphi < 180$ seyn muß, so ist einer der beiden Winkel $\alpha_1$ oder $\alpha_2$ immer spitz; es sey $\alpha_2$ der spitze; also $\alpha_1$ spitz, recht oder stumpf. Dann ist $\beta_2 = 90 + \alpha_2$, $\beta_1 = \pm(90 - \alpha_1)$, je nachdem $\alpha_1$ spitz oder stumpf ist; folglich ist allemal

$$1) \qquad X = P_1 \cdot \cos\alpha_1 + P_2 \cdot \cos\alpha_2$$

und

$$2) \qquad Y = P_1 \cdot \sin\alpha_1 - P_2 \cdot \sin\alpha_2.$$

Substituirt man diese Werthe X und Y in die Gleichung

$$3) \qquad P_0 = \sqrt{X^2 + Y^2},$$

und bedenkt man dabei, daß

$$\cos\alpha_1 \cdot \cos\alpha_2 - \sin\alpha_1 \cdot \sin\alpha_2 = \cos(\alpha_1 + \alpha_2) = \cos\varphi$$

ist, so erhält man

$$4) \qquad P_0 = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + 2P_1 \cdot P_2 \cdot \cos\varphi}.$$

Weil jedoch im Dreieck OSN der Winkel $ONS = 180° - \varphi$ ist, so hat man auch, wenn man OM statt NS schreibt, in dem Dreieck OSN

$$5) \qquad OS = \sqrt{OM^2 + ON^2 + 2OM \cdot ON \cdot \cos\varphi};$$

also ist, wenn $OM = P_1$, $ON = P_2$ genommen worden, auch nothwendig aus (4. und 5)

$$6) \qquad OS = P_0;$$

d. h. $P_0$ ist der Größe nach die Diagonale OS des Parallelogramms OMNS.

Weil aber in dem Dreieck ONS

Dieser Satz heißt der „Satz vom Kräften-Parallelogramm.“ Er ist hier als eine nothwendige Folge aus den Postulaten des (§. 10.) hervorgegangen. Wird er angewandt, um statt zweier gleichzeitig wirkender Kräfte eine einzige zu finden, die dasselbe leistet, so nennt man dies das Zusammensetzen der Kräfte; wird er aber dazu verwandt, um statt einer gegebenen Kraft $P_0$ zwei andere $P_1$ und $P_2$ zu finden, welche, gleichzeitig den Atom angreifend, genau dasselbe leisten, so heißt dies das Zerlegen der Kräfte. — Die Kraft $P_0$ heißt die mittlere Kraft, die Kräfte $P_1$ und $P_2$ dagegen werden die Seiten-Kräfte genannt.

Diese letztere Aufgabe aber: „die Kraft $P_0$ in zwei andere $P_1$ und $P_2$ zu zerlegen,“ ist offenbar eine unbestimmte Aufgabe, da von den vier Stücken $P_1$ und $P_2$ und den Winkeln $\varphi$ und $\psi$ irgend zwei beliebig angenommen, und nur die beiden an-

---

7) $$\frac{OS}{\sin ONS} = \frac{ON}{\sin OSN} = \frac{NS}{\sin NOS}$$

ist, d. h.

8) $$\frac{P_0}{\sin\varphi} = \frac{P_2}{\sin\alpha_1} = \frac{P_1}{\sin\alpha_2},$$

so erhält man

9) $$\frac{P_1}{P_0} = \frac{\sin\alpha_2}{\sin\varphi} \text{ und } \frac{P_2}{P_0} = \frac{\sin\alpha_1}{\sin\varphi},$$

und die Gleichung

10) $$\cos\alpha_0 = \frac{X}{P_0} = \frac{P_1\cdot\cos\alpha_1 + P_2\cdot\cos\alpha_2}{P_0}$$

wird daher jetzt

11) $$\cos\alpha_0 = \frac{\sin\alpha_2\cdot\cos\alpha_1 + \sin\alpha_1\cdot\cos\alpha_2}{\sin\varphi}$$

$$= \frac{\sin(\alpha_1+\alpha_2)}{\sin\varphi} = \frac{\sin\varphi}{\sin\varphi} = 1,$$

oder $\alpha_0 = 0$; d. h. die Richtung der Kraft $P_0$ fällt mit der Axe OX, d. h. mit der Diagonale OS des Parallelogramms, zusammen.

dern, vermöge dieses Satzes vom Kräften-Parallelogramm, dazu gefunden werden können.

Anmerk. Man kann nun auch leicht, wenn beliebig viel Kräfte in beliebigen Richtungen einen Atom O gleichzeitig angreifen, diese Richtungen mögen alle in einer und derselben Ebene liegen oder nicht, die einzige Kraft finden, welche genau dasselbe leistet, und welche noch immer die mittlere Kraft genannt wird. Man darf zu dem Ende nur die erste und zweite Kraft mittelst des Kräften-Parallelogramms in eine vereinigen, diese und die dritte wieder in eine, diese und die vierte auf's neue in eine einzige zusammensetzen, u. s. w. f., was allemal angeht, es mag jedes neue Parallelogramm mit dem vorhergegangenen in derselben Ebene liegen oder nicht, — und man wird zuletzt, statt aller Kräfte nur eine einzige haben, welche genau dasselbe leistet, was alle zusammen, wenn sie gleichzeitig angreifen, leisten.*). Statt jedoch so zu verfahren, wenden wir lieber, das Kräften-Parallelogramm bei Seite setzend, bloß die im (§. 11.) bequemer ausgedrückten Postulate des (§. 10.) an, genau so wie solches im (§. 12.) geschehen ist, und wie die nachstehenden (§§.) dies näher noch aus einander setzen.

## §. 14.

Aufgabe. Es sind gegeben n Kräfte $P_1, P_2, P_3 \cdots P_n$ deren Richtungen alle in einer und derselben Ebene liegen und dadurch gegeben sind, daß man die Winkel $\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2; \alpha_3, \beta_3; \cdots; \alpha_n, \beta_n$ kennt, welche sie mit zweien auf einander senkrechten Axen OX und OY machen. Diese n Kräfte greifen einen Atom O gleichzeitig an; man soll die mittlere Kraft P, ihrer Größe und ihrer Richtung nach finden; d. h. man soll

*) Es kann sich freilich dabei treffen, daß die durch Vereinigung zweier oder mehrerer Kräfte erhaltene mittlere Kraft der nächsten, mit der sie auf's neue zusammengesetzt werden soll, genau gleich und genau entgegen ist. Dann würden sich diese Kräfte einander aufheben und vernichten; und bloß die noch übrigen Kräfte würden als allein wirkend angesehen werden müssen.

$P_0$ finden und die Winkel $\alpha_0$, $\beta_0$, welche dieſe Kraft $P_0$ mit denſelben Axen OX und OY macht.

Auflöſung. Statt jeder Kraft, z. B. ſtatt der Kraft $P_r$, ſetze man die beiden Seiten-Kräfte

$$P_r \cdot \cos\alpha_r \text{ in der Richtung OX}$$

und $$P_r \cdot \cos\beta_r \text{ in der Richtung OY.}$$

Dann vereinigt man alle in der Richtung OX wirkenden Kräfte in eine einzige X, ſo wie alle in der Richtung OY wirkenden, in eine einzige Y, ſo daß man hat

1) $X = P_1 \cdot \cos\alpha_1 + P_2 \cdot \cos\alpha_2 + P_3 \cdot \cos\alpha_3 + \cdots + P_n \cdot \cos\alpha_n$;

2) $Y = P_1 \cdot \cos\beta_1 + P_2 \cdot \cos\beta_2 + P_3 \cdot \cos\beta_3 + \cdots + P_n \cdot \cos\beta_n$.

Zuletzt vereinige man dieſe beiden Kräfte X und Y, welche in den Richtungen OX und OY wirken, in eine einzige $P_0$, welche nach (§§. 11. 12.) ihrer Größe nach gefunden wird aus

3) $$P_0 = \sqrt{X^2 + Y^2},$$

während zu gleicher Zeit ihre Richtung beſtimmt iſt durch die Gleichungen

4) $\cos\alpha_0 = \frac{X}{P_0}$ und 5) $\cos\beta_0 = \frac{Y}{P_0}$;

alles genau dem Verfahren des (§. 12.) analog.

Anmerk. Da auch $n = 2$ ſeyn kann, ſo enthält dieſe Aufgabe die des (§. 12.) in ſich.

## §. 15.

I. Drei Kräfte X, Y, Z wirken in drei auf einander ſenkrechten Richtungen OX, OY, OZ gleichzeitig auf den Atom O. Man ſoll die einzige Kraft P finden, ihrer Größe und ihrer Richtung nach, welche daſſelbe leiſtet.

Aus den beiden Kräften $OM = X$ (Fig. 28.) und $ON = Y$, ſetze man die mittlere OS zuſammen; dann hat man

$$OS = \sqrt{X^2 + Y^2}.$$

Trägt man nun auf die dritte Axe OZ, welche ſenkrecht auf der Ebene XOY, alſo auch ſenkrecht auf OS ſteht, die Kraft $Z = OQ$ hin, und zieht man das Rechteck OSQT aus, ſo iſt

OT die gesuchte Kraft P der Größe und der Richtung nach, immer nach denselben (§§. 11. 12.). — Nun ist aber

$$OT^2 = OS^2 + OQ^2,$$

also

$$P^2 = X^2 + Y^2 + Z^2,$$

demnach

$$1) \qquad P = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

Bezeichnet man nun die 3 Winkel

$$TOX, \quad TOY, \quad TOZ$$

bezüglich durch $\alpha, \quad \beta, \quad \gamma,$

und denkt man daran, daß TM senkrecht auf OX, TN senkrecht auf OY, und TQ senkrecht auf OZ steht, so ist in den rechtwinklichen Dreiecken TOM, TON und TOQ augenblicklich (§. 1. Geom.)

$$\cos\alpha = \frac{OM}{OT}, \quad \cos\beta = \frac{ON}{OT} \text{ und } \quad \cos\gamma = \frac{OQ}{OT};$$

also hat man gefunden

$$2) \quad \cos\alpha = \frac{X}{P}, \quad \cos\beta = \frac{Y}{P} \text{ und } \cos\gamma = \frac{Z}{P},$$

woraus wieder

$$3) \quad X = P\cdot\cos\alpha, \quad Y = P\cdot\cos\beta \text{ und } Z = P\cdot\cos\gamma$$

hervorgeht *).

II. Umgekehrt: soll eine Kraft P, die mit den 3 auf einander senkrechten Axen OX, OY und OZ die Winkel $\alpha, \beta, \gamma$ macht, in 3 Seiten-Kräfte zerlegt werden, welche in den Richtungen dieser Axen wirken, so ergeben sich augenblicklich die Kräfte

*) Alle diese Resultate gelten auch, wenn die Kräfte X, Y, Z zum Theil oder alle in dem Sinne des (§. 11.) als negative in Rechnung gebracht worden wären. Man müßte dann nur nicht übersehen, daß keine Kraft P negativ ist, sondern daß jede solche Kraft P immer absolut gedacht wird, so daß aus den Gleichungen (2.) die Winkel $\alpha, \beta, \gamma$ spitz, stumpf oder als rechte Winkel hervorgehen, je nachdem die Zähler zur Rechten, nämlich X, Y, Z bezüglich positiv, negativ oder Null sind.

$P \cdot \cos\alpha$ in der Richtung OX,
$P \cdot \cos\beta$ in der Richtung OY,
und $P \cdot \cos\gamma$ in der Richtung OZ.

Dabei sind diese Kräfte positiv, negativ oder Null, wirken also in den angegebenen Richtungen der Axen, oder in den genau entgegengesetzten Richtungen, oder gar nicht, je nachdem die Winkel $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ spitz, stumpf oder rechte Winkel sind.

## §. 16.

Man kann nun statt dreier Kräfte X, Y, Z, welche in den auf einander senkrechten Richtungen OX, OY, OZ wirkend (übrigens positiv, negativ oder Null) gedacht werden, drei andere Kräfte $X'$, $Y'$, $Z'$ finden, welche in den Richtungen dreier anderer rechtwinklichen Axen $OX'$, $OY'$, $OZ'$ wirken, ebenfalls durch positive oder negative Zahlen (oder auch durch die Null) ausgedrückt seyn können, und welche genau dasselbe leisten, was die gegebenen X, Y, Z leisten, wenn sie nur wiederum gleichzeitig angreifen.

Es seyen nämlich $\lambda$, $\mu$, $\nu$ die Winkel, welche die Axe $OX'$ mit den 3 alten Axen OX, OY und OZ macht, und durch welche die Lage von $OX'$ bestimmt ist. Setzt man nun nach (§. 15. I.) die X, Y, Z in die einzige P zusammen, welche mit den Axen OX, OY, OZ die durch die Gleichungen

1) $X = P \cdot \cos\alpha$, $Y = P \cdot \cos\beta$ und $Z = P \cdot \cos\gamma$

gegebenen Winkel $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ macht; und ist $\alpha'$ der Winkel, welchen diese Kraft P noch mit der neuen Axe $OX'$ macht, so hat man

2) $X' = P \cdot \cos\alpha'$.

Weil aber nach (Geom. §. 1. VII. 7.)

3) $\cos\alpha' = \cos\alpha \cdot \cos\lambda + \cos\beta \cdot \cos\mu + \cos\gamma \cdot \cos\nu$

ist, so folgt, wenn man diese Gleichung mit P multiplizirt, und zur Rechten statt $P \cdot \cos\alpha$, $P \cdot \cos\beta$, $P \cdot \cos\gamma$ ihre Werthe X, Y, Z aus (1.) substituirt,

4) $P \cdot \cos\alpha' = X \cdot \cos\lambda + Y \cdot \cos\mu + Z \cdot \cos\nu$.

„Man erhält also die nach der neuen Axe $OX'$ zerlegte

„Kraft $X'$ oder $P \cdot \cos\alpha'$, wenn man jede der in den alten rechtwinklichen Axen wirkenden Kräfte X, Y, Z, in welche sich P ebenfalls zerlegen läßt, bezüglich mit den Kosinussen der Winkel $\lambda$, $\mu$, $\nu$ multiplizirt, welche die alten Axen mit der neuen $OX'$ machen, die 3 Produkte aber zuletzt addirt."

Sind daher $\lambda'$, $\mu'$, $\nu'$ die Winkel, welche $OY'$ mit OX, OY, OZ macht, und $\lambda''$, $\mu''$, $\nu''$ die Winkel, welche $OZ'$ mit OX, OY, OZ bildet, so hat man aus (4.), und wenn man für jede der beiden andern neuen Axen dieselben Schlüsse macht,

$$5)\quad \begin{cases} X' = X\cdot\cos\lambda + Y\cdot\cos\mu + Z\cdot\cos\nu \\ Y' = X\cdot\cos\lambda' + Y\cdot\cos\mu' + Z\cdot\cos\nu' \\ Z' = X\cdot\cos\lambda'' + Y\cdot\cos\mu'' + Z\cdot\cos\nu''. \end{cases}$$

Zuletzt ist aber noch

$$6)\quad \sqrt{X'^2+Y'^2+Z'^2} = \sqrt{X^2+Y^2+Z^2},$$

die einzige mittlere Kraft, welche statt X, Y, Z und auch statt $X'$, $Y'$, $Z'$ gesetzt werden kann, und welche mit den alten Axen OX, OY, OZ die in (1.) gegebenen Winkel $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, mit den neuen Axen $OX'$, $OY'$, $OZ'$ aber die durch die Gleichungen

$$7)\quad X' = P\cdot\cos\alpha',\quad Y' = P\cdot\cos\beta',\quad Z' = P\cdot\cos\gamma'$$

gegebenen Winkel $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ macht.

## §. 17.

Es wirken auf einen Atom O gleichzeitig n Kräfte $P_1$, $P_2$ ... $P_n$, welche mit dreien auf einander senkrechten Axen OX, OY, OZ bezüglich die Winkel $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$; $\alpha_2$, $\beta_2$, $\gamma_2$; ... $\alpha_n$, $\beta_n$, $\gamma_n$ machen. Man soll die einzige Kraft $P_0$ finden, ihrer Größe und ihrer Richtung nach, welche genau dasselbe leistet, was die gegebenen Kräfte leisten.

Auflösung. Nach dem vorhergehenden (§. 16.) zerlege man jede der Kräfte, z. B. $P_r$, in die 3 Seiten-Kräfte

$P_r\cdot\cos\alpha_r$ in der Richtung OX,

$P_r\cdot\cos\beta_r$ in der Richtung OY,

und $P_r\cdot\cos\gamma_r$ in der Richtung OZ.

Bildet man sich nun 3 Kräfte, X in der Richtung OX,

X in der Richtung OX, und Y in der Richtung OY, mittelst der Gleichungen

1) $X = P_1 \cdot \cos\alpha_1 + P_2 \cdot \cos\alpha_2 + P_3 \cdot \cos\alpha_3 + \cdots + P_n \cdot \cos\alpha_n$

2) $Y = P_1 \cdot \cos\beta_1 + P_2 \cdot \cos\beta_2 + P_3 \cdot \cos\beta_3 + \cdots + P_n \cdot \cos\beta_n$

3) $Z = P_1 \cdot \cos\gamma_1 + P_2 \cdot \cos\gamma_2 + P_3 \cdot \cos\gamma_3 + \cdots + P_n \cdot \cos\gamma_n$,

so stehen diese 3 Kräfte X, Y, Z statt aller gegebenen Kräfte. Zuletzt vereinigt man diese 3 Kräfte X, Y, Z nach dem (§. 15.) wieder in eine einzige

4) $P_0 = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$;

und dabei findet sich dann noch, wenn $\alpha_0$, $\beta_0$, $\gamma_0$ die Winkel sind, welche die Richtung der Kraft $P_0$ mit den Axen macht,

5) $\cos\alpha_0 = \frac{X}{P_0}$, 6) $\cos\beta_0 = \frac{Y}{P_0}$,

und 7) $\cos\gamma_0 = \frac{Z}{P_0}$,

wo $P_0$ allemal absolut (nicht negativ) genommen ist, so daß $\alpha_0$, $\beta_0$, $\gamma_0$ spitz oder stumpf oder rechte Winkel seyn werden, je nachdem X, Y, Z positiv oder negativ oder Null sich herausstellen.

Anmerk. Diese Aufgabe enthält wieder die Aufgabe des (§. 14.), also auch die des (§. 12.) als besondere Fälle in sich, weil im Falle der Aufgabe des (§. 14.), wenn man die Axen OX, OY in der Ebene der Kräfte nimmt, die Winkel $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \cdots \gamma_n$ alle einander gleich und rechte Winkel sind, daher Z und $\cos\gamma_0$ der Null gleich werden, so daß $\gamma_0$ selbst ebenfalls ein rechter Winkel wird.

## §. 17. b.

### Das Kräften-Parallelepipedum.

Berechnet man danach die mittlere Kraft aus 3 Kräften $P_1$, $P_2$ und $P_3$, welche einen Atom O in beliebigen Richtungen angreifen, so findet sich solche der Größe und der Richtung nach, der Diagonale eines Parallelepipedums gleich, dessen 3 in O

zusammenstoßende Kanten der Größe und der Richtung nach die als Linien vorgestellten Kräfte $P_1$, $P_2$, $P_3$ sind.

Dasselbe findet sich übrigens bequemer, wenn man 2 der 3 Kräfte $P_1$, $P_2$ und $P_3$ mittelst des Kräften-Parallelogramms durch Konstruktion in eine einzige Kraft vereinigt, und diese dann mit der dritten Kraft auf's neue geometrisch zusammensetzt.

Diese Wahrheit wird übrigens der „Satz vom Kräften-Parallelepipedum" genannt. — Nach demselben kann man eine Kraft P, welche einen Atom O angreift, allemal sogleich durch bloße geometrische Konstruktion, nach dreien gegebenen beliebigen Richtungen in 3 Seiten-Kräfte zerlegen (ohne daß die Richtungen dieser letztern auf einander senkrecht zu stehen brauchen). — Stehen die 3 gegebenen Richtungen, wie im (§. 15.), auf einander senkrecht, so hat man nur einen besondern Fall dieses Satzes vom Kräften-Parallelepipedum.

# Mechanik des Atoms.

## Drittes Kapitel.

### Vom Gleichgewicht der Kräfte, welche einen Atom angreifen.

### Erste Abtheilung.

#### Bedingungs-Gleichungen des Gleichgewichts eines Atoms.

§. 18.

Wenn mehrere Kräfte an einem Atom gleichzeitig wirken, in ihren Wirkungen aber dergestalt wechselseitig sich aufheben und vernichten, daß gar keine Wirkung erfolgt, so sagt man: „diese Kräfte halten einander das Gleichgewicht," oder „sie stehen im Gleichgewicht."

Jede Kraft, deren dauernd gedachte Wirkung dauernd vernichtet wird, ohne daß sie eine Bewegung hervorbringen kann, wird Druck genannt.

§. 19.

Hieraus folgt:

I. Zwei an einem Atom gleichzeitig wirkende Kräfte halten einander allemal im Gleichgewicht, aber auch nur dann, wenn die eine derselben der andern genau gleich, aber der Richtung nach genau entgegengesetzt ist.

II. Drei an einem Atom gleichzeitig wirkende Kräfte P, Q, R, welche unter ſich die Winkel (QR), (PR) und (PQ) bilden, halten einander das Gleichgewicht, wenn irgend eine davon, z. B. R, der mittlern Kraft, welche aus der Vereinigung der beiden andern Kräfte P und Q (mittelſt des Kräften-Parallelogramms des §. 12.) hervorgeht, der Größe nach genau gleich und der Richtung nach genau entgegengeſetzt iſt. — Sind daher ſolche 3 Kräfte P, Q, R im Gleichgewicht, ſo müſſen ſie nothwendig in einer und derſelben Ebene wirken; und es geht aus der trigonometriſchen Betrachtung des Kräften-Parallelogramms, und der durch die Diagonale und durch die Seiten-Kräfte gebildeten Dreiecke ſogleich hervor:

$$1)\qquad \frac{P}{\sin(QR)} = \frac{Q}{\sin(PR)} = \frac{R}{\sin(PQ)};$$

und 2)
$$P = \sqrt{Q^2 + R^2 + 2Q \cdot R \cdot \cos(QR)};$$
$$Q = \sqrt{P^2 + R^2 + 2P \cdot R \cdot \cos(PR)};$$
$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2P \cdot Q \cdot \cos(PQ)}.$$

Aus je zweien von dieſen 6 Gleichungen kann man aber die übrigen allemal auf rein trigonometriſchem Wege ableiten (wenn man nur nicht überſieht, daß die Summe der 3 Winkel (PQ), (PR) und (QR) genau $360^0$ iſt).

III. Beliebig viel z. B. n Kräfte, die einen Atom gleichzeitig angreifen, halten einander das Gleichgewicht, wenn irgend eine der n Kräfte genau gleich und entgegengeſetzt iſt, der mittlern Kraft, welche aus der Vereinigung der übrigen $n-1$ Kräfte hervorgeht. — Umgekehrt: Das Gleichgewicht exiſtirt nicht bloß allemal, ſondern kann auch nur dann exiſtiren, wenn dieſe Bedingung erfüllt iſt. — Liegen demnach $n-1$ von den n Kräften, die an einem Atom einander das Gleichgewicht halten, in einer und derſelben Ebene, ſo liegt die $n^{te}$ Kraft nothwendig in derſelben Ebene, nach (§. 14.). —

## §. 20.

Wirken daher, genau wie im (§. 17.), die dortigen n Kräfte auf einen Atom, ſo ſind dieſe n Kräfte alle im Gleichgewicht,

so oft unter Beibehaltung der dortigen Bezeichnung die 3 Gleichungen $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$ erfüllt sind, so oft also die Gleichungen

1) $P_1 \cdot \cos\alpha_1 + P_2 \cdot \cos\alpha_2 + P_3 \cdot \cos\alpha_3 + \cdots + P_n \cdot \cos\alpha_n = 0$

2) $P_1 \cdot \cos\beta_1 + P_2 \cdot \cos\beta_2 + P_3 \cdot \cos\beta_3 + \cdots + P_n \cdot \cos\beta_n = 0$

und 3) $P_1 \cdot \cos\gamma_1 + P_2 \cdot \cos\gamma_2 + P_3 \cdot \cos\gamma_3 + \cdots + P_n \cdot \cos\gamma_n = 0$

statt finden, weil sich diese Resultate ergeben, wenn man nach (§. 17.) die ersten $n-1$ Kräfte $P_1$ bis $P_{n-1}$ in eine einzige (P mit der Richtung $\alpha$, $\beta$, $\gamma$) vereinigt, diese einzige mittlere Kraft P aber, der letztern Kraft $P_n$ gleich und genau entgegengesetzt nimmt. Diese eben genannten Bedingungen sind aber erfüllt, sobald man

$$P_n \cdot \cos\alpha_n = -P \cdot \cos\alpha, \quad P_n \cdot \cos\beta_n = -P \cdot \cos\beta$$

und $$P_n \cdot \cos\gamma_n = -P \cdot \cos\gamma$$

setzt; — und diese 3 Gleichungen fallen mit den vorstehenden (1. — 3.) genau zusammen *).

Diese 3 Gleichungen für das Gleichgewicht sind **nothwendig** und **ausreichend**. Sie werden häufig kürzer so geschrieben:

$$\text{I. } \Sigma(P \cdot \cos\alpha) = 0; \quad \text{II. } \Sigma(P \cdot \cos\beta) = 0;$$
$$\text{III. } \Sigma(P \cdot \cos\gamma) = 0;$$

wo das vorgesetzte $\Sigma$ die **Summe** aller der durch $P \cdot \cos\alpha$, oder $P \cdot \cos\beta$, oder $P \cdot \cos\gamma$ vorgestellten Produkte aus jeder einzelnen Kraft multiplizirt mit dem Kosinus des Winkels, den sie mit der Axe macht, andeutet.

**Anmerk. 1.** Man kann den Beweis des letztern Satzes auch so führen: Wäre eine der 3 Kräfte X, Y, Z des (§. 17.)

---

*) Diese 3 (Bedingungs-) Gleichungen des Gleichgewichts (1.—3.) ergeben sich auch daraus, daß man nach (§. 17.) aus allen n Kräften die mittlere $P_0$ sucht, und solche $= 0$ setzt. Aus

$$P_0 = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = 0$$

folgt aber

$X^2 + Y^2 + Z^2 = 0$, also auch $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$;

in so ferne die Quadrate von X, Y, Z nie negativ seyn können.

nicht Null, die beiden andern aber = 0, so würde diese einzige Kraft nicht vernichtet, also wäre nicht Gleichgewicht. — Und wäre nur eine einzige oder gar keine der Kräfte X, Y, Z der Null gleich, so würden sich die übrigen allemal in eine einzige Kraft vereinigen lassen, welche durch nichts vernichtet würde; also wäre wiederum nicht Gleichgewicht.

Anmerk. 2. Diese Beweisführung findet auch statt, wenn man 3 auf einander nicht senkrechte, sondern schiefe Axen durch den Atom O legen und jede Kraft P mittelst des Kräften-Parallelepipedums (§. 17. b.) in 3 Kräfte zerlegen wollte, deren Richtungen mit diesen schiefen Axen zusammenfallen. — Es können also, auch wenn man die Kräfte nach 3 schiefen Richtungen zerlegt, alle gegebenen Kräfte nicht einander das Gleichgewicht halten, wenn nicht die Kräfte, welche in einer und derselben Axe wirken, einzeln mit einander im Gleichgewicht stehen.

## §. 21.

Liegen die n Kräfte alle in einer und derselben Ebene, in welcher zugleich die auf einander senkrechten Axen OX und OY gedacht werden, so sind für das Gleichgewicht **nothwendig** und **ausreichend** die beiden Gleichungen

I. $\Sigma(P \cdot \cos\alpha) = 0$ und II. $\Sigma(P \cdot \cos\beta) = 0$;

weil die (III. des §. 20.) dann jedesmal identisch $0 = 0$ wird, also immer erfüllt ist.

Anmerk. 1. Diese Gleichungen für das Gleichgewicht in den (§§. 20. und 21.) lassen immer eine der Kräfte, ihrer Größe und Richtung nach finden, so daß sie mit den übrigen Kräften, wenn sie alle gleichzeitig den Atom angreifen, im Gleichgewicht steht.

Sind aber die Kräfte (nebst ihren Richtungen) alle gegeben, so daß nichts gesucht ist, so müssen diese Gleichungen von den gegebenen Kräften gerade erfüllt seyn, wenn Gleichgewicht existiren soll. Daher nennt man diese Gleichungen auch die **Bedingungs-Gleichungen des Gleichgewichts.**

Anmerk. 2. Würde man in dem Falle des (§. 21.), wo

nämlich die Kräfte alle in einer und derselben Ebene wirken, jede Kraft P nach dem Kräften-Parallelogramm in zwei andere zerlegen, nach Axen, die nicht senkrecht, sondern schief auf einander stehen, so könnte auch nur dann Gleichgewicht eintreten, wenn die in der Richtung einer jeden einzelnen dieser Axen wirkenden Kräfte einander das Gleichgewicht halten, wie nach (Anmerk. 1. 2. zu §. 20.) bewiesen wird.

## §. 22.

I. Ist der Atom, der von n Kräften angegriffen wird, gezwungen auf einer gegebenen (ebenen oder krummen) Fläche L zu bleiben, so ist er im Gleichgewicht (d. h. es kann keine Bewegung dieses Atoms statt finden), wenn die mittlere Kraft R, welche aus der Vereinigung dieser n Kräfte hervorgeht, (entweder an sich Null ist, oder doch) den Atom senkrecht auf die gegebene Fläche L (also in der Richtung der Normale) andrückt; weil in diesem Zustande der Atom, sobald er nach irgend einer Richtung in der Fläche L sich bewegen wollte, mit demselben Rechte gleichzeitig nach jeder andern Richtung in derselben Fläche L sich bewegen müßte.

II. Wirkte aber diese mittlere Kraft R nicht in der Richtung der Normale, sondern machte sie mit der Normale den (spitzen) Winkel $\psi$, so würden diese Richtung und die Normale eine Ebene bilden, welche die gegebene Fläche L oder ihre Tangential-Ebene in einer auf der Normale senkrechten Richtung (d. h. in einer Tangente) schnitte. — Diese Kraft R könnte dann in die beiden Seiten-Kräfte $R \cdot \cos\psi$ in der Richtung der Normale und $R \cdot \sin\psi$ in der Richtung der Tangente zerlegt werden, von denen die erstere nach (I.) nichts wirken, die andere aber den Atom in der Fläche L, in der Richtung dieser Tangente fortbewegen würde. Der Atom ist also dann nicht im Gleichgewicht, sondern er fängt an, in einer, durch die Richtung der mittlern Kraft R gegebenen Richtung in der gegebenen Fläche L sich zu bewegen.

III. In dem Falle, wo der Atom O in der Fläche L zu

bleiben gezwungen ist, ist daher zum Gleichgewicht *nothwendig* und *ausreichend*, daß die mittlere Kraft R den Atom senkrecht gegen die gegebene Fläche andrückt; und im Falle er gegen die eine Seite der Fläche hin sich von ihr entfernen könnte, daß die Wirkung dieser mittlern Kraft R nach der entgegengesetzten Seite hin statt habe.

IV. Sind demnach die n Kräfte des (§. 17.) gegeben, und halten sie mit Hülfe der gegebenen Fläche L den Atom in ihr im Gleichgewicht, so darf man nur der mittlern Kraft R, welche aus der Vereinigung dieser n Kräfte hervorgeht, eine eben so große Kraft R genau entgegensetzen (also in der Richtung der Normale und nach derjenigen Seite dieser Richtung hin, nach welcher der Atom sich von seiner Fläche entfernen kann), und alle n+1 Kräfte halten einander nothwendig das Gleichgewicht, auch wenn der Atom *nun* ganz frei, also unabhängig von der gegebenen Fläche gedacht wird. — Sind also $\lambda, \mu, \nu$ die Winkel, welche diese letztgedachte Kraft mit den Axen OX, OY und OZ bildet, so hat man für das Gleichgewicht die 3 Gleichungen des (§. 20.) nämlich

$$\text{I.} \quad R \cdot \cos\lambda + \Sigma(P \cdot \cos\alpha) = 0;$$

$$\text{II.} \quad R \cdot \cos\mu + \Sigma(P \cdot \cos\beta) = 0;$$

und $$\text{III.} \quad R \cdot \cos\nu + \Sigma(P \cdot \cos\gamma) = 0.$$

Aus diesen Gleichungen kann man nun die Kraft R und noch zwei andere Unbekannte finden; oder man kann den unbekannten Druck R aus diesen 3 Gleichungen eliminiren, und erhält die nun existirenden *zwei Bedingungs-Gleichungen des Gleichgewichts* zwischen den, auf den Atom wirkenden und als gegeben gedachten n Kräften P.

Aus der Gleichung der Fläche L werden aber die Winkel $\lambda, \mu, \nu$, welche die Normale mit den Axen macht, nach (§. 14. II. Geom.) ohne weiteres gefunden.

## §. 23.

Ist der Atom O gezwungen auf einer Linie l zu bleiben, die gerade oder krumm, und im letztern Fall einfach oder dop-

pelt gekrümmt seyn kann, und welche als Durchschnitts-Linie zweier gegebenen (ebenen oder krummen) Flächen L und L' gegeben ist, so überzeugt man sich auf analogem Wege bald

daß es zum Gleichgewicht des Atoms nothwendig ist und ausreicht, daß die n auf den Atom wirkenden Kräfte des (§. 17.) eine mittlere Kraft Q liefern, welche den Atom senkrecht auf diese Linie l andrückt, übrigens beliebig groß seyn kann.

Denkt man sich daher einen eben so großen senkrechten Gegendruck Q, der mit den Axen die Winkel $\varepsilon$, $\varepsilon'$ und $\varepsilon''$ macht, zu den Kräften P noch hinzugefügt, so erhält man die 3 Gleichungen des Gleichgewichts,

$$1) \quad Q \cdot \cos\varepsilon + \Sigma(P \cdot \cos\alpha) = 0$$
$$2) \quad Q \cdot \cos\varepsilon' + \Sigma(P \cdot \cos\beta) = 0$$
$$3) \quad Q \cdot \cos\varepsilon'' + \Sigma(P \cdot \cos\gamma) = 0,$$

wobei noch, weil die Richtung von Q senkrecht auf der Kurve steht, nach (Geom. §. 16. IV.)

$$4) \quad \cos\varepsilon \cdot \partial x + \cos\varepsilon' \cdot \partial y + \cos\varepsilon'' \cdot \partial z = 0$$

ist, wenn x, y, z solche Funktionen von t sind, welche den Gleichungen $L = 0$ und $L' = 0$ genügen, und wenn $\partial x$, $\partial y$, $\partial z$ bezüglich statt $\partial x_t$, $\partial y_t$, $\partial z_t$ geschrieben werden. — Dabei ist bekanntlich noch nach (Geom. §. 1.)

$$5) \quad \cos\varepsilon^2 + \cos\varepsilon'^2 + \cos\varepsilon''^2 = 1.$$

Diese 5 Gleichungen (1.—5.) geben Q, $\varepsilon$, $\varepsilon'$ und $\varepsilon''$ und noch eine Bedingungs-Gleichung des Gleichgewichts bloß zwischen den gegebenen n Kräften P.

Diese Kraft Q kann man aber auch allemal in zwei andere R und R' zerlegen, welche senkrecht auf die Flächen L und L' wirken. Denkt man sich daher diese beiden Kräfte R und R' in ihren entgegengesetzten Richtungen wirkend, so halten sie mit den gegebenen n Kräften wiederum das Gleichgewicht, auch wenn der Atom O ganz frei und von den beiden Flächen L und L', also auch von der Linie l ganz unabhängig ist.

Haben dann $\lambda$, $\mu$, $\nu$ die Bedeutung des (§. 22. IV.), da-

gegen $\lambda'$, $\mu'$, $\nu'$ die analoge in Bezug auf die zweite Fläche $L'$, so sind die 3 Gleichungen des Gleichgewichts des (§. 20.) jetzt folgende:

I. $R \cdot \cos\lambda + R' \cdot \cos\lambda' + \Sigma(P \cdot \cos\alpha) = 0$

II. $R \cdot \cos\mu + R' \cdot \cos\mu' + \Sigma(P \cdot \cos\beta) = 0$

und III. $R \cdot \cos\nu + R' \cdot \cos\nu' + \Sigma(P \cdot \cos\gamma) = 0.$

Aus diesen Gleichungen findet man nun die beiden unbekannten Drucke R und R' (woraus sich der Druck Q auf die Linie l wieder zusammensetzen läßt *)), und wenn man R und R' eliminirt, so erhält man wieder die Gleichung zwischen den gegebenen Kräften P, welche wir vorhin die Bedingungs-Gleichung des Gleichgewichts genannt haben.

## §. 24.

1) Recapituliren wir das in den (§§. 20.—23.) Gesagte, so finden wir, daß in allen Fällen [der Atom mag ganz frei oder gezwungen seyn auf einer (krummen oder ebenen) Fläche $L_{x,y,z} = 0$, oder auf einer (geraden, einfach oder doppelt gekrümmten) Linie l (welche durch die beiden Gleichungen $L_{x,y,z} = 0$ und $L'_{x,y,z} = 0$ gegeben seyn kann) zu bleiben] die auf den Atom wirkenden Kräfte im Gleichgewicht sind, wenn

I. $\Sigma(P \cdot \cos\alpha) = 0$, II. $\Sigma(P \cdot \cos\beta) = 0$

und III. $\Sigma(P \cdot \cos\gamma) = 0$

ist, sobald nur unter die verschiedenen Kräfte P auch der unbekannte Druck in der Richtung der Normale (an die Fläche L oder an die Linie l) aufgenommen wird, welchen die Fläche L oder die Linie l erleidet, jedoch in genau entgegengesetzter Richtung genommen. Dieser Druck kann dann aus diesen Gleichungen (I.—III.) selbst noch gefunden werden. — Dabei beziehen sich

*) Es ist nämlich nach (§. 17.)

$$R \cdot \cos\lambda + R' \cdot \cos\lambda' = Q \cdot \cos\varepsilon$$
$$R \cdot \cos\mu + R' \cdot \cos\mu' = Q \cdot \cos\varepsilon'$$
und $$R \cdot \cos\nu + R' \cdot \cos\nu' = Q \cdot \cos\varepsilon''.$$

Dasselbe geht aber auch aus der Vergleichung der Gleichungen (1.—3.) mit den Gleichungen (I.—III.) hervor.

sich alle Winkel auf 3 auf einander senkrechte Axen, welche entweder die Koordinaten-Axen sind, auf welche sich die Gleichungen der Fläche L, oder der Linie l beziehen, oder solche die durch O gelegt sind, aber mit den eben genannten parallel laufen. . .

2) Liegen alle Kräfte P in einer und derselben Ebene, und nimmt man OX und OY in derselben Ebene, so finden nur die beiden Gleichungen (I. u. II.) statt (in so ferne die III. identisch $0 = 0$ wird); und zwar, es mag der Atom ganz frei oder gezwungen seyn, auf einer in derselben Ebene liegenden krummen Linie zu bleiben, — wenn nur im letztern Falle unter die Kräfte P auch der senkrechte Druck auf diese Linie, in genau entgegengesetzter Richtung gedacht, aufgenommen wird. Dieser senkrechte Druck muß (nach §. 19. III.) in derselben Ebene liegen.

3) Diese Gleichungen des Gleichgewichts lassen sich nun aber noch auf die mannigfaltigste Weise umformen, so daß noch immer das Gleichgewicht bedingt bleibt, obgleich die, solches bedingenden Gleichungen ganz andere Formen angenommen haben. Einige der wichtigsten dieser Umformungen mögen nun in der nächsten zweiten Abtheilung dieses Kapitels noch betrachtet werden.

---

## Zweite Abtheilung.

### Von den Umformungen der Bedingungs-Gleichungen des Gleichgewichts eines Atoms.

### §. 25.

Legt man durch den Punkt O, in welchem der im Gleichgewicht sich befindende Atom liegt (den wir uns immer von n Kräften P, wie im §. 17., angegriffen denken), außer den Axen OX, OY, OZ noch 3 andere, ebenfalls auf einander senkrechte Axen OX′, OY′, OZ′; nennt man ferner $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ die Winkel, welche jede durch P vorgestellte Kraft mit diesen neuen 3

Axen macht, so sind zum Gleichgewicht des Atoms O nothwendig und ausreichend die 3 Gleichungen

$$\text{I. } \Sigma(P \cdot \cos\alpha) = 0; \quad \text{II. } \Sigma(P \cdot \cos\beta) = 0$$

und

$$\text{III. } \Sigma(P \cdot \cos\gamma) = 0;$$

aber auch diese anderen 3 Gleichungen, nämlich

$$\text{IV. } \Sigma(P \cdot \cos\alpha') = 0; \quad \text{V. } \Sigma(P \cdot \cos\beta') = 0$$

und

$$\text{VI. } \Sigma(P \cdot \cos\gamma') = 0.$$

Es muß daher möglich seyn, die letzteren 3 Gleichungen (IV.—VI.) aus den erstern 3 Gleichungen (I.—III.) auf bloß algebraischem (trigonometrischem) Wege abzuleiten, und auch jene wieder aus diesen.

Führt man aber noch 3 neue auf einander senkrechte Axen OX'', OY'', OZ'' ein, und nennt man wieder $\alpha''$, $\beta''$, $\gamma''$ die Winkel, welche dieselbe Kraft P mit diesen neuen Axen macht, so sind wiederum für das Gleichgewicht des Atoms O nothwendig und ausreichend diese 3 Gleichungen:

$$\text{VII. } \Sigma(P \cdot \cos\alpha'') = 0; \quad \text{VIII. } \Sigma(P \cdot \cos\beta'') = 0$$

und

$$\text{IX. } \Sigma(P \cdot \cos\gamma'') = 0.$$

Wenn daher von den 9 Gleichungen (I.—IX.) irgend drei gegeben sind, so müssen die übrigen dieser Gleichungen auf bloß algebraischem (trigonometrischem) Wege aus den drei gegebenen abgeleitet werden können.

Also sind auch zum Gleichgewicht des Atoms O nothwendig und ausreichend die 3 Gleichungen:

$$\text{I. } \Sigma(P \cdot \cos\alpha) = 0; \quad \text{IV. } \Sigma(P \cdot \cos\alpha') = 0$$

und

$$\text{VII. } \Sigma(P \cdot \cos\alpha'') = 0,$$

welche sich auf die 3 Axen OX, OX', OX'' beziehen, die unter sich völlig beliebige (nicht gerade rechte) Winkel bilden, während $\alpha$, $\alpha'$ und $\alpha''$ die Winkel sind, welche die Kraft P, die alle Kräfte repräsentirt, bezüglich mit diesen 3 beliebigen Axen OX, OX' und OX'' macht.

Man kann dasselbe auch rechnend nachweisen, wie wir solches (§. 16.) begründet haben, und wie hier folgt: Es ist, wenn $\lambda$, $\mu$, $\nu$ die Winkel

sind, welche OX mit den alten Axen OX, OY, OZ macht, nach (5. d. VII. Geom.)

1) $\cos\alpha' = \cos\lambda\cdot\cos\alpha + \cos\mu\cdot\cos\beta + \cos\nu\cdot\cos\gamma.$

Also ist auch, wenn man diese Gleichung mit P multiplizirt und alle diese Gleichungen (für die n verschiedenen Kräfte P) addirt;

2) $\Sigma(P\cdot\cos\alpha') = \cos\lambda\cdot\Sigma(P\cdot\cos\alpha) + \cos\mu\cdot\Sigma(P\cdot\cos\beta) + \cos\nu\cdot\Sigma(P\cdot\cos\gamma)$,

in so ferne $\lambda$, $\mu$, $\nu$ für die verschiedenen Kräfte P immer dieselben Werthe behalten, daher als gemeinschaftliche Faktoren herausgesetzt werden konnten.

Die Betrachtung der Gleichung (2.) zeigt nun augenblicklich, daß wenn die Gleichungen (I. II. III.) erfüllt sind, dann nothwendig auch die Gleichung (IV.) statt finden müsse.

Aber ganz aus denselben Gründen folgt auch die Gleichung (VII.) aus den Gleichungen (I. II. III.), weil man eben so wie die (2.) auch noch diese andere Gleichung

3) $\Sigma(P\cdot\cos\alpha'') = \cos\lambda''\cdot\Sigma(P\cdot\cos\alpha) + \cos\mu''\cdot\Sigma(P\cdot\cos\beta) + \cos\nu''\cdot\Sigma(P\cdot\cos\gamma)$

erhält, wo $\lambda''$, $\mu''$, $\nu''$ die Winkel vorstellen, welche die Axe OX'' mit den 3 alten auf einander senkrechten Axen OX, OY, OZ macht.

Finden endlich umgekehrt die Gleichungen (I. IV. und VII.) zuerst statt, so gehen die Gleichungen (2. und 3.) in die nachstehenden über;

4) $0 = \cos\mu\cdot\Sigma(P\cdot\cos\beta) + \cos\nu\cdot\Sigma(P\cdot\cos\gamma)$

und 5) $0 = \cos\mu'\cdot\Sigma(P\cdot\cos\beta) + \cos\nu'\cdot\Sigma(P\cdot\cos\gamma)$,

woraus sogleich noch

$$\Sigma(P\cdot\cos\beta) = 0 \quad \text{und} \quad \Sigma(P\cdot\cos\gamma) = 0$$

als nothwendige Folgerung hervorgeht, so daß also mit den Gleichungen (I. IV. u. VII.) gleichzeitig wieder die Gleichungen (I. II. III.) statt finden.

Dabei ist nicht zu übersehen, daß z. B. $P\cdot\cos\alpha'$ die Projektion ist der als Länge vorgestellten Kraft P auf die beliebig gedachte Axe OX'; und negativ genommen, wenn solche Projektion in die rückwärts verlängerte Axe OX' fällt.

Sind also n Kräfte P im Gleichgewicht (es mögen dies lauter gegebene Kräfte seyn, oder darunter sich unbekannte normale Gegendrucke befinden), und legt man durch O eine ganz beliebige gerade Linie OV, so ist die Summe der Projektionen dieser n Kräfte auf OV, wenn die Kräfte ihrer Größe und Richtung nach durch Linien vorgestellt werden, allemal der Null gleich, wenn nur diejenigen Projektionen als negativ in Rechnung gebracht werden, welche in die (rückwärts gedachte) Verlängerung der Linie OV fallen. — Und wenn man drei solche

Gleichungen sich bildet, in Bezug auf 3 solche beliebig gedachte Linien OX, OX′, OX″, so hat man alle, das Gleichgewicht nothwendig bedingende Gleichungen, so daß jede vierte Gleichung, welche man sich auf demselben Wege noch bilden wollte, als eine algebraische (trigonometrische) Folgerung aus den 3 ersten Gleichungen angesehen werden kann und muß.

Anmerk. 1. Will man aber, daß in einer oder der andern dieser Gleichungen gewisse Kräfte (z. B. die Normal-Drucke auf zum Gleichgewicht mitwirkende Flächen) gar nicht vorkommen, so muß man eine oder die andere dieser Linien OX, OX′, OX″ gerade senkrecht auf diese Kräfte (z. B. diese Normal-Drucke) legen, weil dann die Projektion dieser letztern in Bezug auf diese Linie, = 0 wird.

Und nimmt man eine dieser Linien OX, OX′, OX″ in der Richtung einer der Kräfte selber, so ist diese Kraft zu gleicher Zeit die Projektion derselben auf diese Linie, und dann kommt in der Gleichgewichts-Gleichung diese Kraft ganz vor wie sie ist, ohne noch mit einem Kosinus multiplizirt zu erscheinen.

In der Aufgabe des (§. 22. IV.) könnte man z. B. die eine Axe OX in der Richtung der Normale selbst nehmen; die beiden andern Axen OX′, OX″ in der Tangential-Ebene (in O an L), so daß letztere wieder auf OX senkrecht stehen, aber nicht gerade auf einander senkrecht zu seyn brauchen. Dann werden die dortigen 3 Gleichungen jetzt so sich ausnehmen

$$1) \quad \pm R + \Sigma(P \cdot \cos\alpha) = 0$$
$$2) \quad \Sigma(P \cdot \cos\alpha') = 0$$
$$3) \quad \Sigma(P \cdot \cos\alpha'') = 0,$$

wo die erstere allein den unbekannten Druck R, die letzteren beiden dagegen R gar nicht enthalten.

In der Aufgabe des (§. 23.) dagegen kann man die eine Axe OX in die Tangente der Linie l, die beiden anderen Axen OX′ und OX″ dagegen in die Richtung der Drucke R und R′ verlegen; oder die beiden anderen Axen beliebig in die Normal-Ebene, senkrecht oder schief auf einander.

Anmerk. 2. Halten n Kräfte einander das Gleichgewicht,

so leisten beliebig viele z. B. m derselben, wenn jede in genau entgegengesetzter Richtung genommen wird, und wenn sie gleichzeitig angreifen, genau dasselbe, was die übrigen n — m Kräfte, diese letztern unverändert aber ebenfalls gleichzeitig angreifend gedacht, leisten. — Umgekehrt: leisten m Kräfte Q dasselbe, was n — m Kräfte P leisten, so müssen alle n Kräfte, wenn man jede der m erstern Kräfte Q in genau entgegengesetzter Richtung sich denkt, einander das Gleichgewicht halten.

Leisten also m Kräfte Q, wenn sie gleichzeitig angreifen, dasselbe, was n — m Kräfte P, die gleichzeitig angreifen, leisten, so muß die Summe der (positiven oder negativen) Projektionen der erstern m Kräfte auf eine beliebige Gerade OV, gleich seyn der Summe der (positiven oder negativen) Projektionen der n — m andern Kräfte P auf dieselbe Gerade OV.

Umgekehrt: finden drei solche Gleichungen in Bezug auf drei solche beliebige Geraden OX, OX′ und OX″ zugleich statt (zwischen m Kräften Q und n — m Kräften P); so leistet jede der beiden Parthieen von Kräften an dem Atom O genau ein und dasselbe.

Dies alles gilt aber natürlich auch dann noch, wenn statt der m Kräfte Q nur eine einzige solche Kraft Q betrachtet werden sollte, d. h. wenn m = 1 ist. — Von diesem Falle haben wir aber im (§. 16.) einen noch speziellern Fall direkt behandelt.

## §. 26.

Liegen alle n Kräfte in einer und derselben Ebene, so gilt alles noch eben so, nur daß dann zwei solche Gleichgewichts-Gleichungen auf zwei in dieser Ebene beliebig gelegte Linien OX, OX′ bezogen, bereits das Gleichgewicht nothwendig bedingen, so daß jede dritte Gleichung, die man sich noch bilden wollte, als eine algebraische (trigonometrische) Folgerung aus den beiden erstern Gleichungen angesehen werden müßte.

Anmerk. Sind (Fig. 29.) OZ und OZ′ zwei solche Linien, die unter sich den Winkel ZOZ′ = φ machen; ist OA die Kraft P ihrer Größe und Richtung nach; wird W. AOZ = α,

W. $AOZ' = \alpha'$ gesetzt, und sind AR, AS senkrecht auf OZ und OZ' gezogen, so ist

$$OR = P \cdot \cos\alpha, \quad OS = P \cdot \cos\alpha'.$$

Zieht man nun durch A die Geraden AM, AN parallel mit OZ', OZ, so sind OM und ON die Kräfte, welche beide, gleichzeitig wirkend, dasselbe leisten, was die OA (nach dem Satz des Kräften-Parallelogramms §. 13.) leistet.

Im Gleichgewicht hat man nun nach vorstehendem (§. 26.)

1) $\Sigma(OS) = 0$ und 2) $\Sigma(OR) = 0$;

aber auch nach (Anmerk. 2. zu §. 21.)

3) $\Sigma(ON) = 0$ und 4) $\Sigma(OM) = 0$.

Und in der That läßt sich leicht trigonometrisch nachweisen, daß die beiden Paare von Gleichungen (1. u. 2.) und (3. u. 4.) nothwendige algebraische (trigonometrische) Folgerungen aus einander sind. Der Anblick der Figur giebt nämlich sogleich

$ON = OS - NS = OS - AN \cdot \cos\varphi = OS - OM \cdot \cos\varphi$,

$OM = OR - MR = OR - AM \cdot \cos\varphi = OR - ON \cdot \cos\varphi$;

Also ist auch, wenn man für alle diese Kräfte OA diese Gleichungen gebildet sich denkt, und jede der beiden Reihen von Gleichungen addirt,

I. $\Sigma(ON) = \Sigma(OS) - \cos\varphi \cdot \Sigma(OM)$,

II. $\Sigma(OM) = \Sigma(OR) - \cos\varphi \cdot \Sigma(ON)$.

Diese Gleichungen geben aber, wenn $\Sigma(OS) = 0$ und $\Sigma(OR) = 0$ vorausgesetzt wird, sogleich

$(1 - \cos\varphi^2) \cdot \Sigma(OM) = 0$ und $(1 - \cos\varphi^2) \cdot \Sigma(ON) = 0$;

d. h. auch

$$\Sigma(OM) = 0 \quad \text{und} \quad \Sigma(ON) = 0.$$

Setzt man aber zuerst $\Sigma(OM) = 0$ und $\Sigma(ON) = 0$ voraus, so geben die Gleichungen (I. u. II.) augenblicklich noch

$$\Sigma(OS) = 0 \quad \text{und} \quad \Sigma(OR) = 0.$$

Eine ganz analoge Bemerkung läßt sich machen und beweisen, wenn die Kräfte OA nach dreien schiefen Axen vermöge des Kräften-Parallelepipedums (§. 17. b.) zerlegt, zu gleicher Zeit aber auch auf dieselben schiefen Axen proficirt werden, und wenn nun die Gleichgewichts-Gleichungen entweder nach

(Anmerk. 2. zu §. 20.) oder nach (§. 25.) gebildet werden. — Immer läßt sich durch ganz analoge Rechnungen noch insbesondere nachweisen, was freilich an sich schon in die Augen fällt, daß nämlich die 3 erstern und die 3 letztern Gleichungen bloße algebraische (trigonometrische) Folgerungen aus einander sind.

## §. 27 *).

### Das Gesetz der virtuellen Geschwindigkeiten für einen Atom.

Dieselben Gleichungen des Gleichgewichts eines Atoms lassen sich auch noch in folgender Form darstellen:

Denkt man sich nämlich außer dem Punkt O, in welchem der angegriffene Atom sich befindet, noch einen zweiten beliebigen Punkt A im Raume; — projicirt man diesen Punkt A nach und nach auf die Richtungen aller Kräfte; und ist $A_1$ die Projektion des Punktes A auf die Richtung der Kraft P, welche alle Kräfte repräsentiren mag, so daß $OA_1$ die Projektion von OA auf die Richtung der Kraft P ist; denkt man sich endlich diese Projektion $OA_1$ positiv oder negativ in Rechnung gebracht, je nachdem solche in der Richtung der Kraft selbst, oder in ihrer (rückwärts gedachten) Verlängerung liegt, so hat man allemal, wenn man die verlängerte OA zur Axe OX nimmt,

$$\cos\alpha = \frac{OA_1}{OA}.$$

Die Gleichung

$$\Sigma(P \cdot \cos\alpha) = 0$$

geht aber jetzt, da OA für alle Kräfte P denselben Werth behält, so daß die ganze Gleichung mit diesem gemeinschaftlichen Nenner weg multiplizirt werden kann, über in

$$\Sigma(P \cdot OA_1) = 0.$$

Da A beliebig gedacht ist, so kann man A auch zunächst an O nehmen, und dann nennt man die (positiv oder negativ in Rechnung zu bringende) Projektion $OA_1$ die virtuelle Ge-

*) Die (§§. 27.—29.) kann der Leser, der noch Anfänger ist, überschlagen, und später einmal gelegentlich nachlesen.

schwindigkeit des Atoms O, während dann das Produkt $P \cdot OA_1$ das Moment der virtuellen Geschwindigkeit der Kraft P (in Bezug auf diese unendlich-kleine Entfernung OA) genannt wird.

I. Zum Gleichgewicht gegebener Kräfte, die einen Atom O gleichzeitig angreifen, ist es daher nothwendig und ausreichend, daß die Summe der Momente der virtuellen Geschwindigkeiten aller Kräfte drei Mal (für 3 beliebig, aber dem O nächst anliegend gedachte Punkte A) der Null gleich sey *). — Dies würde aber auch noch gelten, wenn man den Punkt A jedesmal beliebig weit von O ab sich denken wollte.

II. Will man, in dem Falle, wo eine Fläche L, oder eine durch die Flächen L und L' gegebene Linie l zum Gleichgewicht beiträgt, den senkrechten Gegendruck R, oder Q (§. 22. IV. u §. 23.) in einer oder der andern der 3 Gleichungen des Gleichgewichts gar nicht haben, so muß man A so nehmen, daß OA auf diesem Druck R, oder Q, senkrecht steht, weil dann $OA_1$ für diesen Druck R, oder Q, der Null gleich wird. — Dabei könnte aber A noch immer beliebig weit von O abliegend gedacht werden.

III. Wollte man sich jedoch OA als einen Weg denken, welchen der Atom O, wenn er nicht im Gleichgewicht wäre, sondern sich bewegte, machen könnte, so nämlich, daß dieser Weg auf der Fläche L oder auf der Linie l gemacht werden müßte, im Falle die Fläche L, oder die Linie l zum Gleichgewicht beitrüge, so läßt dieser Wunsch mit dem in (II.) ausgesprochenen nur dann sich vereinbaren, wenn man sich den Punkt A dem O unendlich nahe (nächst anliegend) denkt, in so ferne nach (§§. 6. 14. 16. Geom.) die krumme Linie als eine stetig gebrochene gedacht werden kann, und die Verkür-

*) Wollte man jedoch die 3 Punkte A, mit O in einer und derselben Geraden liegend annehmen, so würden sich die Gleichungen als nicht von einander verschieden ausweisen. Nach der obigen Deduktion müssen diese 3 Linien OA die Stelle dreier Axen im körperlichen Raume vertreten.

rung eines Elementes OA derſelben die Tangente an O wird, welche ſenkrecht ſteht auf der Normale.

IV. Bei dieſer Darſtellung der Gleichgewichts-Gleichungen hat man gewöhnlich die Abſicht, beide in (II. u. III.) angeführten Zwecke zu vereinigen und deshalb denkt man ſich allemal OA unendlich-klein, und als einen Weg, welchen der Atom O entweder ganz beliebig macht (wenn er frei iſt), oder auf der Fläche L, oder auf der Linie l zurücklegt, im Falle er auf der Fläche L, oder auf der Linie l zu bleiben gezwungen iſt.

Bei dieſer Annahme, die wir hier ein für allemal machen, hat man den Vortheil, daß die normalen Gegendrucke R oder Q durchaus nicht berückſichtigt zu werden brauchen, weil für ſie die virtuellen Geſchwindigkeiten nun allemal der Null gleich ſind.

## §. 28.

### Daſſelbe Geſetz in Differenzial-Rechnungsform.

Man kann auf dieſe Form der Gleichgewichts-Gleichungen die Rechnung mit Unendlich-Kleinen anwenden. Man denke ſich nämlich in der Richtung der Kraft P einen beliebigen Punkt D, deſſen Koordinaten-Werthe a, b, c ſeyn mögen, auf ſenkrechte Axen UX, UY und UZ bezogen. Es ſeyen x, y, z die Koordinaten-Werthe des Atoms O an ſeiner Stelle, und $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$ die Koordinaten-Werthe des unendlich nahe an O liegenden Punktes A; ſo ſind dx, dy, dz

$\alpha$) unendlich-klein aber ſonſt ganz unabhängig von einander, ſo lange A ganz beliebig nächſt an O gedacht wird; oder

$\beta$) durch die Gleichung $L_{x+dx,y+dy,z+dz} = 0$ von einander abhängig, wenn A auf der durch

1) $$L_{x,y,z} = 0$$

gegebenen Fläche nächſt an O (welcher in derſelben Fläche liegt) gedacht wird. Dieſe Abhängigkeit drückt ſich aber nach (Analyſ. §. 23. Anmerk.) einfacher durch

2) $dL = 0$, oder $\partial L_x \cdot dx + \partial L_y \cdot dy + \partial L_z \cdot dz = 0$ aus.

γ) Oder es sind dx, dy, dz zwar immer unendlich-klein, aber durch die beiden Gleichungen

3) $\begin{cases} dL = 0, \text{ oder } \partial L_x \cdot dx + \partial L_y \cdot dy + \partial L_z \cdot dz = 0 \\ \text{und} \\ dL' = 0, \text{ oder } \partial L'_x \cdot dx + \partial L'_y \cdot dy + \partial L'_z \cdot dz = 0 \end{cases}$

von einander abhängig, wenn A in der durch die beiden Gleichungen $L_{x,y,z} = 0$ und $L'_{x,y,z} = 0$ gegebenen Linie dem O (welcher in derselben Linie liegt) nächst anliegt.

In allen 3 Fällen ist aber, wenn $DO = p$ gesetzt wird, dieses p gegeben durch die Gleichung (§. 1. Geom.)

4) $p^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2$,

so daß p als diejenige Funktion von x, y und z erscheint, welche

5) $\begin{cases} \partial p_x = \dfrac{x-a}{p} = \cos\alpha \\ \partial p_y = \dfrac{y-b}{p} = \cos\beta \\ \partial p_z = \dfrac{z-c}{p} = \cos\gamma \end{cases}$ *)

liefert.

Denkt man sich nun in dieser Funktion p oder DO, bezüglich $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$ statt x, y, z gesetzt, so geht dieses p dadurch über in DA, und der unendlich-kleine Zuwachs dp, den p dadurch erleidet, ist daher $= DA - DO$, oder auch, weil $DA_1$ von DA nur um ein Unendlich-Kleines der zweiten Ordnung verschieden ist **),

---

*) Damit die Zeichen genau stimmen, denkt man sich den Punkt (a, b, c) oder D in der rückwärts verlängerten Richtung der Kraft liegen. Dachte man sich diesen Punkt in der Richtung der Kraft selbst, so würden alle Glieder ihr Zeichen ändern, allein im Ganzen bliebe das End-Resultat unverändert.

**) Es ist nämlich in dem rechtwinklichen Dreieck $DA_1A$
$\overline{DA}^2 = \overline{DA_1}^2 + \overline{AA_1}^2$, also $\overline{DA} = (\overline{DA_1}^2 + \overline{AA_1}^2)^{\frac{1}{2}}$.

6) $\quad dp = DA_1 - DO = OA_1,$

d. h. dieser unendlich-kleine Zuwachs dp ist das, was wir im (§. 27.) die virtuelle Geschwindigkeit nannten. Die Gleichung des Gleichgewichts des (§. 27.), nämlich $\Sigma(P \cdot OA_1) = 0$, nimmt daher jetzt die Form an

$(\odot)\cdots \qquad \Sigma(P \cdot dp) = 0,$

während nach (§. 23. Analyſ.)

7) $\quad dp = \partial p_x \cdot dx + \partial p_y \cdot dy + \partial p_z \cdot dz,$

oder auch, vermöge der Gleichungen (5.),

8) $\quad dp = \cos\alpha \cdot dx + \cos\beta \cdot dy + \cos\gamma \cdot dz$

wird.

I. Ist nun der Atom von den n Kräften P angegriffen, aber übrigens ganz frei, so giebt die Gleichung $(\odot)$ des Gleichgewichts so viele Gleichungen als man will, wenn man nur statt dp seinen Werth aus (7. oder 8.) substituirt, dabei aber die zu dx gehörigen dy und dz ganz beliebig und immer anders und anders nimmt. — Irgend drei dieser Gleichungen aber bedingen das Gleichgewicht, so daß jede weitere dieser Gleichungen als eine bloße algebraische Folgerung aus den drei erstern angesehen werden kann und muß.

Substituirt man jedoch statt dp seinen Werth aus (8.), so daß die Gleichgewichts-Gleichung $(\odot)$ in

9) $\quad dx \cdot \Sigma(P \cdot \cos\alpha) + dy \cdot \Sigma(P \cdot \cos\beta) + dz \cdot \Sigma(P \cdot \cos\gamma) = 0$

übergeht, so zerfällt sie, wenn man abwechselnd zwei der drei Zuwachse dx, dy, dz der Null gleich setzt und bloß den dritten beliebig nimmt *), sogleich auch wieder in die 3 bekannten Gleichungen des Gleichgewichts

---

Entwikkelt man nun diese Potenz zur Rechten nach dem binomischen Lehrsatze, so findet sich sogleich

$$\overline{DA} - \overline{DA_1} = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{\overline{AA_1}^2}{\overline{DA_1}} + \cdots.$$

während $AA_1$ unendlich-klein ist.

*) Diese Annahmen laufen darauf hinaus, den unendlich-kleinen Weg OA, der die virtuellen Geschwindigkeiten giebt, einmal parallel mit

$\Sigma(P \cdot \cos\alpha) = 0$, $\Sigma(P \cdot \cos\beta) = 0$ und $\Sigma(P \cdot \cos\gamma) = 0$.

II. Das in (I.) Gesagte gilt unverändert, wenn der Atom auch nicht ganz frei ist, dagegen der Gegendruck R der Fläche L, oder der Gegendruck Q der Linie l, mit unter die Kräfte P aufgenommen wird, weil er in solchem Falle als ein ganz freies Atom behandelt werden kann.

Ist also der Atom gezwungen, auf der durch $L_{x,y,z} = 0$ gegebenen Fläche zu bleiben, ist R der normale Gegendruck der Fläche L, und bedeutet r in der Normale, was p in der Richtung der Kraft P vorstellt, so hat man die Gleichgewichts-Gleichung

$$(\mathfrak{C})\cdots \qquad R \cdot dr + \Sigma(P \cdot dp) = 0,$$

wo 10) $\qquad dr = \partial r_x \cdot dx + \partial r_y \cdot dy + \partial r_z \cdot dz$

ist, und wo der Punkt A, dessen Koordinaten-Werthe $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$ sind, zunächst an O, aber ganz beliebig liegt, und namentlich nicht in der Fläche L gedacht zu werden braucht. Die Gleichung ($\mathfrak{C}$) giebt dann wieder unendlich viele Gleichungen, von denen jedoch 3 willkührliche derselben die 3 Gleichungen des (§. 22. IV.) völlig ersetzen, daher zur Bestimmung von R dienen und noch die 2 Bedingungs-Gleichungen des Gleichgewichts liefern.

So wie man aber dx, dy, dz so nimmt, daß der Punkt A in der Fläche L selbst liegt, daß also die Gleichung (2.), nämlich

$$\partial L_x \cdot dx + \partial L_y \cdot dy + \partial L_z \cdot dz = 0,$$

statt findet, so ist augenblicklich $dr = 0$ *), und die Gleichung ($\mathfrak{C}$) reduzirt sich jetzt bloß auf die Gleichung ($\odot$) zwischen den gegebenen Kräften P.

---

der Axe UX, dann parallel mit UY, zuletzt aber parallel mit UZ sich zu denken.

*) Daß nun $dr = 0$ ist, folgt am einfachsten daraus, weil nun r, als ein Stück der Normale, von irgend einem festen Punkte E ab bis zu O hin ein Minimum ist, gegen alle Entfernungen EA von demselben festen Punkte E nach beliebigen ringsherum um O in der Fläche L dem O nächst anliegenden Punkten A hin.

Außerdem kann man $dr = 0$ auch noch wie folgt erweisen. Sind nämlich $\lambda$, $\mu$, $\nu$ die Winkel, welche die Normale mit den Axen macht, so hat man nach obiger Gleichung (8.)

Die Gleichung $(\odot)$, da sie nun nicht R mehr enthält, giebt also jetzt sogleich die 2 Bedingungen des Gleichgewichts, wenn man nur das Verhältniß dx, dy zweimal beliebig und anders, dagegen dz jedesmal so dazu nimmt, wie die Gleichung (2.) es dazu liefert.

Setzt man aber in der Gleichung $(\odot)$ statt dp seinen Werth aus (8.), so daß man die Gleichung (9.) wieder erhält, und eliminirt man nun aus (9. u. 2.) den Zuwachs dz, indem man die (2.) mit einem unbestimmten M multiplizirt, das Resultat zur (9.) addirt, und dann den Koeffizienten von dz der Null gleich setzt (wodurch M seine Bestimmung erhält), so zerfällt die übrig bleibende Gleichung, indem man abwechselnd $dx = 0$ und dy beliebig, dann aber $dy = 0$ und dx beliebig nimmt, in 2 Gleichungen, so daß man zusammen die 3 Gleichungen

$$11)\quad \begin{cases} M\cdot\partial L_x + \Sigma(P\cdot\cos\alpha) = 0 \\ M\cdot\partial L_y + \Sigma(P\cdot\cos\beta) = 0 \\ M\cdot\partial L_z + \Sigma(P\cdot\cos\gamma) = 0 \end{cases}$$

hat. Diese Gleichungen, wenn man statt $\partial L_x$, $\partial L_y$, $\partial L_z$ (aus den Gleichungen $\beta$. der Note) ihre Werthe $W\cdot\cos\lambda$, $W\cdot\cos\mu$, $W\cdot\cos\nu$ setzt, wo $W = \sqrt{\partial L_x^2 + \partial L_y^2 + \partial L_z^2}$ ist, sind aber genau die Gleichgewichts-Gleichungen (§. 22. IV.), wenn $R = M\cdot W$ gesetzt wird, so daß letztere Gleichung, nämlich

$$12)\qquad R = M\cdot W,$$

auch noch den Gegendruck R liefert, sobald M aus den Gleichungen (11.) gefunden worden ist.

---

$\alpha$) $\quad dr = \cos\lambda\cdot dx + \cos\mu\cdot dy + \cos\nu\cdot dz.$

Dabei aber nach (§. 14. II. Geom.)

$\beta$) $\quad \cos\lambda = \frac{\partial L_x}{W}$, $\cos\mu = \frac{\partial L_y}{W}$ und $\cos\nu = \frac{\partial L_z}{W}$,

wo

$$W = \sqrt{\partial L_x^2 + \partial L_y^2 + \partial L_z^2}$$

ist. Substituirt man daher diese Werthe aus ($\beta$.) in die Gleichung ($\alpha$.), so ergiebt sich sogleich, nach obiger Gleichung (2.), $dr = 0$.

Noch kürzer: Es ist

$$\cos\lambda\cdot dx + \cos\mu\cdot dy + \cos\nu\cdot dz = 0,$$

also auch $dr = 0$ nach (§. 16. IV. Nr. 6. Geometr.).

III. Und ist der Atom gezwungen auf der durch die Gleichungen $L_{x,y,z} = 0$ und $L'_{x,y,z} = 0$ gegebenen Linie l zu bleiben, so muß man zu den Kräften P noch den Gegendruck Q der Linie l, der in unbekannter, aber auf der Linie l normaler Richtung wirkt, hinzunehmen, so daß die Gleichung (⊙) jetzt

$$(♂) \cdots \qquad Q \cdot dq + \Sigma(P \cdot dp) = 0$$

wird, wo q dieselbe Bedeutung für Q haben soll, welche p in Bezug auf P hat (so nämlich, daß q ein Stück der auf l normalen Richtung von Q ist). Nimmt man in (♂) dx, dy, dz ganz von einander unabhängig und 3 mal anders, so bekommt man die 3 Gleichungen, welche die des (§. 23.) vollständig ersetzen.

So wie man aber dx, dy, dz so nimmt, daß der Punkt A in der Linie l selbst liegt, daß also die beiden Gleichungen (3.) existiren, nämlich

$$\begin{cases} \partial L_x \cdot dx + \partial L_y \cdot dy + \partial L_z \cdot dz = 0 \\ \partial L'_x \cdot dx + \partial L'_y \cdot dy + \partial L'_z \cdot dz = 0, \end{cases}$$

so ist augenblicklich $dq = 0$ *), und es existirt nun wieder die Gleichung (⊙) bloß zwischen den gegebenen Kräften P.

Die Gleichung (⊙) giebt daher nun sogleich die in diesem Falle existirende Bedingungs-Gleichung des Gleichgewichts, sobald man nur dy und dz so nimmt, wie solche aus den beiden Gleichungen (3.) hervorgehen.

Setzt man aber in der Gleichung (⊙) statt dp seinen Werth aus (8.), so daß die Gleichung (9.) daraus wird, und eliminirt man nachgehends aus (9.) mittelst der Gleichungen (3.) sowohl dy als auch dz, indem man die eine mit M, die andere mit

---

*) Daß $dq = 0$ ist, folgt auch hier wieder daraus, daß q ein Minimum ist, in Bezug auf die beiden in l dem O nächst anliegenden Punkte A. — Dasselbe kann aber leicht noch so bewiesen werden. Sind $\varepsilon$, $\varepsilon'$, $\varepsilon''$ die Winkel, welche Q, also q, mit den Axen macht, so ist nach (8.)

$$dq = \cos\varepsilon \cdot dx + \cos\varepsilon' \cdot dy + \cos\varepsilon'' \cdot dz.$$

Dieser Ausdruck zur Rechten ist aber allemal $= 0$ (nach Geom. §. 16 IV. Nr. 6.), so oft die Linie q auf der Tangente der Kurve senkrecht steht.

M′ multiplizirt, die Resultate zur Gleichung (9.) addirt, und zuletzt M und M′ so nimmt, daß jeder der Koeffizienten von dy und dz der Null gleich gesetzt werden kann, so hat man sogleich wieder die 3 Gleichungen

$$13)\quad \begin{cases} M\cdot\partial L_x + M'\cdot\partial L'_x + \Sigma(P\cdot\cos\alpha) = 0 \\ M\cdot\partial L_y + M'\cdot\partial L'_y + \Sigma(P\cdot\cos\beta) = 0 \\ M\cdot\partial L_z + M'\cdot\partial L'_z + \Sigma(P\cdot\cos\gamma) = 0, \end{cases}$$

welche genau mit den Gleichungen des (§. 23.) zusammenfallen, wenn man nur

$$14)\quad M\cdot W = R \qquad \text{und} \qquad 15)\quad M'\cdot W' = R'$$

setzt, wo

$$16)\quad W = \sqrt{\partial L_x^2 + \partial L_y^2 + \partial L_z^2}$$

und

$$17)\quad W' = \sqrt{\partial L'^2_x + \partial L'^2_y + \partial L'^2_z}$$

ist. Die Gleichungen (14. u. 15.) geben dabei noch die auf die Flächen L und L′ bezüglich normalen Gegendrucke R und R′, wenn aus den Gleichungen (13.) zuvor M und M′ gefunden worden sind.

Anmerk. Obgleich also die Gleichung (⊙) alle Gleichgewichts-Gleichungen liefert, während dx, dy, dz ganz von einander unabhängig gedacht sind, wenn man nur unter die Kräfte P, den Gegendruck R der Fläche L, oder den Gegendruck Q der Linie l mit aufnimmt, so pflegt man doch diese Gleichung (⊙), nämlich

$$(\odot)\cdots \qquad \Sigma(P\cdot dp) = 0$$

in den Fällen (II. III.) gewöhnlich nur unter der Voraussetzung gelten zu lassen, daß dx, dy, dz der Fläche L oder der Linie l angehören, also daß entweder die Gleichung (2.), oder die beiden Gleichungen (3.) noch mit in Rechnung gebracht werden müssen. — Und dies ist die Annahme (§. 27. IV.), in Rechnung gebracht.

Die Gleichung (⊙) ist übrigens ein besonderer Fall eines allgemeinern Gesetzes, welches wir später im (II. Th. Kap. 10.) unter dem Namen „Gesetz der virtuellen Geschwindigkeiten" kennen lernen werden.

## §. 29.

### Dasselbe Gesetz in Variations-Rechnungsform.

Will man eben sowohl die geometrischen Betrachtungen des (§. 27.), als auch die Rechnung mit unendlich-kleinen Zuwachsen des (§. 28.) vermeiden, so lassen sich die Gleichgewichts-Gleichungen auf eine ganz analoge einfache und allgemeine Weise ausdrücken, und überdies noch so, daß man aus dieser neuen Form, in der keine Unendlich-Kleinen vorkommen, die Gleichung $\Sigma(P \cdot dp) = 0$, sobald man sie wünschen möchte, sogleich und unmittelbar wieder erhält.

Man denkt sich nämlich wieder einen beliebigen Punkt A, aber dasmal nicht unendlich nahe an O, sondern beliebig weit von O ab, bezeichnet die Koordinaten-Werthe von O und A bezüglich durch x, y, z und $x_\varkappa$, $y_\varkappa$, $z_\varkappa$, indem man

$$1) \quad \begin{cases} x_\varkappa = x + \varkappa \cdot \delta x + \frac{\varkappa^2}{2!} \cdot \delta^2 x + \cdots \\ y_\varkappa = y + \varkappa \cdot \delta y + \frac{\varkappa^2}{2!} \cdot \delta^2 y + \cdots \\ z_\varkappa = z + \varkappa \cdot \delta z + \frac{\varkappa^2}{2!} \cdot \delta^2 z + \cdots \end{cases}$$

setzt, und die Koeffizienten $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$, $\delta^2 x$, $\delta^2 y$, $\delta^2 z$, &c. &c. ganz willkührlich (im Nothfalle auch der Null gleich) aber doch so nimmt, daß eben $x_\varkappa$, $y_\varkappa$, $z_\varkappa$ wirklich die Koordinaten-Werthe des Punktes A sind; der Werth von $\varkappa$ selbst ist zwar konstant nach (x, y, z), aber sonst beliebig groß gedacht.

Ist nun p wiederum eine solche Linie DO, in der Richtung der Kraft P, so daß a, b, c die Koordinaten-Werthe des in der Richtung der Kraft P liegenden Punktes D sind, also daß man

$$2) \quad p = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$$

hat; und bezeichnet man durch

$$3) \quad p_\varkappa, \text{ oder } p + \varkappa \cdot \delta p + \frac{\varkappa^2}{2!} \cdot \delta^2 p + \cdots,$$

das was aus p wird, wenn x, y, z in $x_\varkappa$, $y_\varkappa$, $z_\varkappa$ übergehen

so

so drückt $p_\alpha$ die Linie DA aus, wie weit auch A von O abliegen mag; — und man hat dabei nach dem Maclaurinschen Lehrsatze, oder nach der sogenannten Variations-Rechnung

4) $\delta p = \partial p_x \cdot \delta x + \partial p_y \cdot \delta y + \partial p_z \cdot \delta z,$

oder 5) $\delta p = \cos\alpha \cdot \delta x + \cos\beta \cdot \delta y + \cos\gamma \cdot \delta z,$

wenn $\alpha, \beta, \gamma$ die Winkel sind, welche die Linie p oder DO, d. h. die Richtung der Kraft P mit den Axen macht, weil dann aus (2.)

$$\partial p_x = \frac{x-a}{p} = \cos\alpha, \quad \partial p_y = \frac{y-b}{p} = \cos\beta$$

und $$\partial p_z = \frac{z-c}{p} = \cos\gamma$$

wird. (Damit auch die Zeichen genau stimmen, nimmt man den Punkt (a, b, c) oder A wie im §. 28.).

I. Ist nun der Atom O ganz frei, so ist, im Falle ihn die Kräfte P im Gleichgewicht halten,

6) $\Sigma(P \cdot \cos\alpha) = 0, \quad \Sigma(P \cdot \cos\beta) = 0,$

$$\Sigma(P \cdot \cos\gamma) = 0.$$

Multiplizirt man aber diese Gleichungen bezüglich mit $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$ und addirt man die Resultate, so erhält man

$$\Sigma P \cdot (\cos\alpha \cdot \delta x + \cos\beta \cdot \delta y + \cos\gamma \cdot \delta z) = 0,$$

d. h. nach (5.)

$(\odot)\cdots \qquad \Sigma(P \cdot \delta p) = 0$ *),

welche Gleichung also im Falle des Gleichgewichts statt finden muß, und zwar allemal, so oft man auch $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$ immer anders und anders nehmen mag, so daß diese Gleichung $(\odot)$ der Repräsentant ist von unendlich vielen Gleichungen, von denen jedoch drei nur zum Gleichgewicht nothwendig sind und ausreichen.

II. Ist der Atom O gezwungen, auf einer durch die Gleichung

$$L_{x,y,z} = 0$$

*) Multiplizirt man diese Gleichung noch mit $\varkappa$, denkt man sich nachgehends $\varkappa$ unendlich-klein, so daß $\varkappa \cdot \delta x$, $\varkappa \cdot \delta y$, $\varkappa \cdot \delta z$, $\varkappa \cdot \delta p$ von dx, dy, dz, dp nicht mehr verschieden sind, so hat man die Gleichung $(\odot)$ des (§. 28.) nämlich $\Sigma(P \cdot dp) = 0$ wieder.

gegebenen Fläche zu bleiben, und sind $\lambda$, $\mu$, $\nu$ die Winkel, welche dann der normale Gegendruck R mit den Axen macht, so hat man nach (§. 22. IV.) die 3 Gleichungen

$$7) \quad \begin{cases} R \cdot \cos\lambda + \Sigma(P \cdot \cos\alpha) = 0 \\ R \cdot \cos\mu + \Sigma(P \cdot \cos\beta) = 0 \\ R \cdot \cos\nu + \Sigma(P \cdot \cos\gamma) = 0. \end{cases}$$

Multiplizirt man auch hier diese 3 Gleichungen bezüglich mit $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$, addirt man die Resultate und bedeutet dabei r für R das, was p für P vorstellt, so daß nach (5.)

$$8) \quad \delta r = \cos\lambda \cdot \delta x + \cos\mu \cdot \delta y + \cos\nu \cdot \delta z$$

ist, so erhält man

$$(\mathfrak{C}) \cdots \quad R \cdot \delta r + \Sigma(P \cdot \delta p) = 0 \text{ *)},$$

und diese Gleichung gilt, wie auch $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$ gedacht seyn mögen.

Nimmt man aber $x_\varkappa$, $y_\varkappa$, $z_\varkappa$ so, daß außer

$$L_{x,y,z} = 0, \quad \text{auch noch} \quad L_{x_\varkappa, y_\varkappa, z_\varkappa} = 0 \text{ **)},$$

also auch, wenn $L_{x_\varkappa, y_\varkappa, z_\varkappa}$ durch $L_\varkappa$, d. h. durch

$$L + \varkappa \cdot \delta L + \frac{\varkappa^2}{2!} \cdot \delta^2 L + \cdots$$

ausgedrückt wird,

$$9) \quad (\delta L =) \; \partial L_x \cdot \delta x + \partial L_y \cdot \delta y + \partial L_z \cdot \delta z = 0$$

ist; — setzt man hier statt $\partial L_x$, $\partial L_y$, $\partial L_z$ ihre Werthe $W \cdot \cos\lambda$, $W \cdot \cos\mu$, $W \cdot \cos\nu$ aus (§. 14. II. Geom.), oder aus der 4ten Note zu (§. 28.), so erhält man sogleich

$$10) \quad \cos\lambda \cdot \delta x + \cos\mu \cdot \delta y + \cos\nu \cdot \delta z = 0.$$

Aber deshalb folgt nun aus der Gleichung (8.), daß jetzt auch

---

*) Diese Gleichung hätte man augenblicklich aus (I.) ableiten können, da, wenn der normale Gegendruck R der Fläche L noch mit zu den gegebenen Kräften P gezählt wird, der Atom O als ganz frei angesehen werden kann (vgl. §. 22. u. §. 24. Nr. 2.)

**) D. h. nimmt man den Punkt A in der Fläche L selbst, so daß seine Koordinaten-Werthe $x_\varkappa$, $y_\varkappa$, $z_\varkappa$ statt x, y, z in die Gleichung $L_{x,y,z} = 0$ substituirt, diese Gleichung identisch machen müssen. — Dabei ist jetzt der Punkt A von O doch noch beliebig weit entfernt, und vom Unendlich-Kleinen ist nicht die Rede.

11) $\delta r = 0$

seyn muß, so daß, unter der jetzigen Voraussetzung, die Gleichung (☾) wieder genau in die Gleichung (⊙) übergeht.

III. Ist endlich der Atom O gezwungen, in einer durch die Gleichungen

$$L_{x,y,z} = 0 \quad \text{und} \quad L'_{x,y,z} = 0$$

gegebenen Linie l zu bleiben, so muß man die beiden normalen Gegendrucke R und R' in Rechnung bringen, und man erhält sogleich, wenn r' die analoge Bedeutung wie r hat,

(♂) ... $R \cdot \delta r + R' \cdot \delta r' + \Sigma(P \cdot \delta p) = 0,$

welche Gleichung gilt, wie auch $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$ gedacht werden mögen.

Nimmt man aber jetzt wieder den Punkt A in der Linie l, so daß außer

$$L_{x,y,z} = 0 \quad \text{und} \quad L'_{x,y,z} = 0,$$

auch noch

$$L_{x_{\prime\prime},y_{\prime\prime},z_{\prime\prime}} = 0 \quad \text{und} \quad L'_{x_{\prime\prime},y_{\prime\prime},z_{\prime\prime}} = 0,$$

also auch

$$(\delta L =)\ \partial L_x \cdot \delta x + \partial L_y \cdot \delta y + \partial L_z \cdot \delta z = 0$$

und $(\delta L' =)\ \partial L'_x \cdot \delta x + \partial L'_y \cdot \delta y + \partial L'_z \cdot \delta z = 0$

wird, so wird auch nun

$$\delta r = 0 \quad \text{und} \quad \delta r' = 0,$$

und die Gleichung (♂) geht wiederum in die Gleichung (⊙) über.

IV. Die Gleichung

(⊙) ... $\Sigma(P \cdot \delta p) = 0$

gilt also in allen 3 Fällen (I. II. III.) des Gleichgewichts, sobald man nur in den 2 letztern Fällen $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$ nicht ganz beliebig nimmt, sondern im Falle der (II.) so, daß auch $\delta L = 0$ wird, und im Falle der (III.) so, daß nicht bloß $\delta L$, sondern auch $\delta L'$ der Null gleich wird.

Diese Gleichung (⊙) ist also, genau genommen, eine unbedeutende Umformung der Gleichung (⊙ des §. 28.), jedoch selbstständig gewonnen, ohne daß, in der Entwikkelung eben so wenig wie in der Anwendung, vom Unendlich-Kleinen die Rede

zu seyn braucht, wie im (§. 28.), und auch ohne daß solche geometrische Betrachtungen benutzt sind, wie im (§. 27.). Man kann sich jedoch auch hier immer noch von O bis A einen (aber nicht unendlich-kleinen) Weg denken, der im Falle der (I.) ganz frei, im Falle der (II.) auf der Fläche L, endlich im Falle der (III.) auf der Linie l zurückgelegt wird, der also eben sowohl gerade als krummlinig seyn kann.

Multiplizirt man aber die Gleichung ($\odot$) mit $\varkappa$, und denkt man sich dabei $\varkappa$ unendlich-klein, so wird $\varkappa \cdot \delta p = dp$, und man erhält sogleich, in allen 3 Fällen, die Gleichung $\Sigma(P \cdot dp) = 0$ des (§. 28.) wieder.

## §. 30.

### Von den statischen Momenten.

Betrachten wir noch eine neue und besonders wichtige Form, unter welcher die gefundenen Gleichungen des Gleichgewichts erscheinen können.

I. A) Denken wir uns aber zuerst den Fall, wo alle n Kräfte P, die auf den Atom O wirken, mit ihren Richtungen in einer und derselben Ebene liegen. Nimmt man nun in dieser Ebene zwei auf einander senkrechte Axen OX und OY (Fig. 30.), und sind $\alpha$, $\beta$ die Winkel, welche P mit OX und OY bezüglich macht, so hat man im Falle des Gleichgewichts zwei Gleichungen, namentlich auch die Gleichung

1) $$\Sigma(P \cdot \cos\alpha) = 0.$$

Nimmt man aber in der Axe OY einen beliebigen Punkt D; fällt man von D aus auf die Richtung der Kraft P die senkrechte Linie $DD_1$, und bezeichnet man

$$\pm DD_1 \text{ durch } p,$$

so daß $p$ $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\}$ wird, je nachdem der Winkel $\alpha$ $\left\{\begin{matrix}\text{spitz}\\ \text{stumpf}\end{matrix}\right\}$ ist, so hat man allemal, wie die Figur zeigt,

2) $$\cos\alpha = \pm\sin\beta = \frac{p}{OD}.$$

Die Gleichung (1.) geht dann, da OD für alle Kräfte P der-

ſelbe Nenner bleibt, ſo daß die ganze Gleichung damit weg multiplizirt werden kann, über in die Gleichung

$$(\odot)\cdots \qquad \Sigma(P\cdot p) = 0.$$

Da die Axen OX und OY ganz beliebig gelegt werden können, ſo kann der Punkt D in der Ebene, in welcher die Richtungen aller Kräfte liegen, zuerſt und ganz beliebig genommen werden (in ſo ferne OD verlängert zur Axe OY genommen, und die Axe OX auf dieſe OY ſenkrecht gedacht werden kann).

B) Das Produkt $P\cdot p$ aus der Kraft P in die poſitiv oder negativ in Rechnung gebrachte ſenkrechte Entfernung p (eines beliebigen Punktes D in der Ebene, von der Richtung der Kraft P) heißt das ſtatiſche Moment der Kraft P, in Bezug auf dieſen Punkt D, welcher das Centrum des Moments genannt wird; und es wird ſolches als poſitiv oder als negativ angeſehen, d. h. p wird poſitiv oder negativ gedacht, je nachdem $\alpha$ ſpitz oder ſtumpf iſt, während $\alpha$ die Winkel repräſentirt, welche die Kräfte P mit der auf OD ſenkrecht gedachten OX bildet, welche letztere Linie OX für alle Kräfte in einem und demſelben Sinne gedacht wird. Dieſe poſitive oder negative Zahl p heißt der Arm des Moments.

C) Im Falle des Gleichgewichts der Kräfte P, die einen Atom O angreifen, und deren Richtungen alle in einer Ebene liegen, iſt alſo die Summe der ſtatiſchen Momente aller Kräfte P (in Bezug auf ein in derſelben Ebene ganz beliebig genommenes Centrum D) der Null gleich.

D) Und iſt die Summe der ſtatiſchen Momente aller Kräfte P zweimal der Null gleich, einmal in Bezug auf ein beliebiges Centrum D, das andere mal in Bezug auf ein anderes ſolches beliebiges Centrum D′ in derſelben Ebene, ſo ſind die Kräfte P ſelbſt nothwendig im Gleichgewicht, weil dies zweien ſolchen Gleichungen

$$\Sigma(P\cdot\cos\alpha) = 0 \quad \text{und} \quad \Sigma(P\cdot\cos\alpha') = 0$$

gleich kommt (vgl. §. 26.)*). —

*) Daß die 2 Gleichungen nicht in eine einzige zuſammenfallen dür-

E) Betrachtet man endlich die (Fig. 30.) noch einmal, so findet man, daß in den Fällen, wo $\alpha$ spitz ist, die Kraft P die Ebene um das Centrum D in einem Sinne drehen würde (wenn sie sich um diesen Punkt D drehen könnte), daß aber, so oft $\alpha$ stumpf ist, dieselbe Kraft P die Ebene um D genau in dem entgegengesetzten Sinne drehen würde. — Also nimmt man im statischen Moment alle diejenigen Arme p positiv, deren Kräfte P die Ebene um das Centrum D in einem und demselben Sinne drehen würden; dagegen werden alle diejenigen Arme p negativ in Rechnung gebracht, deren Kräfte P die Ebene um das Centrum D in genau entgegengesetztem Sinne drehen würden.

II. A) Liegen aber die Kräfte P, welche auf den Atom O wirken, mit ihren Richtungen nicht in derselben Ebene, so kann man doch durch O eine beliebige Ebene E legen, und zu gleicher Zeit eine auf E senkrechte Linie OZ sich denken. — Nennt man nun $\gamma$ den Winkel, welchen jede Kraft P mit OZ macht, so schneidet dieser Winkel $\gamma$ die Ebene E in einer Linie, welche der Richtung nach die Projektion der durch die Linie P vorgestellten Kraft P auf diese Ebene E ist. Dann läßt sich die Kraft P nach dem Kräften-Rechteck in zwei Kräfte zerlegen, nämlich

$$\text{in } P \cdot \cos\gamma \text{ in der Richtung OZ,}$$
$$\text{und in } P \cdot \sin\gamma \text{ in der Ebene E,}$$

und zwar in der Richtung der Projektion von P auf E.

Sind nun n Kräfte P gegeben, so hat man n Kräfte $P \cdot \cos\gamma$, die alle in der Richtung OZ wirken, während die übrigen n Kräfte $P \cdot \sin\gamma$ den Atom O ringsherum in der Ebene E angreifen, also den Fall der (I.) bilden. Lassen sich nun die ersten n Kräfte in eine einzige Z vereinigen, so ist solche

$$Z = \Sigma(P \cdot \cos\gamma);$$

---

sen, versteht sich von selbst. Solches würde aber der Fall seyn, wenn D mit O und D in einer und derselben Richtung liegen sollte.

und lassen sich letztere in eine einzige $P'$ vereinigen, so läßt sich solche $P'$ nach (§. 14.) finden.

Im Falle aber die n Kräfte P den Atom O im Gleichgewicht erhalten, kann weder die Kraft Z noch die Kraft $P'$ existiren; denn existirten beide, so ließen sich beide in eine einzige $P_0$ vereinigen, die durch nichts vernichtet wird, so daß nicht Gleichgewicht wäre; und fände nur eine von beiden statt, so wäre diese wiederum durch nichts vernichtet, also wäre wiederum nicht Gleichgewicht. — Im Falle des Gleichgewichts ist es also nothwendig

1) daß $\Sigma(P \cdot \cos\gamma) = 0$ sey;

und 2) daß die n Kräfte $P \cdot \sin\gamma$ (welche der Größe und Richtung nach die Projektionen der Kräfte P auf die Ebene E sind, sobald man P auch der Größe nach durch eine Linie von bestimmter Länge vorgestellt sich denkt) ebenfalls einander im Gleichgewicht halten, was nach (I.) der Fall ist, wenn die Summe der statischen Momente dieser Projektionen $P \cdot \sin\gamma$ der Kräfte P zweimal der Null gleich ist, in Bezug auf zwei in der Ebene E beliebig angenommene Centra D und $D'$; oder auch wenn nur eine solche Momenten-Gleichung, dagegen an der Stelle der zweiten eine Gleichgewichts-Gleichung in irgend einer andern der von uns angeführten Formen statt findet.

B) Denkt man sich nun durch O drei solche Ebenen E, so kann man, im Falle der Atom O im Gleichgewicht sich befindet, 3 solche Momenten-Gleichungen (in jeder der 3 Ebenen E eine, in Bezug auf ein in derselben Ebene beliebig gewähltes Centrum D) erhalten; und umgekehrt: finden in Bezug auf drei solche durch O beliebig gelegte Ebenen E, drei solche Momenten-Gleichungen statt, so halten sich die Kräfte P nothwendig im Gleichgewicht *).

---

*) Der Grund hiervon ist ganz einfach. Jede solche Momenten-Gleichung ist nach (I.) nichts weiter als die Gleichung

$$\Sigma(P \cdot \sin\gamma \times \cos\varphi) = 0,$$

wenn $\varphi$ der Winkel ist, welchen die Kraft $P \cdot \sin\gamma$ in der Ebene E mit

Drei ſolche Momenten-Gleichungen zwiſchen den Projektionen der Kräfte P auf 3 beliebig durch O gelegte Ebenen ſind alſo zum Gleichgewicht des Atoms O *nothwendig* und *ausreichend*.

III. Die n Kräfte P, welche einen Atom O angreifen, und deren Richtungen dabei nicht in einer und derſelben Ebene liegen, ſind auch nothwendig im Gleichgewicht, wenn man durch O nur zwei beliebige ſolche Ebenen E legt, in der einen dieſer Ebenen aber *zwei* ſolche Momenten-Gleichungen nimmt, in Bezug auf zwei in ihr beliebig gewählte Centra D und D', während die dritte Momenten-Gleichung aus der andern Ebene hergeholt werden muß; eben weil dieſe 3 Gleichungen, wie die unten ſtehende Note nachweiſt, den dreien Gleichungen

$$\Sigma(P \cdot \cos\alpha) = 0, \quad \Sigma(P \cdot \cos\alpha') = 0, \quad \Sigma(P \cdot \cos\alpha'') = 0$$

des (§. 25.) gleich zu achten ſind.

IV. Alles in (I.) und in (II.) ſo wie in (III.) Geſagte behält noch ſeine volle Gültigkeit, wenn auch eine Fläche L oder eine Linie l in ſo ferne zum Gleichgewicht beiträgt, als der Atom gezwungen iſt in dieſer Fläche L oder in dieſer Linie l zu bleiben, wenn man nur nicht unterläßt in einem dieſer beiden letztern Fälle den normalen Gegendruck R oder Q, oder die normalen Gegendrucke R und R' (§. 24.) mit zu den Kräften P noch hinzu zu zählen.

Legt man die Ebene E ſenkrecht auf den Gegendruck R, ſo iſt ſeine Projektion und daher auch ſein ſtatiſches Moment in Bezug auf dieſe Ebene $= 0$. — Und nimmt man zu gleicher Zeit das Centrum D in der Projektion eines etwa vorhandenen zweiten Gegendrucks R', ſo iſt auch deſſen ſtatiſches Moment $= 0$,

---

einer in derſelben Ebene E durch O gelegten Axe OX bildet. Iſt nun $\alpha$ der Winkel, welchen P ſelbſt mit OX bildet, ſo iſt nach der ſphäriſchen Trigonometrie $\sin\gamma \cdot \cos\varphi = \cos\alpha$, alſo daß die gedachte *Momenten-Gleichung* bloß eine andere Form der Gleichung $\Sigma(P \cdot \cos\alpha) = 0$ iſt. Da nun Gleichgewicht iſt (nach §. 25.), wenn in Bezug auf *drei* beliebige ſolche Axen OX, OX' und OX'' *drei* ſolche Gleichungen ſtatt finden, ſo iſt die obige Behauptung einleuchtend, und bedarf keines weitern Beweiſes.

weil dann deſſen Arm = 0 iſt. — Dann erhält man ſogleich die Gleichgewichts-Gleichung bloß zwiſchen den gegebenen Kräften P.

Natürlich kann man die Ebene E oder das Centrum D auch ſo nehmen, daß in der Gleichung des Gleichgewichts entweder R allein, oder R' allein vorkommt. Dies kann dann am bequemſten ſeyn, wenn man R oder R' berechnen will.

Schluß-Anmerk. Wir könnten fortfahren neue Formen hinzuſtellen, unter denen dieſelben, (§§. 20. — 23.) für den Fall, daß ein Atom im Gleichgewicht ſich befindet, hingeſtellten Gleichgewichts-Gleichungen noch erſcheinen können; wir begnügen uns aber mit dem bis jetzt darüber Mitgetheilten, da ſolches die in den verſchiedenen Anwendungen gewöhnlichen Formen enthält und außerdem noch hinlänglich beſtimmt erkennen läßt, wie zu verfahren wäre, wenn man noch neue Formen hinſtellen, zu gleicher Zeit aber gewiß ſeyn wollte, daß oder wann das Gleichgewicht auch wirklich nothwendig ſey.

# Mechanik des Atoms.

## Viertes Kapitel.

### Theorie der freien geradlinigen Bewegung eines Atoms.

#### Vorerinnerung.

Dem geneigten Leser, welcher noch Anfänger ist, geben wir hier den Rath, das in diesem ersten Theile des ganzen Werkes noch folgende nur so weit zu lesen, als er dieses leicht und schnell genug thun kann, dann aber lieber sogleich die Fortsetzung der Statik im zweiten Theile dieses Werkes vorzunehmen, und später erst zu diesen Kapiteln zurückzukehren.

#### §. 31.

##### Wie die Kräfte in Rechnung gebracht werden.

1) Wir haben im (§. 6.) die Ursache der Bewegung **Kraft** genannt, und uns vorgenommen, diese Kraft durch dieselbe Zahl in Rechnung zu bringen, durch welche die Geschwindigkeit in Rechnung gebracht wird, welche diese Kraft **bei einmaliger Wirkung** auf einen ruhenden oder bereits eine Geschwindigkeit habenden Atom hervorbringt; nur daß im letztern Falle diese Wirkung in einer Vermehrung der schon vorhandenen Geschwindigkeit sichtbar wird. Nach (§. 4.) wird aber die (augenblickliche Geschwindigkeit durch eine unbenannte Zahl ausgedrückt, welche das Verhältniß (den Quotienten) des Raumes zur (durch

die) Zeit vorstellt, letztere als unbenannte Zahlen von Fußen und Sekunden *) gedacht.

2) Wenn nun dieselbe Kraft n mal hinter einander in derselben Richtung wirkt, so ist nach (§. 10. I.) die hervorgebrachte Geschwindigkeit genau dieselbe, wie wenn die n fache Kraft einmal in derselben Richtung wirkte.

3) Hat daher eine Kraft durch n maliges Wirken in derselben Richtung die Geschwindigkeit $\varphi$ hervorgebracht (d. h. einem ruhenden Atom diese Geschwindigkeit $\varphi$ gegeben, oder die Geschwindigkeit a eines bereits in derselben Richtung sich bewegenden Atoms um diese Geschwindigkeit $\varphi$ vermehrt), so bringt die einfache Wirkung derselben Kraft die Geschwindigkeit $\frac{\varphi}{n}$ oder $\varphi \cdot \frac{1}{n}$ hervor; und $\varphi \cdot \frac{1}{n}$ ist also die Zahl, mit welcher diese Kraft nach (§. 6.) in Rechnung gebracht wird.

4) Wirkt also eine Kraft stetig, d. h. in unmerklichen oder vielmehr in unendlich-kleinen Zwischen-Zeiten dt, ohne während ihrer Wirkungen sich zu verändern (d. h. ohne größer oder kleiner zu werden), eine volle Sekunde hinter einander in derselben Richtung, und hat sie zu Ende der Sekunde die Geschwindigkeit $\varphi$ hervorgebracht (d. h. die etwa in derselben Richtung schon vorhandene Geschwindigkeit des Atoms um $\varphi$ vermehrt), so ist die Kraft selbst mit

$$\varphi \cdot dt$$

in Rechnung zu bringen.

Denn da dt die Dauer einer einmaligen Wirkung ist, so ist $\frac{1}{dt} = n$ die Anzahl aller Wirkungen in der Sekunde, folglich ist die einfache Wirkung nach (3.) $= \varphi \cdot \frac{1}{n} = \varphi \cdot dt$.

---

*) Daß die Einheiten willkührlich sind, wenn nur durchweg dieselben Größen, die mit einander verglichen werden, durch dieselben Einheiten ausgedrückt sind, bedarf keiner besondern Erwähnung. Wir haben die obigen Einheiten Fuß und Sekunde gewählt, die sich aber jeder Leser so groß oder so klein denken kann als er will.

# Mechanik des Atoms.

## Viertes Kapitel.

### Theorie der freien geradlinigen Bewegung eines Atoms.

Vorerinnerung.

Dem geneigten Leser, welcher noch Anfänger ist, geben wir hier den Rath, das in diesem ersten Theile des ganzen Werkes noch folgende nur so weit zu lesen, als er dieses leicht und schnell genug thun kann, dann aber lieber sogleich die Fortsetzung der Statik im zweiten Theile dieses Werkes vorzunehmen, und später erst zu diesen Kapiteln zurückzukehren.

### §. 31.

Wie die Kräfte in Rechnung gebracht werden.

1) Wir haben im (§. 6.) die Ursache der Bewegung **Kraft** genannt, und uns vorgenommen, diese Kraft durch dieselbe Zahl in Rechnung zu bringen, durch welche die Geschwindigkeit in Rechnung gebracht wird, welche diese Kraft **bei einmaliger Wirkung** auf einen ruhenden oder bereits eine Geschwindigkeit habenden Atom hervorbringt; nur daß im letztern Falle diese Wirkung in einer Vermehrung der schon vorhandenen Geschwindigkeit sichtbar wird. Nach (§. 4.) wird aber die (augenblickliche Geschwindigkeit durch eine unbenannte Zahl ausgedrückt, welche das Verhältniß (den Quotienten) des Raumes zur (durch

die) Zeit vorstellt, letztere als unbenannte Zahlen von Fußen und Sekunden *) gedacht.

2) Wenn nun dieselbe Kraft n mal hinter einander in derselben Richtung wirkt, so ist nach (§. 10. I.) die hervorgebrachte Geschwindigkeit genau dieselbe, wie wenn die n fache Kraft einmal in derselben Richtung wirkte.

3) Hat daher eine Kraft durch n maliges Wirken in derselben Richtung die Geschwindigkeit $\varphi$ hervorgebracht (d. h. einem ruhenden Atom diese Geschwindigkeit $\varphi$ gegeben, oder die Geschwindigkeit a eines bereits in derselben Richtung sich bewegenden Atoms um diese Geschwindigkeit $\varphi$ vermehrt), so bringt die einfache Wirkung derselben Kraft die Geschwindigkeit $\frac{\varphi}{n}$ oder $\varphi \cdot \frac{1}{n}$ hervor; und $\varphi \cdot \frac{1}{n}$ ist also die Zahl, mit welcher diese Kraft nach (§. 6.) in Rechnung gebracht wird.

4) Wirkt also eine Kraft stetig, d. h. in unmerklichen oder vielmehr in unendlich-kleinen Zwischen-Zeiten dt, ohne während ihrer Wirkungen sich zu verändern (d. h. ohne größer oder kleiner zu werden), eine volle Sekunde hinter einander in derselben Richtung, und hat sie zu Ende der Sekunde die Geschwindigkeit $\varphi$ hervorgebracht (d. h. die etwa in derselben Richtung schon vorhandene Geschwindigkeit des Atoms um $\varphi$ vermehrt), so ist die Kraft selbst mit

$$\varphi \cdot dt$$

in Rechnung zu bringen.

Denn da dt die Dauer einer einmaligen Wirkung ist, so ist $\frac{1}{dt} = n$ die Anzahl aller Wirkungen in der Sekunde, folglich ist die einfache Wirkung nach (3.) $= \varphi \cdot \frac{1}{n} = \varphi \cdot dt$.

---

*) Daß die Einheiten willkührlich sind, wenn nur durchweg dieselben Größen, die mit einander verglichen werden, durch dieselben Einheiten ausgedrückt sind, bedarf keiner besondern Erwähnung. Wir haben die obigen Einheiten Fuß und Sekunde gewählt, die sich aber jeder Leser so groß oder so klein denken kann als er will.

Jede ſtetig wirkende Kraft alſo, welche in einer endlichen Zeit eine endliche Geſchwindigkeit hervorbringt (vorausgeſetzt, daß ihre Wirkungen immer dieſelbe Richtung behalten, und daß ſie auch der Größe nach genau dieſelbe bleibt), iſt daher mit dt zugleich unendlich-klein (vgl. §. 20. Analyſ.).

5) Umgekehrt: Bringen wir eine eben jetzt wirkende Kraft X·dt in Rechnung, ſo drückt der Faktor X die Geſchwindigkeit aus, welche dieſelbe Kraft in einer Sekunde hervorbrächte, wenn ſie dieſe Sekunde hindurch immerfort ſtetig und unverändert in derſelben Richtung auf denſelben Atom wirkte. Und X·dt ſelbſt iſt die Geſchwindigkeit, welche dieſelbe Kraft bei einer einmaligen Wirkung hervorbringt.

6) Es geſchieht ſehr häufig, daß man die ſtetig wirkende Kraft, welche durch das Produkt $\psi \cdot dt$ in Rechnung gebracht werden muß, bloß $\psi$ nennt, den in Ziffern nie ausdrückbaren Faktor dt alſo, bei dem Namen der Kraft wegläßt. — Geſchieht dies, ſo darf ja nicht unterlaſſen werden, ſo oft dieſelbe Kraft wirklich in Rechnung gebracht wird, dieſen Faktor dt ſogleich wieder hinzuzufügen *).

## §. 32.

**Aufgabe.** Eine Kraft $\varphi$ (d. h. $\varphi \cdot dt$) wirkt auf einen Atom in einer und derſelben Richtung t Sekunden hinter einander ſtetig. Man ſoll die Geſchwindigkeit v beſtimmen, welche dieſe Kraft $\varphi$ nach Verfluß der t Sekunden hervorgebracht haben wird.

**Auflöſung.** I. Iſt $\varphi$ nach t konſtant, etwa $= g$, ſo daß $\varphi$ während der Dauer der Wirkungen immer denſelben Werth g behält, ſo iſt die in einer Sekunde hervorgebrachte Geſchwin-

*) Hieße es alſo: „die Schwere ſey g", ſo würde dies bedeuten, daß die einmalige Wirkung der Schwere die Geſchwindigkeit g·dt hervorbringt, daß alſo g·dt die Zahl iſt, wodurch wir die Schwere in Rechnung bringen, während g ſelbſt die Geſchwindigkeit iſt, welche die Schwere einem Atom beibringt, wenn ſie eine volle Sekunde hindurch ſtetig und unverändert auf ihn wirkt.

digkeit $= g$, und die in t Sekunden hervorgebrachte Geschwindigkeit offenbar $= g \cdot t$. Hat also der Atom anfangs die Geschwindigkeit c in derselben Richtung schon gehabt, so ist

$$v = c + g \cdot t.$$

II. Ist aber $\varphi$ eine Funktion von t, so daß die stetig wirkende Kraft $\varphi_t \cdot dt$ in jedem andern Augenblick auch größer oder kleiner ist, als im vorhergehenden Augenblick, so ist die nach t Sekunden hervorgebrachte Geschwindigkeit doch $= \Sigma(\varphi \cdot dt)$, wenn man damit die Summe der einzelnen Geschwindigkeiten bezeichnet, welche alle durch $\varphi \cdot dt$ repräsentirt sind, und welche sich aus dieser allgemeinen Form $\varphi_t \cdot dt$ ergeben, wenn man in $\varphi_t$ statt t nach und nach alle stetig neben einander liegenden, um das unendlich-kleine dt von einander verschiedenen, von 0 bis t liegenden Werthe setzt. — Nun wird aber nach (§. 35. Analys.) diese Summe $\Sigma(\varphi_t \cdot dt)$ gefunden, wenn man $\varphi_t$ nach t zwischen den Grenzen 0 und t integrirt. Also hat man, im Falle der Atom Anfangs schon die Geschwindigkeit c hatte,

1) $$v = c + \int_{t \div 0} \varphi_t \cdot dt,$$

woraus noch, wenn man nach t differenziirt,

2) $$\partial v_t = \varphi$$

hervorgeht.

III. Und diese Formeln (1. und 2.) enthalten auch den Fall (I.), wo $\varphi$ nach t konstant gedacht wurde, als einen besondern in sich, wie sich von selbst versteht, wie aber auch noch daraus hervorgeht, daß, so oft $\varphi$ nach t konstant und $= g$ ist, dann

$$\int_{t \div 0} \varphi \cdot dt = \int_{t \div 0} g \cdot dt = g \cdot t$$

gefunden wird.

Anmerk. Man konnte auch so schließen: wenn die Kraft $\varphi_t \cdot dt$ nach t Sekunden die Geschwindigkeit $v_t$ hervorbringt, so bringt dieselbe Kraft in $t + dt$ Sekunden die Geschwindigkeit $v_{t+dt}$ oder $v + dv$ (§. 21. Analys.), also in der unmittelbar nach t folgenden unendlich-kleinen Zeit dt die unendlich-kleine (positive oder negative) Vermehrung dv an Geschwindigkeit hervor.

Die einmalige Wirkung der Kraft $\varphi_t \cdot dt$, gerade wie t seinen vollen End-Werth hat, ist also dv. Folglich hat man

$$\varphi_t \cdot dt = dv, \quad \text{also} \quad \varphi_t = \frac{dv}{dt} = \partial v_t,$$

woraus auch wieder

$$v = \int \varphi_t \cdot dt$$

hervorgeht, wo das Integral so genommen werden muß, daß v, für $t = 0$ in die Anfangs-Geschwindigkeit des Atoms übergeht.

Dies sind aber genau wieder die Resultate (1. 2.) des Paragraphen.

## §. 33.

### Allgemeine Gleichungen der geradlinigen Bewegung.

1) Ist daher bei einer (veränderlichen) freien geradlinigen Bewegung, t die Zeit, s der in dieser Zeit t beschriebene Weg v die zu Ende der Zeit t vorhandene Geschwindigkeit, und $\varphi$, oder vielmehr $\varphi \cdot dt$, die zu Ende einer jeden Zeit t vom Anfange der Bewegung an, bis zu dem vollen End-Werthe von t stetig wirkende Kraft, so finden nach (§§. 32. u. 4.) zwischen t, s, v und $\varphi$ folgende Gleichungen statt, nämlich

I. $\partial s_t = v$ und II. $\partial v_t = \varphi$,

woraus noch

III. $\partial^2 s_t = v \cdot \partial v_s = \varphi$ *)

hervorgeht.

2) Sind also von den 4 Größen t, s, v, $\varphi$ zwei gegeben, so lassen sich die andern beiden allemal dazu finden. — Und ist insbesondere die Kraft $\varphi$ gegeben, so kann man mittelst der beiden Gleichungen (I. u. II.) v und s, beide in t ausge-

*) Es ist nach (Analys. §. 16.)

$$\partial v_s = \frac{\partial v_t}{\partial s_t}, \quad \text{also} \quad \partial s_t \cdot \partial v_s = \partial v_t.$$

Weil aber $\partial s_t = v$, also $\partial^2 s_t = \partial v_t$ ist, so folgt sogleich $v \cdot \partial v_s = \partial^2 s_t$, während offenbar $\partial^2 s_t = \partial v_t = \varphi$ ist.

drückt, dazu finden. Dabei kann $\varphi$ unmittelbar in t gegeben seyn, oder diese Zeit t auch mittelbar (nämlich in v oder s) enthalten.

3) Wie auch $\varphi$ gegeben seyn mag, so führt doch die Integration der beiden Gleichungen der Bewegung in (1.) zwei willkührliche Konstanten ein, welche in der Regel dadurch bestimmt werden,

$\alpha$) daß man für $t = 0$ den Raum s kennt, der in der Regel auch Null ist, dagegen nach (Anmerk. 2. zu §. 5.) auch anders seyn kann; und

$\beta$) daß für $t = 0$ der Werth der Geschwindigkeit v in die Anfangs-Geschwindigkeit des Atoms übergehen muß.

Diese vollständige Theorie der freien veränderlichen geradlinigen Bewegung mag nun in einzelnen Beispielen ihre Erläuterung finden.

1ſtes Beiſpiel. Eine konſtante Kraft p (d. h. $p \cdot dt$) wirkt ſtetig in derſelben Richtung auf einen Atom; man ſoll die Geſetze ſeiner Bewegung näher beſtimmen.

Dasmal iſt $\varphi = p$; die beiden Gleichungen der geradlinigen Bewegung ſind daher jetzt

1) $\delta s_t = v$ und 2) $\delta v_t = p$.

Integrirt man nun die (2.) nach allem t, ſo ergiebt ſich

3) $v = p \cdot t + c$,

wo c der Werth von v wird für $t = 0$, alſo der Anfangs-Geſchwindigkeit des Atoms gleich kommt. Setzt man aber dieſen Werth von v aus (3.) ſtatt v in die (1.), und integrirt man die entſtehende Gleichung wiederum nach allem t, ſo erhält man:

4) $s = \frac{1}{2}p \cdot t^2 + c \cdot t + c'$,

wo die Konſtante 'c' den Werth von s für $t = 0$ vorſtellt. — Die Gleichungen (3. u. 4.) ſind es nun, welche den Weg s und die Geſchwindigkeit v liefern, wie beide zu Ende der Zeit t ſtatt finden *).

*) Nach (§. 4.) gehört die hier ſo eben betrachtete Bewegung zu den gleichförmig beſchleunigten, weil $v = p \cdot t + c$ iſt. Derſelbe Satz gilt auch noch umgekehrt; iſt nämlich $\delta s_t$ oder $v = a \cdot t + b$, ſo iſt allemal $\varphi = \delta v_t = a$, d. h. iſt nach (§. 5.) die Bewegung eine gleichförmig beſchleunigte, ſo iſt die Kraft $\varphi$, deren ſtetige Wirkung ſolche hervorbringt, allemal (nach t) konſtant.

Anmerk. Wird die Schwere als eine ſolche konſtante Kraft angeſehen, und durch g (d. h. $g \cdot dt$) bezeichnet, und wird kein Hinderniß weiter berückſichtigt, namentlich nicht der Widerſtand der Luft, ſo hat man alſo für den freien Fall eines Atoms

(A.)··· $v = g \cdot t + c$,

wo $c = 0$ iſt, wenn der Atom in ſeiner Ruhe dem Fall überlaſſen worden, wo aber im Allgemeinen c die Kraft vorſtellt, mit welcher der Atom in der Richtung der Schwere herab geworfen wird, in ſo ferne dann der Atom, noch ehe die Schwere einwirkt, dieſe Anfangs-Geſchwindigkeit c hat. — Ferner iſt für dieſen freien Fall

(B.)··· $s = \frac{1}{2} g \cdot t^2 + c \cdot t$,

wo s die Fall-Höhe iſt.

Für $c = 0$, d. h. wenn der Atom aus der Ruhe dem Fallen überlaſſen wird, und wenn die Fall-Höhe jetzt durch h bezeichnet wird, hat man alſo

(⊙)··· $v = g \cdot t$, (☾)··· $h = \frac{1}{2} g \cdot t^2$,

woraus noch durch Elimination von t

(♂)··· $v = \sqrt{2g \cdot h}$

hervorgeht. — Alle im (§. 5.) aufgezählten Eigenſchaften der gleichförmig beſchleunigten Bewegung gehören übrigens natürlich auch dem hier ſo eben betrachteten freien Fall eines Atoms an *).

Es geſchieht häufig, daß man, ſtatt eine Geſchwindigkeit a direkt zu geben, ſie dadurch giebt, daß man ſagt: „es wäre die zur Fall-Höhe h „gehörige Geſchwindigkeit.“ In ſolchem Falle muß man dieſe Geſchwindigkeit a erſt nach der Formel (♂) berechnen, nämlich $a = \sqrt{2g \cdot h}$, und zu dem Ende müßte man auch den Werth g gegeben haben.

2tes Beiſpiel. Auf einen Atom, der in irgend einer Richtung eine Geſchwindigkeit c hat, wirkt die Zeit t hindurch eine konſtante Kraft p, oder vielmehr $p \cdot dt$, ſtetig in genau entgegengeſetzter Richtung. Man ſoll die Geſetze ſeiner Bewegung näher angeben.

Nach (§. 11.) iſt dasmal $\varphi = -p$, alſo ſind die Gleichungen der Bewegung (I. II.) jetzt

1) $\partial s_t = v$ und 2) $\partial v_t = -p$.

Daraus folgt ſogleich, wenn man integrirt,

3)

*) Und ſo wie ein Atom frei fällt, nach denſelben Geſetzen fällt auch ein feſter Körper frei, da alle Atome deſſelben zu jeder Zeit dieſelbe Geſchwindigkeit haben, keiner alſo den andern treibt oder zurückhält, wenn man nur den Widerſtand der Luft nicht berückſichtigt, alſo das Fallen im luftleeren Raume ſich denkt.

3) $v = -p \cdot t + c = c - p \cdot t,$

und

4) $s = c \cdot t - \frac{1}{2} p \cdot t^2,$

wenn für $t = 0$ auch $s = 0$ werden soll.

Bei dieser Aufgabe kann man die Zeit $t'$ und den Weg $s'$ suchen, bis zu der Stelle, wo diese Bewegung aufhört (wo also der Atom entweder in Ruhe bleibt, oder eine neue Bewegung beginnt). Soll nämlich die Bewegung aufhören, so muß $v = 0$ werden. Die Gleichung (3.) giebt daher

5) $c - p \cdot t' = 0, \quad \text{d. h.} \quad t' = \frac{c}{p};$

und die Gleichung (4.) giebt dazu

6) $s' = \frac{c^2}{p} - \frac{1}{2} p \cdot \frac{c^2}{p^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{c^2}{p}.$

Wird also ein Atom mit der Geschwindigkeit c vertikal in die Höhe geworfen, und die Schwere wie in vorstehender Anmerkung gedacht, so ist dies einer der in dem gegenwärtigen Beispiele betrachteten Fälle. Es ist folglich die ganze Höhe des Wurfes $= \frac{1}{2} \cdot \frac{c^2}{g}$; und die Zeit, die dazu nöthig ist, um den Atom auf diese höchste Höhe zu bringen, $= \frac{c}{g}$.

Hat der Atom diese höchste Höhe erreicht, so ist er in Ruhe; allein weil die Schwere sogleich wieder auf ihn wirkt, so tritt nun die Bewegung der Anmerkung ein, so daß man, wenn die Zeit t von dem Augenblick der Ruhe dieses Atoms an gezählt wird, für diese zweite, abwärts gehende Bewegung, die Gleichungen

$$v = g \cdot t, \quad h = \frac{1}{2} g \cdot t^2, \quad v = \sqrt{2g \cdot h}$$

hat, wo h die zur Zeit t gehörige Fall-Höhe bedeutet. Sucht man aus dieser dritten Formel zu der ganzen vorhin gefundenen Höhe $s' = \frac{1}{2} \cdot \frac{c^2}{g} = h$ die Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{2g \cdot h} = \sqrt{\left(2g \cdot \frac{1}{2} \frac{c^2}{g}\right)},$$

so findet sich $v = c$; d. h. wenn bei dem Fallen von der höchsten Höhe, der Atom den Ort erreicht hat, von welchem er ausgeworfen worden ist, so hat derselbe auch genau wieder die Ge-

ſchwindigkeit c nach unten erlangt, mit welcher er in die Höhe geworfen worden iſt; immer unter den gemachten Vorausſetzungen, alſo namentlich, wenn der Widerſtand der Luft nicht berückſichtigt wird.

3tes Beiſpiel. Iſt gar keine ſtetig wirkende Kraft vorhanden, ſo iſt

$$\varphi = 0,$$

daher

$$\partial s_t = v, \qquad \partial v_t = 0.$$

Aus $\partial v_t = 0$ folgt $v = C$,

wo C die Anfangs-Geſchwindigkeit bedeutet (für $t = 0$). Die Bewegung iſt alſo nach (§. 4.) eine konſtante. — Die andere Gleichung

$$\partial s_t = v = C$$

giebt nun noch

$$s = C \cdot t + C',$$

oder

$$s = C \cdot t,$$

wenn für $t = 0$ auch $s = 0$ werden ſoll. Alles ſo, wie dies mit den (§§. 1. — 5.) übereinſtimmt.

## §. 34.

### Syſtematiſche Integration der Gleichungen der geradlinigen Bewegung.

Ehe wir weitere Beiſpiele geben, wollen wir ſolche erſt nach den verſchiedenen Integrations-Wegen, die man anwenden kann, etwas ordnen.

A. Es kann aber die Kraft $\varphi$ entweder konſtant ſeyn (wie in den vorhergehenden Beiſpielen), oder doch t nur explizit (alſo nicht v, auch nicht s) enthalten.

In dieſem Falle nimmt man die Gleichung

II. $$\partial v_t = \varphi_t$$

und nimmt von ihr links und rechts die Integrale nach allem t. Dadurch erhält man

$$v = c + \int_{t=0} \varphi \cdot dt,$$

wo c die Anfangs-Geſchwindigkeit iſt. Subſtituirt man dieſen Werth ſtatt v in die Gleichung

I. $$\partial s_t = v,$$

so erhält man sogleich, wenn man auf's neue links und rechts die Integrale nimmt,

$$s = c' + \int_{t=0} v \cdot dt,$$

wo die Konstante $c'$ der Werth von $s$ für $t = 0$ ist (vergl. Anmerk. 2. zu §. 5.).

Beispiel. Es wirke eine Kraft $\varphi = \frac{m}{1+t}$ (welche also anfänglich $m \cdot dt$ ist, nachher aber, wo $t$ nicht mehr Null ist, sondern wächst, immer kleiner und kleiner wird), so hat man dasmal

$$\partial v_t = \frac{m}{1+t}, \quad \text{also} \quad v = m \cdot log(1+t) + c,$$

wo $c$ die Anfangs-Geschwindigkeit des Atoms ist.

Hernach giebt die Gleichung (I.) sogleich

$$\partial s_t = m \cdot log(1+t) + c;$$

also, wenn man diese integrirt,

$$s = m \cdot [-t + (1+t) \cdot log(1+t)] + ct,$$

indem man für $t = 0$ auch $s = 0$ voraussetzt.

Da sich für sehr große und dann noch größere $t$ die Werthe des $log(1+t)$, also die Werthe der Geschwindigkeit $v$, wenig ändern, so wird diese Bewegung nach einer sehr langen Zeit einer konstanten Bewegung sich nähern, obgleich ihre Geschwindigkeit immer, wenn auch immer unmerklicher, noch wächst.

B. Ist die gegebene Kraft $\varphi$ bloß eine Funktion von $v$, ohne $s$ oder $t$ unmittelbar zu enthalten, so integrirt man die Gleichungen (I. und II. des §. 33.) auf nachstehende Weise.

Aus der Gleichung

II. $$\partial v_t = \varphi_v$$

bildet man sogleich nach (§. 16. Analys.)

$$\partial t_v = \frac{1}{\varphi_v},$$

und integrirt dann links und rechts nach $v$. Dies giebt

1) $$t = \int \frac{1}{\varphi_v} \cdot dv + c \; *).$$

---

*) Man erhält dasselbe, wenn man aus

$$\partial v_t = \varphi_v, \quad \frac{\partial v_t}{\varphi_v} = 1$$

Man bestimmt c wie immer, indem man $t = 0$ und zu gleicher Zeit statt v die Anfangs-Geschwindigkeit setzt, in so ferne für diese zusammengehörigen Werthe von t und v die Gleichung (1.) noch statt findet, aber jetzt zur Bestimmung von c dient. Dann löst man die Gleichung (1.) nach v auf, so daß man

2) $$v = v_t$$

erhält, und substituirt diesen Werth von v statt v in die Gleichung

I. $$\partial s_t = v.$$

Dadurch geht diese über in

3) $$\partial s_t = v_t,$$

und giebt sogleich

4) $$s = \int v_t \cdot dt + c',$$

wo für $t = 0$, s den Anfangs-Werth annehmen muß, wonach die eingehende willkührliche Konstante c' zu bestimmen ist. — Eliminirt man zuletzt aus (2. u. 4.) noch t, so erhält man auch die Gleichung zwischen s und v.

Doch kann man letztere Gleichung auch dadurch finden, daß man von

$$\partial s_v = \partial s_t \cdot \partial t_v = v \cdot \partial t_v = \frac{v}{\varphi_v}$$

ausgeht, und dann nach v integrirt, so daß man

5) $$s = \int \frac{v}{\varphi_v} \cdot dv$$

erhält.

1stes Beispiel. Auf einen Atom wirke stetig eine konstante Kraft

---

bildet, und nun links und rechts die Integrale nach t nimmt; denn dies giebt

$$\int \frac{\partial v_t}{\varphi'_v} \cdot dt = t, \quad \text{oder} \quad \int \frac{1}{\varphi_v} \cdot dv = t,$$

wo noch die willkührliche Konstante c rechts oder links hinzugefügt werden muß.

mit jedem größern t noch immer kleinen. Läßt man diesen Theil ganz weg, so erhält man aus der Gleichung (1.) das Näherungs-Resultat

$$v = k.$$

Diese Bewegung nähert sich also, je länger sie dauert desto mehr, einer konstanten Bewegung, deren Geschwindigkeit k ist.

2^tes Beispiel. Wirkten g und $m \cdot v^2$ beide einer vorhandenen Geschwindigkeit gerade entgegen (wie dies der Fall ist, wenn man einen Atom vertikal in die Höhe wirft und dabei dieselbe konstante Schwere $g \cdot dt$ und denselben Luft-Widerstand voraussetzt), so hätte man

$$\varphi = -g - m \cdot v^2, \quad \text{oder} \quad = -g - \frac{g}{k^2} \cdot v^2.$$

Die Gleichung (2.) wird nun

$$\delta t_v = -\frac{k^2}{g} \cdot \frac{1}{k^2 + v^2},$$

und giebt, nach (§. 32. II. Analys.) integrirt, wenn die Anfangs-Geschwindigkeit = a vorausgesetzt wird,

$$t = -\frac{k^2}{g} \cdot \int_{v=a} \frac{1}{k^2 + v^2} \cdot dv = -\frac{k}{g} \cdot \left( \frac{1}{tg} \frac{v}{k} - \frac{1}{tg} \frac{a}{k} \right).$$

Setzt man nun

$$\frac{1}{tg} \frac{v}{k} = x, \quad \text{also daß} \quad \frac{v}{k} = tg\,x$$

und

$$\frac{1}{tg} \frac{a}{k} = y, \quad \text{also daß} \quad \frac{a}{k} = tg\,y$$

wird, so ist

$$tg(x-y) = \frac{tg\,x - tg\,y}{1 + tg\,x \cdot tg\,y} = k \cdot \frac{v-a}{k^2 + a \cdot v},$$

also

$$x - y = \frac{1}{tg} k \frac{v-a}{k^2 + a \cdot v}, \quad \text{d. h.} \quad \frac{1}{tg} \frac{v}{k} - \frac{1}{tg} \frac{a}{k} = \frac{1}{tg} k \frac{v-a}{k^2 + a \cdot v}.$$

Die gefundene Gleichung zwischen t und v wird daher

$$-\frac{g}{k} t = \frac{1}{tg} \frac{k(v-a)}{k^2 + a \cdot v},$$

oder, weil $tg(-z) = -tg\,z$ ist,

$$\frac{k \cdot (a-v)}{k^2 + a \cdot v} = tg \frac{gt}{k} = \frac{\sin \frac{gt}{k}}{\cos \frac{gt}{k}},$$

woraus

$$1) \qquad v = k \cdot \frac{a \cdot \cos \frac{gt}{k} - k \cdot \sin \frac{gt}{k}}{a \cdot \sin \frac{gt}{k} + k \cdot \cos \frac{gt}{k}}$$

hervorgeht. — Setzt man nun diesen Werth statt v in die $\delta s_t = v$ (oder

2) $$s = \frac{k^2}{g} \cdot log\left(\frac{e^{\frac{gt}{k}} + e^{-\frac{gt}{k}}}{2}\right)^*),$$

wo für $t = 0$ auch $s = 0$ angenommen worden ist.

Ferner findet sich noch

$$\delta s_v = \frac{k^2}{g} \cdot \frac{v}{k^2 - v^2},$$

woraus nach (§. 30. IV. Analys., wenn man $k^2 - v^2 = x$ setzt)

3) $$s = \frac{k^2}{2g} \cdot log \frac{k^2}{k^2 - v^2}$$

hervorgeht. — Diese Gleichungen (1.—3.) enthalten nun das Gesuchte.

Zu diesen Resultaten würde man also gelangen, wenn man den freien Fall eines Atoms betrachtete in der Luft, und voraussetzte, daß der Widerstand der Luft im Verhältniß des Quadrats der Geschwindigkeit wächst, daß aber die Schwere während des Falles konstant dieselbe bleibt.

Wenn t sehr groß wird, so daß $\frac{gt}{k}$ ebenfalls noch sehr groß ist, wenn also die durch die Schwere g hervorgebrachte End-Geschwindigkeit $g \cdot t$ gegen die konstante Zahl k sehr groß wird, so wird $e^{-\frac{g \cdot t}{k}}$ ungemein klein, und

---

*) Entwikkelt man diese Ausdrücke von v und s in unendliche Reihen, die nach Potenzen von $\frac{1}{k}$ fortlaufen [im Nothfalle nach dem Maclaurin'schen Lehrsatze (§. 19. Analys.), indem man $\frac{1}{k} = x$ setzt, oder auch, indem man die Reihen aus (§. 13. Analys.) zu Hilfe nimmt], so erhält man

$$v = g \cdot t - \frac{g^3 \cdot t^3}{3} \cdot \left(\frac{1}{k}\right)^2 + \cdots \text{ und } s = \tfrac{1}{2} g \cdot t^2 - \frac{g^3 \cdot t^4}{12} \cdot \left(\frac{1}{k}\right)^2 + \cdots.$$

Setzt man nachgehends $m = 0$, also $\frac{1}{k} = 0$, so gehen diese Formeln in

$$v = g \cdot t \qquad \text{und} \qquad s = \tfrac{1}{2} g \cdot t^2$$

des (Beispiels zu §. 33.) über, wie dies seyn muß, weil man dann genau wieder jene Aufgabe hat.

Diese Werthe $v = g \cdot t$ und $s = \frac{1}{2} g \cdot t^2$ für $\frac{1}{k} = 0$ findet man aber auch aus (1. u. 2.), wenn man $\frac{1}{k} = x$ setzt, dann den Werth von $\frac{0}{0}$ sucht, welchen jedesmal die Ausdrücke für $x = 0$ annehmen, dabei aber die Methoden der (§§. 131.—137.) im 4. Theile des „Systems der Mathem." anwendet.

So wie der Atom diese höchste Höhe $s'$ erreicht hat, ist er in Ruhe, und fängt sogleich eine neue Bewegung, und zwar die des nächst vorhergehenden Beispiels an. Findet man aus der Gleichung (3. dieses nächst vorhergehenden Beispiels 1.) zu der so eben gefundenen Höhe $s = s'$ die Geschwindigkeit $v = a'$, so hat man die Gleichung

$$\frac{k^2}{2g} \cdot log \frac{k^2+a^2}{k^2} = \frac{k^2}{2g} \cdot log \frac{k^2}{k^2-a'^2},$$

woraus

$$a'^2 = \frac{a^2 \cdot k^2}{a^2+k^2}$$

hervorgeht. — Bei diesem Widerstand der Luft ist also die Geschwindigkeit $a'$, mit welcher der Atom von seiner höchsten Höhe unten wieder anlangt, kleiner als die Geschwindigkeit $a$, mit welcher er in die Höhe geworfen wurde, während ohne diesen Widerstand der Luft (im Beispiel 2. zu §. 33.) $a' = a$ gefunden worden, und auch hier für $\frac{l}{k} = 0$, also $m = 0$, $a' = a$ gefunden wird.

Auch die Zeiten $t'$ und $t''$, die der Atom braucht, um einerseits seine höchste Höhe zu erreichen, und andererseits wieder dieselbe Höhe herunter zu fallen, zeigen sich verschieden. Denn man findet aus den Formeln des vorhergehenden (Beispiels 1.) zu $s = s'$ die Zeit

$$t'' = \frac{k}{2g} \cdot log \frac{k+a'}{k-a'} = \frac{k}{2g} \cdot log \frac{\sqrt{a^2+k^2}+a}{\sqrt{a^2+k^2}-a}$$
$$= \frac{k}{g} \cdot log \frac{k}{\sqrt{a^2+k^2}-a}.$$

Auch findet sich noch die ganze Zeit des Steigens und Fallens

$$t'+t'' = \frac{k}{g} \cdot \left[ \frac{1}{tg} \frac{a}{k} + log \frac{k}{\sqrt{a^2+k^2}-a} \right] *).$$

3tes Beispiel. Ein Atom bewegt sich mit einer gewissen Geschwindigkeit $a$, während ihm stetig entgegen eine Kraft wirkt, welche mit der

---

*) Beobachtete man bei Versuchen (mit Kugeln von bestimmtem Durchmesser statt der Atome) diese ganze Dauer $t'+t''$ des Steigens und Fallens, so könnte man aus dieser Gleichung den Koeffizienten $k$, also $m$ finden, d. h. den konstanten Koeffizienten des Widerstandes, jedoch nur unter der Voraussetzung, daß der Widerstand der Luft wirklich das Gesetz $m \cdot v^2$ befolgt. — Aber eben solche Versuche lehren, dadurch, daß keine Uebereinstimmung der Resultate gewonnen wird, entweder daß der Widerstand der Luft nach einem ganz andern Gesetz in Rechnung gebracht werden müßte, oder daß noch andere Hindernisse, und namentlich auch die Reibung (der Kugel mit der Luft), in Rechnung gebracht werden müssen, wenn die Versuche mit den Rechnungen übereinstimmen sollen.

$s = \int v \cdot dt$), so erhält man noch, wenn für $t = 0$ auch $s = 0$ gedacht ist *),

$$s = \frac{k^2}{g} \cdot log\left(a \cdot sin\frac{gt}{k} + k \cdot cos\frac{gt}{k}\right) - \frac{k^2}{g} \cdot log\, k,$$

oder

$$2) \qquad s = \frac{k^2}{g} \cdot log\left(\frac{a}{k} \cdot sin\frac{gt}{k} + cos\frac{gt}{k}\right).$$

Will man aus den Gleichungen (1. u. 2.) auch noch die Gleichung zwischen s und v erhalten, so muß t eliminirt werden. Es ist jedoch hier bequemer, die Differenzial-Gleichung zwischen s und v sich zu bilden und solche zu integriren. Man hat aber nach (B. zu Ende)

$$\partial s_v = \frac{v}{\varphi_v},$$

d. h.

$$\partial s_v = -\frac{k^2}{g} \cdot \frac{v}{k^2 + v^2},$$

woraus, weil für $s = 0$, $v = a$ werden muß,

$$3) \qquad s = \frac{k^2}{2g} \cdot log\frac{k^2 + a^2}{k^2 + v^2}$$

wird.

Entwikkelt man diese Werthe in (1. u. 2.) wieder nach Potenzen von $\frac{1}{k}$ und setzt man dann $\frac{1}{k} = 0$, so daß $m = 0$ wird, so erhält man

$$x = a - g \cdot t \quad \text{und} \quad s = a \cdot t - \tfrac{1}{2} g \cdot t^2,$$

wie solches in diesem Falle (wo der Widerstand der Luft $= 0$ gedacht ist) seyn muß. (Vergl. Beisp. 2. zu §. 33.)

Will man hier wieder die höchste Höhe s' berechnen, zu welcher der Atom gelangt, so muß man den Werth von s suchen, der zu $v = 0$ gehört; daher erhält man aus (3.)

$$s' = \frac{k^2}{2g} \cdot log\frac{k^2 + a^2}{k^2}.$$

Und ist t' die dazu nöthige Zeit, so giebt eine der obigen Gleichungen zwischen t und v, wenn man t' statt t, und 0 (Null) statt v setzt,

$$t' = \frac{k}{g} \cdot \frac{1}{tg}\frac{a}{k}.$$

---

*) Betrachtet man den Ausdruck in (1.) zur Rechten nur etwas genauer, so findet man bald, daß der Zähler ohne Rücksicht auf einen konstanten Faktor der Differenzial-Koeffizient des Nenners ist. Man führt daher einen neuen Veränderlichen u dadurch ein, daß man den ganzen Nenner $= u$ setzt; dann wird $v = \frac{k^2}{g} \cdot \frac{\partial u_t}{u}$, woraus sich s sogleich ergiebt.

So wie der Atom diese höchste Höhe $s'$ erreicht hat, ist er in Ruhe, und fängt sogleich eine neue Bewegung, und zwar die des nächst vorhergehenden Beispiels an. Findet man aus der Gleichung (3. dieses nächst vorhergehenden Beispiels 1.) zu der so eben gefundenen Höhe $s = s'$ die Geschwindigkeit $v = a'$, so hat man die Gleichung

$$\frac{k^2}{2g} \cdot log \frac{k^2+a^2}{k^2} = \frac{k^2}{2g} \cdot log \frac{k^2}{k^2-a'^2},$$

woraus

$$a'^2 = \frac{a^2 \cdot k^2}{a^2+k^2}$$

hervorgeht. — Bei diesem Widerstand der Luft ist also die Geschwindigkeit $a'$, mit welcher der Atom von seiner höchsten Höhe unten wieder anlangt, kleiner als die Geschwindigkeit $a$, mit welcher er in die Höhe geworfen wurde, während ohne diesen Widerstand der Luft (im Beispiel 2. zu §. 33.) $a' = a$ gefunden worden, und auch hier für $\frac{1}{k} = 0$, also $m = 0$, $a' = a$ gefunden wird.

Auch die Zeiten $t'$ und $t''$, die der Atom braucht, um einerseits seine höchste Höhe zu erreichen, und andererseits wieder dieselbe Höhe herunter zu fallen, zeigen sich verschieden. Denn man findet aus den Formeln des vorhergehenden (Beispiels 1.) zu $s = s'$ die Zeit

$$t'' = \frac{k}{2g} \cdot log \frac{k+a'}{k-a'} = \frac{k}{2g} \cdot log \frac{\sqrt{a^2+k^2}+a}{\sqrt{a^2+k^2}-a}$$
$$= \frac{k}{g} \cdot log \frac{k}{\sqrt{a^2+k^2}-a}.$$

Auch findet sich noch die ganze Zeit des Steigens und Fallens

$$t'+t'' = \frac{k}{g} \cdot \left[ \frac{1}{tg} \frac{a}{k} + log \frac{k}{\sqrt{a^2+k^2}-a} \right] *).$$

3tes Beispiel. Ein Atom bewegt sich mit einer gewissen Geschwindigkeit $a$, während ihm stetig entgegen eine Kraft wirkt, welche mit der

---

*) Beobachtete man bei Versuchen (mit Kugeln von bestimmtem Durchmesser statt der Atome) diese ganze Dauer $t'+t''$ des Steigens und Fallens, so könnte man aus dieser Gleichung den Koeffizienten $k$, also $m$ finden, d. h. den konstanten Koeffizienten des Widerstandes, jedoch nur unter der Voraussetzung, daß der Widerstand der Luft wirklich das Gesetz $m \cdot v^2$ befolgt. — Aber eben solche Versuche lehren, dadurch, daß keine Uebereinstimmung der Resultate gewonnen wird, entweder daß der Widerstand der Luft nach einem ganz andern Gesetz in Rechnung gebracht werden müßte, oder daß noch andere Hindernisse, und namentlich auch die Reibung (der Kugel mit der Luft), in Rechnung gebracht werden müssen, wenn die Versuche mit den Rechnungen übereinstimmen sollen.

1stes Beispiel. Ein Atom O (Fig. 31.) wird von einem Punkt A angezogen, im Verhältniß seiner Entfernung von A. — Man soll die Gesetze dieser Bewegung näher angeben, unter der Voraussetzung, daß die Zeit t dann anfängt, wenn O in C ist, während AC = c gegeben.

Dasmal ist, wenn zu Ende der Zeit t, CO = s gesetzt wird,

1) $$\varphi = m\cdot(c-s),$$

und man hat daher die lineare Gleichung

2) $$\partial^2 s_t + m\cdot s - m\cdot c = 0$$

der zweiten Ordnung zu integriren.

Das vollständige Integral dieser Gleichung ist aber nach (§. 50. Analysis) *)

3) $$s = c + C\cdot\cos(t\cdot\sqrt{m}) + C'\cdot\sin(t\cdot\sqrt{m}),$$

wo C und C′ zwei willkührliche Konstanten sind. — Daraus folgt aber

4) $$v = \partial s_t = -C\cdot\sqrt{m}\cdot\sin(t\cdot\sqrt{m}) + C'\cdot\sqrt{m}\cdot\cos(t\cdot\sqrt{m}).$$

Um die Konstanten C und C′ zu bestimmen, sey die Anfangs-Geschwindigkeit = a, so wie für t = 0 auch s = 0 vorausgesetzt worden ist. — Setzt man also in den beiden letztern Gleichungen t = 0, v = a und s = 0, so erhält man

$$0 = c + C \quad \text{und} \quad a = C'\cdot\sqrt{m},$$

also

$$C = -c \quad \text{und} \quad C' = \frac{a}{\sqrt{m}}.$$

Diese Werthe in (3.) und in (4.) substituirt, geben

5) $$s = c\cdot[1-\cos(t\cdot\sqrt{m})] + \frac{a}{\sqrt{m}}\cdot\sin(t\cdot\sqrt{m})$$

und

6) $$v = c\cdot\sqrt{m}\cdot\sin(t\cdot\sqrt{m}) + a\cdot\cos(t\cdot\sqrt{m}).$$

Wird endlich aus diesen beiden letztern Gleichungen t noch eliminirt, so erhält man noch

7) $$v^2 - a^2 = m\cdot(2cs - s^2)$$

als die Gleichung zwischen v und s.

Nennt man t′ die Zeit, welche der Atom braucht, um von C bis A zu gelangen, also die zu s = c gehörige Zeit, so findet sich, wenn in (5.) c statt s und t′ statt t gesetzt wird,

---

*) Diese Integration der linearen Gleichung (2.) erleichtert man sich, wenn man einen neuen Veränderlichen z dadurch einführt, daß man c − s = z setzt, wodurch

$$\partial s_t = v = -\partial z_t$$

und

$$\partial^2 s_t = -\partial^2 z_t$$

wird, so daß die lineäre Gleichung (2.) sogleich in die reduzirte

$$\partial^2 z_t + m\cdot z = 0$$

übergeht.

$$0 = -c \cdot \cos(t' \cdot \sqrt{m}) + \frac{a}{\sqrt{m}} \cdot \sin(t' \cdot \sqrt{m}),$$

woraus

$$tg(t' \cdot \sqrt{m}) = \frac{c \cdot \sqrt{m}}{a},$$

also

$$t' = \frac{1}{\sqrt{m}} \cdot \frac{1}{tg} \frac{c \cdot \sqrt{m}}{a}$$

folgt.

Ist die Anfangs-Geschwindigkeit $a = 0$, so wird, da dann der Bogen, dessen Tangente $= \frac{c \cdot \sqrt{m}}{a}$, d. h. $= \frac{1}{0}$ ist, $\frac{1}{2}\pi$ wird,

$$t' = \frac{1}{2\sqrt{m}} \cdot \pi;$$

und die Zeit, um von C bis A zu kommen, bleibt daher dann immer dieselbe, die Entfernung $CA = c$ mag beliebig groß oder klein seyn, größer oder kleiner werden.

Hätte man übrigens genau nach dem obigen Text integrirt, ohne die [jetzt lineäre und deshalb (nach §. 50. Anal.) integrirbare] Gleichung (III.) zu Hilfe zu nehmen, so hätte man sogleich gehabt

8) $$v \cdot \delta v_s = m \cdot (c - s),$$

also, wenn man integrirt, so daß für $t = 0$ auch $s = 0$ und $v = a$ wird,

9) $$v^2 = m \cdot (2cs - s^2) + a^2,$$

welches die obige Gleichung (7.) ist. — Dann hat man

10) $$t = \int_{s \div 0} \frac{1}{\sqrt{a^2 + m(2cs - s^2)}} \cdot ds,$$

also

11) $$t = \frac{1}{\sqrt{m}} \cdot \left( \frac{1}{\sin} \frac{c \cdot \sqrt{m}}{\sqrt{a^2 + mc^2}} - \frac{1}{\sin} \frac{(c-s) \cdot \sqrt{m}}{\sqrt{a^2 + mc^2}} \right),$$

oder auch

12) $$t = \frac{1}{\sqrt{m}} \cdot \left( \frac{1}{tg} \frac{c \cdot \sqrt{m}}{a} - \frac{1}{tg} \frac{(c-s) \cdot \sqrt{m}}{\sqrt{a^2 + m(2cs - s^2)}} \right),$$

welches die Gleichung (5.) ist, wenn man solche nach t auflöst. — Findet man aus (9.)

$$s = c - \frac{1}{\sqrt{m}} \cdot \sqrt{a^2 + mc^2 - v^2},$$

und setzt man diesen Werth von s in die Gleichung (12.) statt s, so erhält man noch

13) $$t = \frac{1}{\sqrt{m}} \cdot \left( \frac{1}{tg} \frac{c \cdot \sqrt{m}}{a} - \frac{1}{tg} \frac{\sqrt{a^2 + mc^2 - v^2}}{v} \right),$$

welches wiederum die Gleichung (6.) ist, wenn man letztere nach t auflöst.

2^tes Beispiel. Es sey (Fig. 32.) $MA = r$ der Halbmesser der als Kugel betrachteten Erde, und der Atom anfänglich in E, während $AE = h$

gegeben ist; und es wirke nun auf den Atom stetig die Schwere in der Richtung EM, jedoch unter der Voraussetzung, daß sie im umgekehrten Verhältniß des Quadrats der Entfernung des Atoms von dem Mittelpunkt der Erde M steht. Man soll die Gesetze dieser Bewegung näher bestimmen.

Ist der Atom in der Zeit t von E bis O gekommen, ist also $EO = s$, so ist $MO = r+h-s$. Wird nun die Schwere an der Erd-Oberfläche (in A), also in der Entfernung r von M, durch g bezeichnet, so hat man nach der gemachten Voraussetzung

$$\varphi : g = \frac{1}{(r+h-s)^2} : \frac{1}{r^2};$$

d. h.

$$\varphi = g \cdot r^2 \cdot \frac{1}{(r+h-s)^2}.$$

Also hat man dasmal die Gleichung der Bewegung

$$\partial^2 s_t = v \cdot \partial v_s = \frac{g \cdot r^2}{(r+h-s)^2}.$$

Nimmt man hier links und rechts das Integral, so erhält man

$$1) \quad v = \partial s_t = r \cdot \sqrt{\left(\frac{2g}{r+h}\right)} \cdot \sqrt{\left(\frac{s}{r+h-s}\right)},$$

und demnach

$$t = \frac{1}{r} \cdot \sqrt{\left(\frac{r+h}{2g}\right)} \cdot \int_{s=0} \frac{r+h-s}{\sqrt{(r+h-s) \cdot s}} \cdot ds;$$

oder, wenn diese Integration nach (§. 32. III. Analys.) bewerkstelligt wird,

$$2) \quad t = \frac{1}{r} \cdot \sqrt{\left(\frac{r+h}{2g}\right)} \cdot \left[\sqrt{(r+h-s)s} + \tfrac{1}{2}(r+h) \cdot \frac{1}{cos} \frac{r+h-2s}{r+h}\right].$$

Diese Gleichungen (1. u. 2.) sind nun die gesuchten Ur-Gleichungen zwischen t, v und s.

Anmerk. In dem besondern Falle, wo r gegen h, und folglich auch gegen s so groß ist, daß $\frac{h}{r}$ und $\frac{s}{r} = 0$ gesetzt werden kann, giebt die Gleichung (1.), weil nun

$$\frac{r^2}{(r+h)(r+h-s)} = \frac{1}{\left(1+\frac{h}{r}\right)\left(1+\frac{h-s}{r}\right)} = 1$$

wird, sogleich

$$v = \sqrt{2g \cdot s},$$

wie in dem Falle, wo die Schwere konstant und $= g$ gedacht ist. Außerdem giebt in demselben Falle die Gleichung (2.), weil

$$\frac{1}{cos} \frac{r+h-2s}{r+h} = \frac{1}{sin} \frac{2 \cdot \sqrt{(r+h-s) \cdot s}}{r+h}$$

ist, und weil bei so sehr kleinen Bogen der Sinus statt des Bogens selbst genommen werden kann,

$$t = \frac{2}{r}\cdot\sqrt{\left(\frac{r+h}{2g}\right)}\cdot\sqrt{(r+h-s)\cdot s} = \sqrt{\left(\frac{2s}{g}\right)},$$

d. h.

$$s = \tfrac{1}{2}g\cdot t^2,$$

wiederum genau so, wie wenn die Schwere konstant und $= g$ wäre. —

Nahe an der Erd-Oberfläche kann daher, auch wenn man das in dieser Aufgabe angenommene Gesetz der Schwere zuläßt, doch die Schwere als konstant und $= g$, d. h. so genommen werden, wie sie dicht an der Erd-Oberfläche ist *).

3tes Beispiel. Ein Atom wird von zweien Punkten A und B (Fig. 33.) angezogen, im direkten Verhältniß der Zahlen $a'$ und $b'$ und im umgekehrten Verhältniß der Quadrate der Entfernungen. Man soll die Gesetze seiner Bewegung näher ausmitteln.

Es sey $AB = c$, $AD = \alpha$; zu Anfang und nach Ende der Zeit $t$ befinde sich der Atom bezüglich in D und in O, so daß $DO = s$ ist, so ist $AO = \alpha + s$, $BO = c - \alpha - s$. Die anziehenden Kräfte sind $\frac{ma'}{(\alpha+s)^2}$ und $\frac{mb'}{(c-\alpha-s)^2}$, oder $\frac{a^2}{(\alpha+s)^2}$ und $\frac{b^2}{(c-\alpha-s)^2}$, wenn man $a = \sqrt{ma'}$ und $b = \sqrt{mb'}$ setzt; und es ist daher die Kraft $\varphi$ in der Richtung OB jetzt

$$\varphi = \frac{b^2}{(c-\alpha-s)^2} - \frac{a^2}{(\alpha+s)^2}.$$

Nimmt man nun die Gleichung

III. $$\partial^2 s_t = \varphi \quad \text{oder} \quad v\cdot\partial v_s = \varphi$$

und integrirt man nach s, so ergiebt sich

$$v^2 = \frac{2b^2}{c-\alpha-s} + \frac{2a^2}{\alpha+s} + C.$$

Zur Bestimmung der Konstante C nehme man die Anfangs-Geschwindig-

*) In solchen Fällen, wo man sehen will, was eine Funktion von r wird, wenn r sehr groß gedacht wird, thut man übrigens allemal am besten, $\frac{1}{r} = z$ zu setzen, also $\frac{1}{z}$ statt r, die entstehende Funktion nach Potenzen von z zu entwikkeln, und dann zuletzt z sehr klein oder $= 0$ zu setzen. — Dies ist der oben befolgten Methode auch hier vorzuziehen.

keit $= k$, so muß diese Gleichung für $t = 0$, wo $s = 0$ ist, $v = k$ geben; und man hat daher

$$k^2 = \frac{2b^2}{c-\alpha} + \frac{2a^2}{\alpha} + C;$$

findet man hieraus C, und substituirt man dessen Werth statt C, d. h. eliminirt man C, so giebt dies

$$1) \qquad v^2 = k^2 + \frac{2b^2}{c-\alpha}\cdot\frac{s}{c-\alpha-s} - \frac{2a^2}{\alpha}\cdot\frac{s}{\alpha+s},$$

woraus man die Geschwindigkeit v an jeder Stelle der Bahn (d. h. für jedes gegebene s) sogleich finden kann.

Setzt man diesen Werth von v in die Gleichung

$$\partial s_t = v \quad \text{oder} \quad \partial t_s = \frac{1}{v}$$

und integrirt man, so erhält man t in s ausgedrückt. Das Integral selber aber findet sich im Allgemeinen nicht in endlicher Form, sondern gehört zu der Gattung von Integralen, von welcher wir (Analys. §. 32. III. D.) unter dem Namen der elliptischen Transcendenten gesprochen haben.

Fügen wir dieser Aufgabe noch einige spezielle Betrachtungen hinzu.

Suchen wir zunächst aus der Gleichung

$$\frac{a^2}{(c-\alpha-s)^2} = \frac{b^2}{(\alpha+s)^2}$$

den Werth von $s = DC$, wo die beiden anziehenden Kräfte einander gleich werden, so finden wir zwei solche Punkte C, einen zwischen A und B, und einen zweiten außerhalb AB. Betrachten wir den erstern, der zwischen A und B liegt. Wird der Atom in C ohne Anfangs-Geschwindigkeit hingesetzt, so bleibt er in Ruhe. Wird er links von C gesetzt, etwa in D, so ist die Anziehung nach A größer, als die nach B, und er geht nach A hin, wenn er nicht in der Richtung DB die Anfangs-Geschwindigkeit k erhält, welche, wenn sie auch sehr klein seyn sollte, doch endlich und daher groß genug ist, um die (unendlich-kleine) Anziehung nach A zu überwinden *). Ist aber diese Anfangs-Geschwindigkeit k klein genug, so wird sich die stetig gegenstrebende Differenz der Anziehungen bald so anhäufen, daß diese Anfangs-Geschwindigkeit vernichtet ist, ehe der Atom den Punkt C erreicht; dann wird er einen Moment in Ruhe seyn, hernach aber sogleich nach A hin zurückkehren. — Ist die Anfangs-Geschwindigkeit k in der Richtung DB etwas größer und gerade so groß, daß der Atom gerade nach C kommt, bis diese Anfangs-Geschwindigkeit vernichtet ist, so ist er in C in Ruhe und bleibt auch daselbst in Ruhe. — Ist endlich die Anfangs-Geschwindigkeit so groß, daß der Atom, wenn auch mit einer verzögerten Be-

*) Man vergesse nie, daß nach (§. 31.) nicht $\varphi$, sondern $\varphi \cdot dt$ die Kraft ist, welche augenblicklich wirkt, und welche also die Geschwindigkeit $\varphi \cdot dt$ hervorbringt, in diesem Augenblick, wo der Atom sich hinsichtlich der Richtung seiner Bewegung entscheidet.

Bewegung endlich in C anlangt, und noch immer eine (wenn vielleicht auch nur kleine) Geschwindigkeit hat, so geht er mit dieser über C hinaus nach B hin, und wird nun von der (jetzt positiven) Differenz der Anziehungen noch überdies nach B hin stetig gezogen, so daß seine Geschwindigkeit nun wieder zu wachsen beginnt, und die Bewegung, je näher der Atom an B hin kommt, desto beschleunigter wird *).

4^tes Beispiel. Wäre $b = 0$ oder $c = \infty$, so würde der Atom nur noch von A allein angezogen, und man hätte nun das Problem des (Beispiels 2. zu §. 33.), wo ein Atom in die Höhe geworfen, von der Schwere aber wieder stetig herunter gedrückt wird, nur mit dem Unterschiede, daß die Schwere jetzt nicht konstant, sondern im umgekehrten Verhältniß des Quadrats der Entfernung vom (Mittel-) Punkte A (der Erde) angenommen wäre.

In diesem Falle hätte man entweder durch direkte Behandlung oder aus (1. zum Beispiel 3.) für $b = 0$

$$1) \qquad v = k^2 - \frac{2a^2}{\alpha} \cdot \frac{s}{\alpha + s}.$$

Wollte man den Abstand $s'$ (von D an gerechnet) oder $\alpha + s'$ (von A an gerechnet) finden, für welchen $v = 0$ wäre, wo also diese Bewegung aufhörte, so würde die Gleichung (1.) liefern

$$s' = \frac{k^2\alpha^2}{2a^2 - k^2\alpha} \quad \text{und} \quad \alpha + s' = \frac{2a^2\alpha}{2a^2 - k^2\alpha}.$$

Dieser Eintritt der Ruhe findet aber nie statt, wenn $2a^2 - k^2\alpha$ Null oder negativ werden sollte, also wenn die Anfangs-Geschwindigkeit $k \geqq \sqrt{\frac{2a^2}{\alpha}}$ genommen seyn sollte **). Die Gleichung $\delta t = \frac{1}{v}$ giebt aber nun

*) Dieses Problem zeigt die Bewegung eines Körpers, der gerade zwischen Erde B und Mond A sich befindet, etwa dadurch, daß er vom Monde A ausgeworfen wird, in der Richtung AB, mit einer solchen Geschwindigkeit, so daß er in D die Geschwindigkeit k hat. Ist die Geschwindigkeit nicht groß genug, so wird er gegen den Mond zurückfallen. Ist sie etwas größer, so kann der Körper zwischen der Erde und dem Monde im Gleichgewicht (in Ruhe) bleiben. Und ist seine Geschwindigkeit groß genug, so wird er vom Monde auf die Erde fallen; alles unter der Voraussetzung, daß das Gesetz der anziehenden Kräfte des Mondes und der Erde so ist, wie wir es hier angenommen, und daß Mond und Erde nicht selbst eine Bewegung haben.

**) Bei dem hier angenommenen Gesetz der Schwere ist also eine Geschwindigkeit k denkbar $\geqq \sqrt{\frac{2a^2}{\alpha}}$, groß genug, daß der in die Höhe geworfene Körper nicht wieder zurückkommt. — Doch muß man hierbei nicht aus dem

$$t = \int_{s=0} \frac{\alpha+s}{\sqrt{(\alpha+s)\left[k^2\alpha - \left(\frac{2a^2}{\alpha} - k^2\right)\cdot s\right]}} \cdot ds,$$

welches Integral nach (§. 32. III. Analys.) gefunden werden kann. Setzt man namentlich

$$\frac{k^2\cdot\alpha^2}{k^2\alpha - 2a^2} = h^2, \quad \text{also} \quad k^2\alpha - 2a^2 = \frac{k^2\cdot\alpha^2}{h^2},$$

so findet sich

$$2) \quad t = \frac{h}{k\cdot\sqrt{\alpha}}\cdot\left[\sqrt{(h^2+s)(\alpha+s)} - h\cdot\sqrt{\alpha} + (h^2-\alpha)\cdot log\frac{h+\sqrt{\alpha}}{\sqrt{h^2+s}+\sqrt{\alpha+s}}\right],$$

welche Form der Rechnung jedoch unbequem ist, wenn h imaginär seyn sollte. Dieses letztere ist aber allemal der Fall, so oft die Anfangs-Geschwindigkeit k nicht groß genug ist, so daß der Atom wieder nach A zurückgeht. Ist also das obige h imaginär, so setze man lieber

$$\frac{k^2\cdot\alpha^2}{2a^2 - k^2\alpha} = h'^2, \quad \text{so daß} \quad 2a^2 - k^2\alpha = \frac{k^2\cdot\alpha^2}{h'^2}$$

wird; und man findet dann für diesen jetzigen reellen Werth von h'

$$2') \quad t = \frac{h'}{k\cdot\sqrt{\alpha}}\cdot\left[-\sqrt{(h'^2-s)(\alpha+s)} + h'\cdot\sqrt{\alpha} + (h'^2+\alpha)\left(\frac{1}{tg}\sqrt{\frac{\alpha+s}{h'^2-s}}\right) - \frac{1}{tg}\frac{\sqrt{\alpha}}{h'}\right].$$

Und ist endlich $2a^2 - k^2\alpha$ weder positiv noch negativ, sondern $= 0$, so findet sich in diesem speziellen Falle

$$2'') \quad t = \frac{1}{k\cdot\sqrt{\alpha}}\cdot\int_{s=0} \sqrt{\alpha+s}\cdot ds = \frac{2}{3k\cdot\sqrt{\alpha}}\cdot\left[(\alpha+s)^{\frac{3}{2}} - \alpha^{\frac{3}{2}}\right]$$

D. Enthält endlich $\varphi$ nicht t, s oder v allein, sondern zwei oder gar alle drei dieser Veränderlichen, so bleibt im Allgemeinen noch zu betreten der Weg des (§. 53. Anal.), nämlich v und $\partial v$, und alle Differenzial-Koeffizienten von v nach t zu eliminiren, um eine Differenzial-Gleichung bloß zwischen s und t zu erhalten. Oder man muß s und $\partial s$, und alle Differenzial-Koeffizienten von s nach t eliminiren, um eine Differenzial-Gleichung bloß zwischen v und t zu erhalten. Oder endlich kann man alles t eliminiren, und eine Gleichung zwischen s und v und den Differenzial-Koeffizienten von s nach v, oder von v nach s, sich verschaffen.

---

Augen lassen, daß hier keine anderen Hindernisse und namentlich nicht der Widerstand der Luft berücksichtigt worden sind.

In der Regel wird man in diesem allgemeinern Falle D keine Integrale in endlicher Form erhalten *). — Folgendes Beispiel macht jedoch eine ziemlich umfassende Ausnahme.

Beispiel. Ein Atom bewege sich von C nach A (Fig. 31.), von zwei stetigen Kräften nach einer und derselben Richtung CA getrieben, wovon die eine mit dem Abstand von A proportional, die andere aber eine beliebige Funktion der Zeit t ist. Die Bewegung dieses Atoms näher anzugeben.

Es sey $CA = a$, und $CO = s$ der in der Zeit t beschriebene Wrg, so ist $AO = a - s$. Nach der Voraussetzung ist also nun

$$\varphi = m \cdot (a - s) + \psi_t.$$

Die Gleichungen (I. u. II. des §. 33.), nämlich

I. $\partial s_t = v$ und II. $\partial v_t = \varphi$

geben nun wieder, wenn v eliminirt wird,

III. $\partial^2 s_t = \varphi$;

oder die lineare Gleichung der zweiten Ordnung

$$\partial^2 s_t + ms - (ma + \psi_t) = 0,$$

welche nach (§. 50. Analys.) integrirt wird, und s mit 2 willkührlichen Konstanten liefert, woraus dann auch durch Differentiation $\partial s_t$ oder v gefunden wird.

Es sey z. B. $\psi_t = b \cdot t$, so daß die zweite Kraft mit der Zeit t proportional ist, so wird die zu integrirende Gleichung

1) $$\partial^2 s_t + ms - (bt + am) = 0$$

und ihr Integral wird nach (§. 50. Analys.) so

2) $$s = \left(\frac{b}{m} \cdot t + a\right) + C \cdot \sin(t \cdot \sqrt{m}) + C' \cdot \cos(t \cdot \sqrt{m})$$

gefunden, wo C und C' zwei noch zu bestimmende Konstanten sind. Um diese zu bestimmen, differenzire man dieses Resultat, so daß man

3) $$\partial s_t = v = \frac{b}{m} + C \cdot \sqrt{m} \cdot \cos t\sqrt{m} - C' \cdot \sqrt{m} \cdot \sin t\sqrt{m}$$

erhält; und soll dann für $t = 0$ auch $s = 0$ aber $v = c$ werden, so geben diese beiden letztern Gleichungen

$$0 = a + C' \quad \text{und} \quad c = \frac{b}{m} + C \cdot \sqrt{m},$$

woraus $C' = -a$ und $C = \frac{mc - b}{\sqrt{m}}$

hervorgeht; also daß man nun hat

4) $$s = \left(\frac{b}{m} \cdot t + a\right) + \frac{mc - b}{\sqrt{m}} \cdot \sin(t \cdot \sqrt{m}) - a \cdot \cos(t \cdot \sqrt{m}),$$

5) $$v = \frac{b}{m} + (mc - b) \cdot \cos(t \cdot \sqrt{m}) + a\sqrt{m} \cdot \sin(t \cdot \sqrt{m}).$$

*) Poisson, Traité de Mécanique 2me édit. T. I. p. 238.

Bei dieser Bewegung kehrt, wie man sieht, nach jeder Zeit-Periode, deren Dauer $\frac{2\pi}{\sqrt{m}}$ ist, immer dieselbe Geschwindigkeit wieder, während die Bahn s als aus zwei Theilen zusammengesetzt gedacht werden kann, von denen der eine $\frac{b}{m}\cdot t + a$ einer konstanten Bewegung angehört, der andere aber in derselben Zeit-Periode wiederkehrend denselben Werth wieder annimmt. — Setzt man aber $b = 0$, so erhält man wiederum die Resultate des (Beisp. 1. zu C.), weil dann in der That unsere jetzige Aufgabe in jene übergeht.

## Anhang.

### Dieselbe Theorie der freien geradlinigen Bewegung, ohne Zuziehung des Unendlich-Kleinen.

(Dieser Anhang ist von jedem Leser zu überschlagen, welcher sich durch den Vortrag des vorstehenden Kapitels befriedigt fühlt.)

Will man nicht das Unendlich-Kleine, wenigstens nicht in der Rechnung, zu Hilfe nehmen, so kann man das im (Kap. I.) und in dem laufenden Kapitel Gesagte, wie folgt, zusammenfassen.

I. Man geht wieder von der Bewegung in ihrer Erscheinung aus, und bemerkt, daß zwischen der Zeit t und dem Raume s eine Gleichung statt finden müsse.

II. Man betrachtet dann die einfachste aller Gleichungen, nämlich

$$s = a \cdot t + b, \quad \text{oder} \quad s = a \cdot t,$$

wenn für $t = 0$ auch $s = 0$ angenommen wird, nennt diese Bewegung eine konstante, zeigt daß sich bei ihr die Räume wie die dazu verbrauchten Zeiten verhalten, — daß bei ihr in derselben Zeit auch immer derselbe Raum beschrieben werde, — und nennt den Koeffizienten a in der Gleichung $s = a \cdot t$ die Geschwindigkeit dieser konstanten Bewegung, so daß sogleich folgert, daß für $t = 1$, $a = s$ wird, d. h. daß die Ge-

schwindigkeit der Raum ist, den die konstante Bewegung in jeder Sekunde durchläuft.

III. Nimmt man nun eine ganz beliebige und nicht konstante, also veränderlich genannte Bewegung

1) $$s' = \psi_t,$$

so ist der Raum $s'$, welchen diese Bewegung in der beliebig gedachten, aber unmittelbar nach Aufhören der Zeit t anfangenden Zeit h macht, offenbar gegeben durch die Gleichung

$$s' = \psi_{t+h} - \psi_t,$$

d. h. nach dem Taylor'schen Lehrsatze durch

2) $$s' = \partial\psi_t \cdot h + \partial^2\psi_t \cdot \frac{h^2}{2!} + \cdots.$$

Sucht man nun die konstante Bewegung

3) $$s'' = v \cdot h,$$

welche dieser Bewegung am Anfange, wo h noch ganz klein ist, unter allen konstanten Bewegungen am nächsten kommt, so muß man offenbar die Geschwindigkeit v dieser konstanten Bewegung so nehmen, daß

4) $$v = \partial\psi_t = \partial s_t$$ *)

ist.

Man setzt nun fest, daß man die Geschwindigkeit dieser konstanten Bewegung $s'' = v \cdot h$, welche zu Ende der Zeit t unter allen konstanten Bewegungen der veränderlichen Bewegung am nächsten kommt, die zu Ende dieser Zeit t, der veränderlichen Bewegung zugehörige Geschwindigkeit nennen wolle. — Dann ist aber die Geschwindigkeit v einer veränderlichen Bewegung zu Ende einer jeden Zeit t, gegeben durch die Gleichung

I. $$\partial s_t = v,$$

*) Die Differenz der Räume $s' - s''$ wird dann $= \partial^2\psi_t \cdot \frac{h^2}{2!} + \cdots$, und daher, für h sehr klein, jedenfalls kleiner, als wenn ihr erstes Glied nicht schon $h^2$, sondern noch $h^1$ enthielte, was der Fall wäre, wenn man $v \gtrless \partial\psi_t$ nehmen würde.

und man hat die erste der beiden Haupt-Gleichungen der geradlinigen veränderlichen Bewegung.

IV. Nun geht man zur nächst einfachen Gleichung zwischen s und t, nämlich zur Gleichung

1) $s = a \cdot t^2 + b \cdot t + c$, oder $s = a \cdot t^2 + b \cdot t$,

wenn s mit t zugleich anfangen soll. — Für diese Bewegung ist die Geschwindigkeit v (nach der so eben gefundenen Gleichung I.), gegeben durch die Gleichung

2) $v = 2a \cdot t + b$;

und weil diese Geschwindigkeit v mit t proportional wächst oder abnimmt, je nachdem a positiv oder negativ ist, so nennt man diese Bewegung die gleichförmig beschleunigte oder gleichförmig verzögerte.

Bei dieser gleichförmig beschleunigten Bewegung ist der Zuwachs an Geschwindigkeit, wie man sieht, in jeder Sekunde $= 2a$, und in jedem gleichen Zeittheile gleich viel. Diese stetige Veränderung in der Geschwindigkeit ist einer stetig wirkenden Ursache (Kraft) zuzuschreiben, und diese konstante Aenderung der Geschwindigkeit weist auf eine (stetig wirkende und) konstante Kraft hin. Drücken wir die Kraft durch dieselbe Zahl aus, durch welche wir die durch dieselbe hervorgebrachte Geschwindigkeit ausdrücken; und bezeichnen wir durch $\varphi$ die Summe aller in einer Sekunde durch stetige Wirkung der Kraft hervorgebrachten Zuwachse an Geschwindigkeit, so nennt man gewöhnlich $\varphi$ diese konstante Kraft, und man hat dabei

3) $\varphi = 2a$, also 4) $a = \frac{1}{2}\varphi$,

so daß die obige Gleichung (1.) der Bewegung auch so geschrieben werden kann:

5) $s = \frac{1}{2}\varphi \cdot t^2 + b \cdot t$,

wo man $\varphi$ die stetig wirkende konstante Kraft nennt, welche diese gleichförmig beschleunigte Bewegung hervorbringt, wo aber diese Kraft ausgedrückt ist durch die Vermehrung an Geschwindigkeit, welche sie dadurch hervorbringt, daß sie eine volle Sekunde hindurch stetig auf den Atom (in derselben Richtung) wirkt.

In der Zeit h ist bei dieser stetig wirkenden und dabei konstanten Kraft $\varphi$ der durch sie hervorgebrachte Zuwachs d an Geschwindigkeit ausgedrückt durch die Gleichung

6) $$d = \varphi \cdot h.$$

V. Zuletzt geht man zu der beliebig veränderlichen Bewegung über, welche ausgedrückt ist durch die Gleichung

1) $$s = \psi_t$$

findet daraus, mittelst der Gleichung $\partial s_t = v$, die Geschwindigkeit v, welche demnach auch eine Funktion von t ist, und man hat nach dem Taylor'schen Lehrsatze

2) $$v_{t+h} = v_t + \partial v_t \cdot h + \partial^2 v_t \cdot \frac{h^2}{2!} + \cdots.$$

Also ist der in der Zeit h erworbene Zuwachs an Geschwindigkeit $v_{t+h} - v_t$ ausgedrückt durch die Gleichung

3) $$v_{t+h} - v_t = \partial v_t \cdot h + \partial^2 v_t \cdot \frac{h^2}{2!} + \cdots = D.$$

Dieser in der unmittelbar nach der Zeit t folgenden Zeit h erworbene Zuwachs an Geschwindigkeit ist der Kraft $\varphi_t$ zuzuschreiben, welche in dieser Zeit h gewirkt, deren Werth aber selbst unterdessen sich geändert hat; denn die einzelnen Wirkungen durchlaufen der Größe nach alle Werthe, welche aus $\varphi_t$ hervorgehen, wenn statt t alle stetig neben einander liegenden Werthe von t an bis zu t+h hin gesetzt werden. Nehmen wir nun wieder wie in (IV.) an, daß $\varphi_t$ für irgend einen dieser Werthe von t nicht die wirkende Kraft ausdrücken soll, sondern was diese Kraft, wenn sie eine volle Sekunde hindurch stetig und mit derselben Intensität, also ohne sich zu verändern, wirken würde, an Vermehrung der Geschwindigkeit leisten müßte; und nehmen wir ferner noch an, daß $\varphi_t$ von t an bis zu t+h hin immer größer wird, so folgt, daß man einen Zuwachs an Geschwindigkeit d erlangen würde, der kleiner als D ist, wenn die Kraft $\varphi_t$ genau so wie sie ist, und ohne mit der Zeit zu wachsen, die Zeit h hindurch stetig (und konstant) wirkte, so daß man nach (IV. 6.)

4) $$d = \varphi_t \cdot h$$

hat; daß aber ein Zuwachs $\Delta$ an Geschwindigkeit erlangt würde, der größer wie D ist, wenn man die Kraft mit ihrer größesten Stärke $\varphi_{t+h}$ gleich vom Anfange der Zeit h an, die ganze Zeit h hindurch konstant (dieselbe bleibend) und stetig wirken ließe, so daß nach (IV. 6.)

5) $$\Delta = \varphi_{t+h} \cdot h,$$

oder mittelst des Taylor'schen Lehrsatzes

6) $$\Delta = \varphi_t \cdot h + \partial\varphi_t \cdot h^2 + \cdots$$

gefunden werden müßte.

Man hat nun 2 Grenzwerthe d und $\Delta$ in (4. u. 6.) gefunden, zwischen denen der Werth D in (3.) nothwendig allemal liegen muß, es mag h größer oder kleiner, oder noch so klein gedacht werden. Weil aber die beiden Grenz-Reihen für d und $\Delta$ (in 4. und 6.) mit demselben ersten Gliede $\varphi_t \cdot h$ anfangen, so würde D nicht immer zwischen diesen beiden Grenz-Werthen liegen können, wenn die Reihe für D in (4.) nicht mit demselben ersten Gliede anfinge *). Also ist nothwendig

---

*) Ist der Werth

$$R = a_1 \cdot h + a_2 \cdot h^2 + a_3 \cdot h^3 + \cdots$$

allemal für jedes kleine h zwischen den beiden Werthen

$$S = b_1 \cdot h + b_2 \cdot h^2 + b_3 \cdot h^3 + \cdots$$

und

$$S' = b_1 \cdot h + c_2 \cdot h^2 + c_3 \cdot h^3 + \cdots,$$

die beide mit demselben ersten Gliede $b_1 \cdot h$ anfangen, so ist allemal nothwendig

$$a_1 = b_1.$$

Denn es ist nach der Voraussetzung

$$S - S' > S - R \quad \text{und} \quad S - S' > R - S',$$

also

$$(b_2 - c_2) \cdot h + (b_3 - c_3) \cdot h^2 + \cdots > (b_1 - a_1) + (b_2 - a_2) \cdot h + (b_3 - a_3) \cdot h^2 + \cdots$$

und

$$(b_2 - c_2) \cdot h + (b_3 - c_3) \cdot h^2 + \cdots > (a_1 - b_1) + (a_2 - c_2) \cdot h + (a_3 - c_3) \cdot h^2 + \cdots,$$

welches für ganz klein gedachte h offenbar nur dann der Fall seyn könnte, wenn $b_1 - a_1$ und $a_1 - b_1$ zu gleicher Zeit negativ oder Null wäre. Da nun $b_1 - a_1$ und $a_1 - b_1$ nicht zu gleicher Zeit negativ seyn können, so ist $b_1 = a_1$.

II. $\delta v_t = \varphi_t$,

welches die zweite Hauptgleichung der Bewegung ist.

Wir haben jedoch hier vorausgesetzt, daß $\varphi_t$ vom t bis zu t+h hin, immer fort größer wird. Würde aber $\varphi_t$ von t bis zu t+h hin immerfort kleiner, so würde d die größere, und Δ die kleinere der Grenz-Reihen, zwischen denen die Reihe D liegt (weil der Zuwachs an Geschwindigkeit in derselben Zeit h offenbar größer werden muß, wenn immer fort die Kraft in ihrer größten Stärke $\varphi_t$ wirkt, als wenn sie während ihres Wirkens stetig kleiner und zuletzt $\varphi_{t+h}$ wird, — während wenn diese kleinste Kraft $\varphi_{t+h}$ schon vom Anfange der Zeit h an stetig fort konstant wirken wollte, der in dieser Zeit h dadurch gewonnene Zuwachs an Geschwindigkeit offenbar kleiner seyn müßte, als wenn vom Anfange der Zeit h an zuerst die größere Kraft $\varphi_t$ wirkt, dann die Kraft sich vermindert, und zuletzt erst oder eigentlich nie die kleinste Kraft $\varphi_{t+h}$ eintritt). — Der Schluß, der aus $d > D$ und $\Delta < D$ hervorgeht, ist aber genau derselbe, der kurz vorher aus $d < D$ und $\Delta > D$ hervorgegangen ist, nämlich $\delta v_t = \varphi_t$.

Man kann aber immer h klein genug sich denken, daß innerhalb dieser Zeit die Kraft $\varphi_t$ zu $\varphi_{t+h}$ hin immerfort wächst, wie wir zuerst angenommen haben, oder immerfort abnimmt, wie wir dies zuletzt uns so gedacht haben. Daher ist die Richtigkeit der Haupt-Gleichung (II.) in allen möglichen Fällen auch auf diesem Wege außer Zweifel gesetzt.

Die hier nach Lagrange ohne Zuziehung der Rechnung mit Unendlich-Kleinen gefundenen Resultate stimmen aber in allen Begriffen wie in allen Resultaten mit denen im (Kap. I.) und im vorstehenden Kapitel gegebenen Begriffen und gefundenen Resultaten ganz und vollkommen überein. Und da alles über Bewegung noch folgende auf diese ersten Begriffe gestützt ist, so ist es für die Folge ganz einerlei, ob man sich auf dem einen oder auf dem andern Wege zu den Begriffen und Resultaten hingearbeitet hat, welche dem Folgenden zu Grunde liegen.

Lagrange hat übrigens so wie hier, so für alle Anwendungen jedesmal zwei solche Grenz-Reihen S und S' aufgesucht, zwischen denen die Reihe R liegen muß, welche den Zuwachs einer Funktion ausdrückt und dafür gesorgt, daß die beiden Grenz-Reihen S und S' mit einerlei ersten Gliede anfangen, wo dann R selbst mit demselben ersten Gliede anfangen muß. — Auf diesem Wege hat er mittelst seines Calcul des fonctions, den wir in (Analyst. Kap. 1. u. Kap. 3.), wenn auch unter anderen Benennungen, hingestellt haben, alle diejenigen Anwendungen hergestellt, welche man früher durch die Rechnung mit Unendlich-Kleinen des Leibnitz erhalten hatte. — Uns scheint es, als wenn man mit Lagrange's Calcul des fonctions beginnen, dann aus ihm die wichtigsten Lehren des Unendlich-Kleinen [und namentlich den Satz (§. 35. Analyst.), welcher lehrt $\Sigma(\varphi_t \cdot dt)$ zu finden, wenn t alle stetig neben einander liegenden, d. h. um dt von einander entfernten, Werthe von a bis b erhält] ableiten müßte, zuletzt aber in der Anwendung auf stetige Größen (Raum, Zeit, Kraft) den ältern Weg betreten könnte, welcher dem stetigen Aendern, ein Aendern in unendlich-kleinen Zwischenräumen gleich setzt; — wenn nur die Identität beider Ansichten allgemein, oder doch für jede besondere Gattung der Aenderungen, strenge nachgewiesen wird, wie wir zu thun uns bemüht haben.

# Mechanik des Atoms.

## Fünftes Kapitel.

### Krummlinige Bewegung eines Atoms.

### Erster Abschnitt.

#### Allgemeine Gesetze für die drei Haupt-Arten der krummlinigen Bewegung.

##### §. 35.

###### Bezeichnungen und Benennungen.

I. Im Verlaufe dieses Kapitels über krummlinige Bewegung bedienen wir uns der folgenden stehenden Bezeichnung. Wir denken uns drei rechtwinkliche Koordinaten-Axen, auf welche wir die Bahn beziehen, und nennen

1) $x$, $y$, $z$ die Koordinaten-Werthe des Punktes der Bahn, wo sich der Atom zu Ende der Zeit $t$ befindet, und den wir auch häufig den Endpunkt der Bahn nennen werden, obgleich die Bewegung darüber hinaus nach Belieben noch fortdauern kann;

2) $x$, $y$, $z$ die Koordinaten-Werthe des Punktes der Bahn, wo die Zeit $t$, $= 0$ gedacht wird, und den wir auch den Anfangs-Punkt der Bahn nennen, obgleich die Bewegung schon früher gewesen seyn kann, ehe der Augenblick gekommen, von welchem an die Zeit $t$ gezählt wird;

3) $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ die Winkel, welche die Tangente an dem End-Punkte der Bahn mit den drei Koordinaten-Axen macht;

4) a, b, c die Winkel, welche die Tangente an dem Anfangs-Punkte der Bahn mit denselben drei Axen macht;

5) s die Länge der Bahn, welche der Atom von $t = 0$ bis $t = t$ hin beschreibt, also den Bogen, der zwischen dem Anfangs- und End-Punkte der Bahn liegt;

6) v die Geschwindigkeit der Bewegung wie sie zu Ende der Zeit t, also im End-Punkte der Bahn ist, und welche auch End-Geschwindigkeit genannt wird;

7) v die Anfangs-Geschwindigkeit der Bewegung (wie sie seyn wird in dem Augenblicke wo $t = 0$ ist).

Unter diesen Voraussetzungen sind

$$s,\ x,\ y,\ z,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma \text{ und } v$$

Funktionen der Zeit t, dagegen

$$0,\ x,\ y,\ z,\ a,\ b,\ c \text{ und } v$$

die Werthe dieser Funktionen, für $t = 0$; also daß letztere alle (nach t) konstant sind. Wir schreiben aber, der Bequemlichkeit wegen, statt

$$\partial s_t,\ \partial x_t,\ \partial y_t,\ \partial z_t,\ \partial \alpha_t,\ \partial \beta_t,\ \partial \gamma_t,\ \partial v_t,\ \partial^2 s_t,\ \partial^2 x_t \text{ ꝛc. ꝛc.}$$

allemal bloß

$$\partial s,\ \partial x,\ \partial y,\ \partial z,\ \partial \alpha,\ \partial \beta,\ \partial \gamma,\ \partial v,\ \partial^2 s,\ \partial^2 x \text{ ꝛc. ꝛc.}$$

und wir bitten unsere Leser, darauf besonders sorgfältig achten zu wollen.

II. Die Geschwindigkeit einer (geradlinigen oder) krummlinigen Bewegung in jedem bestimmten Augenblicke, ist nach (§. 7.) als eine endliche, augenblicklich (also nur einmal) auf den ruhenden Atom wirkende Kraft anzusehen, in der Richtung der Tangente der Bahn. Die Geschwindigkeit v kann daher, dem (§. 16.) zu Folge, nach den 3 Axen in die 3 Seiten-Kräfte

$$v \cdot \cos\alpha, \quad v \cdot \cos\beta \quad \text{und} \quad v \cdot \cos\gamma$$

zerlegt werden, und diese letzteren werden die (End-) Seiten-Geschwindigkeiten nach den Axen genannt.

III. Alle stetig wirkenden Kräfte, also alle Kräfte, welche auf den Atom während seiner Bewegung einwirken, d. h. alle

Kräfte, die zu Ende jeder Zeit $t$ gleichzeitig einwirken, denken wir uns immer nach den Koordinaten-Axen zerlegt, und dieſe Seiten-Kräfte in die dreie

$$X \cdot dt, \quad Y \cdot dt, \quad Z \cdot dt$$

vereint, während wir durch $dt$ allemal die Dauer einer Wirkung dieſer ſtetig wirkenden Kräfte vorſtellen. (Vergl. ſorgfältig §. 31.)

## §. 36.

I. Aus (§§. 16. Geom.) und (§§. 4. 5. Anmerk. 1.) ſteht nun für jede krummlinige Bewegung ein- für allemal feſt:

$$\partial s = v$$

alſo

1) $$v^2 = \partial s^2 = \partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2,$$

2) $$\cos\alpha = \frac{\partial x}{\partial s}, \quad \cos\beta = \frac{\partial y}{\partial s}, \quad \cos\gamma = \frac{\partial z}{\partial s};$$

oder, wenn man mit $\partial s$ wegmultiplizirt, und zugleich ſtatt $\partial s$ ſeinen Werth $v$ ſchreibt,

3) $$v \cdot \cos\alpha = \partial x, \quad v \cdot \cos\beta = \partial y, \quad v \cdot \cos\gamma = \partial z,$$

ſo daß alſo $\partial x$, $\partial y$, $\partial z$ die Seiten-Geſchwindigkeiten (nach den Axen) ſind, in welche die Geſchwindigkeit $v$ ſich zerlegt.

II. Differenzirt man die Gleichung (1.), ſo folgt noch

4) $$v \cdot \partial v = \partial s \cdot \partial^2 s = \partial x \cdot \partial^2 x + \partial y \cdot \partial^2 y + \partial z \cdot \partial^2 z.$$

Setzt man hier ſtatt $\partial x$, $\partial y$, $\partial z$ die Werthe aus (3.), ſo wie $v$ ſtatt $\partial s$, ſo erhält man noch

5) $$\partial v = \partial^2 s = \cos\alpha \cdot \partial^2 x + \cos\beta \cdot \partial^2 y + \cos\gamma \cdot \partial^2 z.$$

III. Steht irgend eine Gerade, im End-Punkte der Bahn, auf der Bahn ſelbſt ſenkrecht (d. h. auf der Tangente der Bahn) und ſind $\varepsilon$, $\varepsilon'$, $\varepsilon''$ die Winkel, welche dieſe Gerade mit den Axen macht, ſo iſt allemal (nach Geom. §. 1. VII. Nr. 8.)

$$\cos\varepsilon \cdot \cos\alpha + \cos\varepsilon' \cdot \cos\beta + \cos\varepsilon'' \cdot \cos\gamma = 0,$$

oder auch, wenn man ſtatt $\cos\alpha$, $\cos\beta$ und $\cos\gamma$ ihre Werthe aus (2.) ſubſtituirt:

6) $$\cos\varepsilon \cdot \partial x + \cos\varepsilon' \cdot \partial y + \cos\varepsilon'' \cdot \partial z = 0,$$

wie solches auch schon (Geom. §. 16. IV. Nr. 6.) hingestellt worden ist.

## §. 37.

### Allgemeine Gleichungen für alle krummlinigen Bewegungen.

I. Dies vorausgesetzt, so können wir nun die Gleichungen der Bewegung eines Atoms aufsuchen in den 3 Fällen

1) wenn der Atom bloß den Kräften X, Y, Z folgt, übrigens aber ganz frei ist (freie Bewegung);
2) wenn der Atom während seiner Bewegung durch die wirkenden Kräfte beständig an eine gegebene Fläche $L_{x,y,z} = 0$ angedrückt wird und letztere den nöthigen Widerstand leistet, so daß der Atom gezwungen ist, in dieser Fläche sich zu bewegen (Bewegung in einer Fläche);
3) wenn dem Atom seine Bahn l ganz vorgeschrieben ist, durch zwei gegebene Gleichungen $L_{x,y,z} = 0$ und $L'_{x,y,z} = 0$, welche zweien Flächen angehören, deren Durchschnitt diese vorgeschriebene Bahn liefert*) (Bewegung in vorgeschriebener Bahn).

In allen drei Fällen hat der Atom zu Ende der Zeit t die unbekannten Seiten-Geschwindigkeiten

$$\partial x, \quad \partial y \quad \text{und} \quad \partial z$$

nach (§. 36. I.), welche Funktionen von t sind, und welche auch die Seiten-Geschwindigkeiten liefern, wie sie zu Ende der Zeit $t + dt$ seyn werden, nämlich

$$(\partial x)_{t+dt}, \quad (\partial y)_{t+dt}, \quad \text{und} \quad (\partial z)_{t+dt},$$

so daß der in der Zeit dt erworbene (positive oder negative) Zuwachs an Seiten-Geschwindigkeit nach den Axen bezüglich

$$(\partial x)_{t+dt} - \partial x, \quad (\partial y)_{t+dt} - \partial y \quad \text{und} \quad (\partial z)_{t+dt} - \partial z$$

*) Man kann sich eine an ihren Wänden vollkommen Widerstand leistende, beliebig gekrümmte Röhre denken, in welcher der Atom von den stetig auf ihn wirkenden Kräften fortgetrieben wird. Die Kräfte in Verbindung mit dem Gegendruck an den Wänden bewirken dann die verschiedenen Geschwindigkeiten an den verschiedenen Stellen der Bahn.

seyn wird, welche Differenzen nach dem Taylor'schen Satze bezüglich

$$\partial^2x\cdot dt+\partial^3x\cdot\frac{dt^2}{2!}+\cdots,\quad \partial^2y\cdot dt+\partial^3y\cdot\frac{dt^2}{2!}+\cdots$$

und

$$\partial^2z\cdot dt+\partial^3z\cdot\frac{dt^2}{2!}+\cdots$$

sind, wofür wir jedoch nach (Analys. §. 20. Nr. 12.) deshalb bloß die Anfangs-Glieder

(A)··· $\partial^2x\cdot dt$, $\partial^2y\cdot dt$ und $\partial^2z\cdot dt$

zu nehmen brauchen, weil sie mit den Kräften $X\cdot dt$, $Y\cdot dt$ und $Z\cdot dt$, welche Unendlich-Kleine der ersten Ordnung sind, in Verbindung, die gesuchten Gleichungen bilden (wie weiter unten einzusehen ist), daher die Unendlich-Kleinen der höhern Ordnung nicht in Betrachtung kommen dürfen.

Denkt man sich daher in dem Moment, wo die Kräfte

(B)··· $X\cdot dt$, $Y\cdot dt$, $Z\cdot dt$

nach den Axen wirken, andere drei Kräfte, der Größe nach obigen Zuwachsen (A) der Seiten-Geschwindigkeiten gleich (§. 7.), nämlich die drei Kräfte

$$\partial^2x\cdot dt,\quad \partial^2y\cdot dt,\quad \partial^2z\cdot dt,$$

aber in genau entgegengesetzter Richtung der Axen, also, im Sinne der Axen, die drei Kräfte

(C)··· $-\partial^2x\cdot dt$, $-\partial^2y\cdot dt$, $-\partial^2z\cdot dt$

noch hinzugefügt, so bleibt alles beim Alten, und der Atom hat seine alte Bewegung, wie man sie nach verflossener Zeit $t$, und noch ehe die Kräfte $X\cdot dt$, $Y\cdot dt$ und $Z\cdot dt$ (auf's neue) hinzugetreten sind, vorgefunden hat. Die sechs Kräfte (B) und (C), oder die drei Kräfte

(D)··· $(X-\partial^2x)\cdot dt$, $(Y-\partial^2y)\cdot dt$, $(Z-\partial^2z)\cdot dt$,

in welche sie sich vereinigen lassen, und welche mit den Axen parallel und im Sinne der Richtung der Axen wirken, vernichten sich also gegenseitig, d. h. halten einander das Gleichgewicht, und zwar

1) an sich, im Falle der Atom sonst ganz frei ist; — oder

2) mittelst der Fläche L, im Falle der Atom auf dieser Fläche L sich zu bewegen gezwungen ist; — oder

3) mittelst der Linie l (oder mittelst der beiden Flächen L und L'), im Falle der Atom gezwungen ist, auf der Bahn l zu bleiben (welche als die Durchschnitts-Linie der beiden Flächen L und L' gegeben seyn kann).

Die Gesetze des Gleichgewichts eines Atoms geben also die Gleichungen der Bewegung.

II. Gleichungen der freien Bewegung.

Da nun im Falle der freien Bewegung diese 3 Kräfte (D.) einander ohne weiteres im Gleichgewicht halten müssen, so ist in diesem Falle nach (§. 20.) nothwendig jede für sich der Null gleich. Dividirt man diese 3 Gleichungen durch dt weg, so erhält man demnach für die freie krummlinige Bewegung die 3 Gleichungen,

$$(\odot_1)\cdots \quad \partial^2 x = X, \quad \partial^2 y = Y \text{ und } \partial^2 z = Z,$$

durch welche x, y und z als Funktionen von t gegeben sind.

III. Gleichungen der Bewegung auf der Fläche L.

Da in diesem Falle, wo der Atom auf einer gegebenen Fläche

$$L_{x,y,z} = 0$$

sich bewegt, die 3 Kräfte (I. D.) den Atom mit Hilfe dieser Fläche M im Gleichgewicht erhalten, so hat man nach (§. 22. IV.), wenn $R \cdot dt$ den unendlich-kleinen Gegendruck in der durch die Winkel $\lambda$, $\mu$, $\nu$ gegebenen Normale vorstellt, welcher dem Druck der (unendlich-kleinen) Kräfte (I. D.) das Gleichgewicht hält, und wenn man die Gleichungen des Gleichgewichts durch dt dividirt, auch $\partial^2 x$, $\partial^2 y$, $\partial^2 z$ auf die andere Seite bringt, die 3 Gleichungen

$$(\odot_2)\cdots \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial^2 x = X + R \cdot \cos\lambda \\ \partial^2 y = Y + R \cdot \cos\mu \\ \partial^2 z = Z + R \cdot \cos\nu \end{array} \right\},$$

während nach (§. 14. Geom.)

$$1) \quad \cos\lambda = \frac{\partial L_x}{W}; \quad \cos\mu = \frac{\partial L_y}{W} \text{ und } \cos\nu = \frac{\partial L_z}{W}$$

ist, wenn der Kürze wegen

2) $$W = \sqrt{\partial L_x^2 + \partial L_y^2 + \partial L_z^2}$$

geſetzt wird. — Auch iſt noch nach (§. 36. III.), weil die Normale der Fläche auch auf der Tangente der Bahn ſenkrecht ſteht,

3) $$\cos\lambda \cdot \partial x + \cos\mu \cdot \partial y + \cos\nu \cdot \partial z = 0.$$

Durch dieſe Gleichungen ſind aber x, y, z und R als Funktionen von t gegeben.

IV. Gleichungen der Bewegung auf gänzlich vorgeſchriebener Bahn.

In dem Falle, wo der Atom gezwungen iſt, auf der durch die Gleichungen

1) $L_{x,y,z} = 0$ und 2) $L'_{x,y,z} = 0$

gegebenen Bahn zu bleiben, findet man die Bedingungen des Gleichgewichts der 3 Kräfte (I. D.), nämlich der Kräfte

$$(X - \partial^2 x) \cdot dt, \quad (Y - \partial^2 y) \cdot dt, \quad (Z - \partial^2 z) \cdot dt$$

unmittelbar nach dem (§. 23.). Dividirt man dieſe 3 Gleichgewichts-Gleichungen durch dt weg, und ſchafft man noch $\partial^2 x$, $\partial^2 y$, $\partial^2 z$ auf die andere Seite, ſo werden ſie nachſtehende:

3) $$\left.\begin{aligned} \partial^2 x &= X + R \cdot \cos\lambda + R' \cdot \cos\lambda' \\ \partial^2 y &= Y + R \cdot \cos\mu + R' \cdot \cos\mu' \\ \partial^2 z &= Z + R \cdot \cos\nu + R' \cdot \cos\nu' \end{aligned}\right\},$$

wo $R \cdot dt$, $R' \cdot dt$ zwei auf L und L' bezüglich ſenkrechte Gegendrucke ſind, den Drucken gleich, mit denen der Atom von den 3 Kräften (I. D.) gegen die Flächen L und L' gedrückt wird. — Durch dieſe 5 Gleichungen (1. 2. und 3.) ſind aber x, y, z, R und R' als Funktionen von t gegeben.

Denkt man ſich die beiden Gegendrucke $R \cdot dt$ und $R' \cdot dt$ in einen einzigen $Q \cdot dt$ vereinigt, ſo liegt ſolcher mit ſeiner Richtung nothwendig in der Normal-Ebene der Bahn. Sind $\varepsilon$, $\varepsilon'$ und $\varepsilon''$ die Winkel, welche ſeine Richtung mit den 3 Axen macht, ſo hat man nach (§. 36. III.) und nach (§. 1. Geom.)

4) $$\cos\varepsilon \cdot \partial x + \cos\varepsilon' \cdot \partial y + \cos\varepsilon'' \cdot \partial z = 0,$$

5) $$\cos\varepsilon^2 + \cos\varepsilon'^2 + \cos\varepsilon''^2 = 1;$$

und ſtatt der Gleichungen (3.) erhält man nun:

$$(\odot_3)\cdots \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial^2 x = X + Q \cdot \cos\varepsilon \\ \partial^2 y = Y + Q \cdot \cos\varepsilon' \\ \partial^2 z = Z + Q \cdot \cos\varepsilon'' \end{array} \right\}.$$

Durch diese 7 Gleichungen (1. 2. 4. 5. und $\odot_3$) sind aber x, y, z, Q, $\varepsilon$, $\varepsilon'$ und $\varepsilon''$ als Funktionen von t gegeben.

V. Vergleichung dieser drei Systeme von Bewegungs-Gleichungen $\odot_1$, $\odot_2$ und $\odot_3$ mit einander.

1) Vergleicht man die 3 Resultate ($\odot_1$, $\odot_2$ und $\odot_3$ in II. III. u. IV.) mit einander, so findet man sogleich, daß die Bewegung auf gegebener Fläche L, oder auf gegebener Bahn l, mit einer freien Bewegung identisch ist, welche durch die Kräfte X·dt, Y·dt, Z·dt nicht allein, sondern noch durch eine unbekannte Kraft R·dt oder Q·dt (normal auf die Fläche, oder in der Normal-Ebene der Bahn) hervorgebracht ist. — Während der Bewegung in gegebener Fläche L, oder in gegebener Bahn l, erleidet also die Fläche L, oder die Bahn l, wirklich diesen (unendlich-kleinen) Druck R·dt (normal auf L), oder Q·dt (in der Normal-Ebene der Bahn), weil ein eben so großer Gegendruck in Verbindung mit den Kräften X·dt, Y·dt, Z·dt den Atom frei dieselbe Bahn durchlaufen machen würde, weil also dieser Gegendruck die Fläche L oder die vorgeschriebene Linie l überflüssig macht; was nur möglich ist, wenn er den Druck, den die Fläche L oder die Bahn l erleidet, gerade aufhebt und vernichtet, d. h. ihm gleich und direkt entgegengesetzt ist. — Dieser Druck, den die Bahn erleidet, so oft die Bewegung nicht frei ist, rührt übrigens von den wirkenden Kräften her, nämlich von der (endlichen) Geschwindigkeit v und von den (unendlich-kleinen) Kräften X·dt, Y·dt und Z·dt, welche gleichzeitig mit v auf den Atom wirken. Diese eben genannten Kräfte bringen also den Druck auf die Bahn hervor, und noch die neuen Seiten-Geschwindigkeiten

$\partial x + \partial^2 x \cdot dt$, $\partial y + \partial^2 y \cdot dt$ und $\partial z + \partial^2 z \cdot dt$ *).

*) Fügt man 3 neue Kräfte, diesen neuen Seiten-Geschwindigkeiten gleich aber genau entgegen, also, im Sinne der Axen gedacht, die 3 Kräfte

2) Sondert man von dem normalen Druck R·dt oder Q·dt, welchen während der nicht freien Bewegung die Bahn erleidet, den Theil ab, welcher von den hinzutretenden Kräften X·dt, Y·dt und Z·dt herrührt, so bleibt der Theil dieses (normalen) Druckes übrig, der von der bloßen Geschwindigkeit v herrührt. Denselben werden wir aber im (§. 48.) unter dem Namen der Centrifugal-Kraft oder Schwungkraft, noch einer nähern Betrachtung unterziehen, indem wir dabei von speziellern Betrachtungen ausgehen wollen. Daher mag hier diese Andeutung einstweilen genügen.

3) Zerlegt man die wirkenden Kräfte, und auch, im Falle der nicht freien Bewegung, den unbekannten Gegendruck R·dt, oder Q·dt, den man nach (1.) noch sich hinzudenken muß, um die nicht freie Bewegung als eine freie ansehen und behandeln zu können, nach den 3 Axen, so kann man die krummlinige Bewegung eines Atoms, als 3 geradlinige Bewegungen seiner Projektionen auf die 3 Axen ansehen, unter der Voraussetzung, daß bei jeder dieser geradlinigen Bewegungen bloß die auf dieselbe Axe projizirten Kräfte allein wirken.

Denn wenn man nach (§. 33. III.) die Gleichung für jede dieser 3 geradlinigen Bewegungen unter der so eben erwähnten Voraussetzung nimmt, so bekommt man sogleich die 3 Gleichungen $(\odot_1)$ oder $(\odot_2)$ oder die Gleichungen $(\odot_3)$ wieder, je nachdem man die freie oder die beiden Arten der nicht freien Bewegung im Auge hat.

---

$-\partial x - \partial^2 x \cdot dt$, $-\partial y - \partial^2 y \cdot dt$ und $-\partial z - \partial^2 z \cdot dt$

noch zu v, X·dt, Y·dt, Z·dt hinzu, so ist Ruhe, also Gleichgewicht; und alle 7 Kräfte bringen also genau (und weiter nichts als) den Druck R·dt oder Q·dt hervor. Da nun v und $-\partial x$, $-\partial y$, $-\partial z$ sich geradezu aufheben und vernichten (ohne Hülfe der Fläche L oder der Bahn l), so bringen die 6 Kräfte

$-\partial^2 x \cdot dt$, $-\partial^2 y \cdot dt$, $-\partial^2 z \cdot dt$, X·dt, Y·dt und Z·dt,

oder die 3 Kräfte $(X - \partial^2 x) \cdot dt$, $(Y - \partial^2 y) \cdot dt$ und $(Z - \partial^2 z) \cdot dt$ genau und weiter nichts als diesen Druck R·dt, oder Q·dt, als ihre mittlere Kraft, hervor. Dies stimmt aber genau mit der Deduktion in (I. — IV.) überein.

## §. 38.

### Ein allgemeines Integral der vorstehenden Gleichungen der Bewegung und Analogien mit der geradlinigen Bewegung.

I. Multiplizirt man in den Gleichungen ($\odot_1$, $\odot_2$ oder $\odot_3$) die erstere mit $\partial x$, die zweite mit $\partial y$, die dritte mit $\partial z$, und addirt man alle 3 Resultate, so erhält man in allen 3 Fällen ein und dasselbe Resultat (wegen §. 37. III. 3. und IV. 4.) nämlich

1) $\partial x \cdot \partial^2 x + \partial y \cdot \partial^2 y + \partial z \cdot \partial^2 z = X \cdot \partial x + Y \cdot \partial y + Z \cdot \partial z$,

oder nach (§. 36. II. 4.)

2) $\partial s \cdot \partial^2 s$ oder $v \cdot \partial v = X \cdot \partial x + Y \cdot \partial y + Z \cdot \partial z$ *).

Nimmt man hier links und rechts die Integrale nach t, so erhält man, weil für $t = 0$, $v = v$ wird, nach (§. 35.)

3) $$v^2 - v^2 = 2\int_{t=0} (X \cdot \partial x + Y \cdot \partial y + Z \cdot \partial z) \cdot dt.$$

Da $v^2 = \partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2$ ist, so ist diese Gleichung (3.) als eines der Integrale der Gleichungen ($\odot_1$, $\odot_2$ oder $\odot_3$) anzusehen, so oft $X \cdot \partial x + Y \cdot \partial y + Z \cdot \partial z$ integrabel ist, d. h. so oft man das Integral zur Rechten in (3.) finden kann, ohne daß die durch x, y, z vorgestellten und gesuchten Funktionen von t, die mit ihren Differenzial-Koeffizienten zugleich in X, Y, Z vorkommen können, bekannt zu seyn brauchen **). (Vergl. sorgfältig Analyf. §§. 43. 44. und Anmerk. 2. zu §. 53.)

---

*) Der Anfänger wird begreifen, daß alles darauf ankommt, die Gleichungen der Bewegung ($\odot_1$, $\odot_2$ und $\odot_3$) zu integriren. Nun haben wir aber in dem einfachern Falle der geradlinigen Bewegung die analoge Gleichung $\partial^2 s = \varphi$ mit $\partial s$ multiplizirt, um

$$\partial s \cdot \partial^2 s = \varphi \cdot \partial s,$$

oder

$$v \cdot \partial v = \varphi \cdot \partial s$$

zu erhalten, damit diese Gleichung integrirt werden könne und

$$v^2 = c + 2\int(\varphi \cdot \partial s) \cdot dt,$$

oder

$$v^2 = c + 2\int \varphi \cdot ds$$

gebe. — Dem analog mußte man daher auch hier zu verfahren suchen.

**) Auch das Integral $v^2 = c + 2\int(\varphi \cdot \partial s) \cdot dt$ in der vorstehenden Note für die geradlinige Bewegung ist nur dann als solches anzusehen, wenn $\varphi$ bloß s enthält, weil auch nur dann $\int(\varphi \cdot \partial s) \cdot dt = \int \varphi \cdot ds$ gesetzt

Gesetzt also es sey $X \cdot \partial x + Y \cdot \partial y + Z \cdot \partial z$ nicht bloß integrabel, sondern auch

4) $\int (X \cdot \partial x + Y \cdot \partial y + Z \cdot \partial z) \cdot dt = f_{x,y,z}$ ...

gefunden, so geht die Gleichung (3.) bei dieser Voraussetzung und bei der Bezeichnung des (§. 35.), die wir in diesem ganzen Kapitel als eine stehende gebrauchen, über in

$$(\odot) \cdots \qquad v^2 - v^2 = 2(f_{x,y,z} - f_{t,v,b}),$$

welches Resultat für alle 3 Fälle der krummlinigen Bewegung gilt.

II. Bei der geradlinigen Bewegung des (§. 33.) ist $\partial v = \partial^2 s$ gleich der (in der Richtung der Bewegung) wirkenden Kraft. Sehen wir zu, ob analoges für die krummlinige Bewegung gilt.

Projiziren wir zu dem Ende die wirkenden Kräfte X, Y, Z auf die Tangente, so ist die Summe T dieser Projektionen allemal so (vergl. §. 16.)

$$T = X \cdot \cos\alpha + Y \cdot \cos\beta + Z \cdot \cos\gamma,$$

oder, nach (§. 36. I. 2.)

$$T = X \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + Y \cdot \frac{\partial y}{\partial s} + Z \cdot \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{X \cdot \partial x + Y \cdot \partial y + Z \cdot \partial z}{\partial s}.$$

Dividirt man aber die Gleichung (I. 2.), die für alle 3 Arten der krummlinigen Bewegung gilt, durch v oder $\partial s$, so erhält man sogleich, mittelst der vorstehenden Gleichung:

$$(\mathcal{A}) \cdots \qquad \partial v \text{ oder } \partial^2 s = T,$$

Anmerk. 1. Die beiden Gleichungen der geradlinigen Bewegung (§. 33.), nämlich

$$\partial s = v \quad \text{und} \quad \partial v = \partial^2 s = T$$

gelten also auch noch für jede Gattung der krummlinigen Bewegung, wenn man nur in letzterem Falle unter $T \cdot dt$ die Summe aller zu Ende der Zeit t wirkenden, aber auf die Richtung der Bahn (d. h. auf die Richtung der Tangente an dem End-Punkte der Bahn) projizirten Kräfte versteht *).

---

den werden kann, ohne daß die unter v und s zu verstehenden Funktionen von t schon bekannt zu seyn brauchen.

*) Jede zu Ende der Zeit t wirkende Kraft $\varphi \cdot dt$, deren Richtung mit der Tangente den Winkel $\delta$ macht, läßt sich in zwei Kräfte zerlegen, von de-

Anmerk. 2. Die Gleichung (24), nämlich

$$\partial^2 s = T$$

kann man besonders dann mit Nutzen gebrauchen, wenn die Bahn vorgeschrieben ist. Aus den dann gegebenen Gleichungen

$$L_{x,y,z} = 0 \quad \text{und} \quad L'_{x,y,z} = 0$$

kann man nämlich z und y als Funktionen von x finden, also auch $\partial z$ und $\partial y$ in x und $\partial x$ ausgedrückt. Dann hat man also $\partial s = \sqrt{\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2}$ in x und $\partial x$ ausgedrückt, und findet daraus durch Integration s in x, also auch x in s ausgedrückt. Also kann man nun x und y und z in s ausdrücken, so wie noch $\partial x$, $\partial y$, $\partial z$ in s und $\partial s$. — Also kann man nun auch T, d. h. $X \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + Y \cdot \frac{\partial y}{\partial s} + Z \cdot \frac{\partial z}{\partial s}$ bloß in s und $\partial s$ ausdrücken, vorausgesetzt daß X, so wie Y und Z, bloß Funktionen von x, y, z allein sind, oder höchstens noch $\partial x$, $\partial y$ oder $\partial z$ enthalten. Hat man aber T bloß in s und $\partial s$ ausgedrückt, so ist die Gleichung (24) oder $\partial^2 s = T$ eine Differenzial-Gleichung der zweiten Ordnung bloß zwischen s, $\partial s$ und $\partial^2 s$, ohne einen andern Veränderlichen zu enthalten (außer t, welches in so ferne vorkommt, als $\partial s$ und $\partial^2 s$ Differenzial-Koeffizienten von s nach t sind). Läßt sich zuletzt diese Gleichung vollständig integriren, so daß zwei willkührliche Konstanten eingehen, die aus den für $t = 0$ bekannten Werthen von s und $\partial s$ bestimmt werden können, so hat man s, also auch x, y, z, und auch $\partial s$ oder v, in t ausgedrückt.

Bei den Pendel-Bewegungen im (§. 51.) bedienen wir uns einigemale, zur Abwechselung, dieser Gleichung $\partial^2 s = T$ statt der Gleichungen ($\odot_s$) auf die eben beschriebene Weise.

Anmerk. 3. I. Unter den Beispielen, wo

$$X \cdot \partial x + Y \cdot \partial y + Z \cdot \partial z$$

---

nen die eine $\varphi \cdot \sin\delta \cdot dt$ senkrecht auf die Bahn, die andere aber $\varphi \cdot \cos\delta \cdot dt$ in der Richtung der Bahn wirkt. Nur letztere macht einen Theil von dem T aus, während erstere in der Gleichung (24) durchaus nicht in Betrachtung kommt.

integrabel ist, und das allgemeine Integral (⊙ des §. 38.) nämlich

$$v^2 - v^2 = 2(f_{x,y,z} - f_{r,v,h})$$
$$= 2\int_{t\div 0}(X\cdot\partial x + Y\cdot\partial y + Z\cdot\partial z)\cdot dt$$

statt findet, heben wir namentlich die zweie hervor, welche in den gewöhnlichen Anwendungen am häufigsten eintreten, nämlich

1) wenn X, Y, Z konstant sind, oder wenn doch X bloß x allein, und Y bloß y allein, so wie Z bloß z allein enthält *); oder

2) wenn der Atom stetig nach einem festen Punkt (A, B, C) hingetrieben wird, durch eine Kraft, welche von der jedesmaligen Entfernung

$$r = \sqrt{(x-A)^2 + (y-B)^2 + (z-C)^2}$$

eine beliebige Funktion $F_r$ ist. Denn es ist in diesem letztern Falle

$$X = F_r\cdot\cos\alpha = F_r\cdot\frac{x-A}{r},$$

$$Y = F_r\cdot\cos\beta = F_r\cdot\frac{y-B}{r},$$

$$Z = F_r\cdot\cos\gamma = F_r\cdot\frac{z-C}{r};$$

also

$$X\cdot\partial x + Y\cdot\partial y + Z\cdot\partial z =$$
$$F_r\cdot\frac{(x-A)\cdot\partial x + (y-B)\cdot\partial y + (z-C)\cdot\partial z}{r} = F_r\cdot\partial r;$$

und

$$\int(X\cdot\partial x + Y\cdot\partial y + Z\cdot\partial z)\cdot dt = \int(F_r\cdot\partial r)\cdot dt = \int F_r\cdot dr;$$

---

*) Dies ist z. B. der Fall, wenn bloß die als konstant und $= g\cdot dt$ (oder $= g$) gedachte Schwere auf den Atom, und zwar allemal parallel mit der Axe der z wirkt. — Denn dann ist

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = g,$$

also

$$\int(X\cdot\partial x + Y\cdot\partial y + Z\cdot\partial z)\cdot dt = g\cdot z,$$

und das Integral (⊙) wird dann

$$v^2 - v^2 = 2g\cdot(z-i).$$

d. h. dieſes Integral oder $f_{x,y,z}$ iſt zu finden, ohne daß man die durch x, y, z vorgeſtellten Funktionen von t zu kennen braucht.

3) Wenn der Atom ſtetig nach mehreren ſolchen feſten Punkten (A, B, C), (A′, B′, C′), (A″, B″, C″), ··· mit Kräften getrieben wird, welche bezüglich $F_r$, $F'_{r'}$, $F''_{r''}$, ꝛc. ꝛc. ſind, während r′, r″, ꝛc. für die übrigen feſten Punkte das ſind, was r in Bezug auf (A, B, C) bedeutet, wo aber F, F′, F″ ꝛc. ꝛc. ganz beliebige (und auch von einander verſchiedene) Funktionen vorſtellen, die bezüglich bloß r, r′, r″, ꝛc. ꝛc. enthalten. — Denn es wird dann offenbar

$$X\cdot\partial x+Y\cdot\partial y+Z\cdot\partial z = F_r\cdot\partial r+F'_{r'}\cdot\partial r'+F''_{r''}\cdot\partial r''+\cdots,$$

ſo daß das Integral (nach t) hiervon

$$= \int F_r\cdot dr+\int F'_{r'}\cdot dr'+\int F''_{r''}\cdot dr''+\cdots$$

werden muß *).

II. Dagegen kann man ſich überzeugt halten, daß

$$X\cdot\partial x+Y\cdot\partial y+Z\cdot\partial z$$

nicht integrabel iſt, daß alſo dann das Integral (⊙. §. 38. I.) nämlich

$$v^2-v^2 = 2\int_{t\ldots 0}(X\cdot\partial x+Y\cdot\partial y+Z\cdot\partial z)\cdot dt$$

*als ſolches nicht* exiſtirt, ſo oft unter den wirkenden Kräften ſolche vorkommen, welche als (explizite) Funktionen der Geſchwindigkeit v (wie z. B. Widerſtand der Luft) oder als (explizite) Funktionen der Zeit t gegeben oder vorausgeſetzt werden; — alſo namentlich auch nicht mehr unter den Vorausſetzungen der (I. 3.), ſobald die anziehenden Punkte nicht feſt ſind, ſondern ſich ſelbſt wieder bewegen, weil dann A, B, C, A′, ꝛc. ꝛc. ſolche Funktionen der Zeit ſeyn würden, alſo dann *nicht*

*) Dies wäre z. B. der Fall, wenn die Bewegung eines Planeten beſtimmt werden ſollte, welcher von der Sonne und von den übrigen Planeten zugleich durch Kräfte angezogen wird, von denen jede eine beliebige Funktion der gegenſeitigen Entfernung iſt, während die Sonne und die übrigen Planeten als feſtſtehend angeſehen werden.

$$X \cdot \partial x + Y \cdot \partial y + Z \cdot \partial z = F_1 \cdot \partial v$$

werden könnte.

III. Die Gleichung

$$v^2 - v^2 = 2\int_{t=0}^{t} (X \cdot \partial x + Y \cdot \partial y + Z \cdot \partial z) \cdot dt$$

bleibt aber in allen Fällen eine richtige Gleichung; nur ist sie kein Integral der Gleichungen der Bewegung, wenn sich nicht die Integration zur Rechten wirklich ausführen läßt, ohne daß x, y, z, also auch v und s, in t bereits bekannt sind. — Differenziirt man diese Gleichung, um die angezeigte Integration zur Rechten wieder wegzuschaffen, so erhält man in jedem Falle immer wieder eine richtige Differenzial-Gleichung der zweiten Ordnung, nämlich die Gleichung

$$v \cdot \partial v \text{ oder } \partial x \cdot \partial^2 x + \partial y \cdot \partial^2 y + \partial z \cdot \partial^2 z = X \cdot \partial x + Y \cdot \partial y + Z \cdot \partial z,$$

welche mit den Gleichungen der Bewegung ($\odot_1$ oder $\odot_2$ oder $\odot_3$) zugleich statt findet.

## §. 39.

### Gemeinschaftliche Eigenschaften aller drei Arten von krummliniger Bewegung.

Da das Integral ($\odot$. §. 38. I.), nämlich

$$(\odot) \cdots v^2 - v^2 = 2\int_{t=0}^{t} (X \cdot \partial x + Y \cdot \partial y + Z \cdot \partial z) \cdot dt$$

$$= 2(f_{x,y,z} - f_{t,v,s}),$$

im Falle solches existirt, allen 3 Arten krummliniger Bewegung gemein ist, so spricht es auch diejenigen Eigenschaften aus, welche allen 3 Arten krummliniger Bewegung gemeinschaftlich sind. Die wichtigsten dieser Eigenschaften sind aber folgende:

I. Die Geschwindigkeit v der Bewegung hängt bloß von den Koordinaten-Werthen des Anfangs- und des End-Punktes, so wie von der Anfangs-Geschwindigkeit v ab, und bleibt immer dieselbe, welche Bahn der Atom zwischen diesem Anfangs-Punkte und End-Punkte beschrieben haben mag *).

*) Man denke sich die Koordinaten-Ebene der (x, y) horizontal, und zwei andere Horizontal-Ebenen E und E durch die Koordinaten-Werthe

II. Ist gar keine stetig wirkende Kraft vorhanden, so ist

$$X = Y = Z = 0,$$

---

z und i gegeben. Wirkt nun die konstant und immer auf diese Horizontal-Ebenen senkrecht gedachte Schwere g (d. h. g·dt) allein auf den Atom, so hat man:

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = g,$$

also

$$\int(X \cdot \delta x + Y \cdot \delta y + Z \cdot \delta z) \cdot dt = f_{x,y,z} = g \cdot z,$$

und die Gleichung (⊙) wird dasmal

$$v^2 - v^2 = 2g \cdot (z - i),$$

wo v die Geschwindigkeit des Atoms ist, wenn er sich zu Ende der Zeit t in der Ebene E befindet, während v die Anfangs-Geschwindigkeit bedeutet, also die Geschwindigkeit zu der Zeit, wo er sich in der Ebene E befindet.

Nun kann aber der Atom vermöge der Schwere von der Horizontal-Ebene E zu der andern E auf folgenden verschiedenen Wegen gelangen:

1) Wenn die Anfangs-Geschwindigkeit v vertikal ist, und der Atom vertikal frei *fällt* oder *steigt*, je nachdem E *niedriger* oder höher liegt als E.
2) Wenn die Anfangs-Geschwindigkeit v eine beliebige Richtung hat, der Atom daher von E nach E zu in einer krummlinigen freien Bahn fällt oder steigt.
3) Wenn zwischen beiden Horizontal-Ebenen E und E eine beliebig schiefe Ebene liegt, und die Anfangs-Geschwindigkeit in dieser schiefen Ebene wiederum eine ganz beliebige ist, in beliebiger Richtung, so daß der Atom auf dieser schiefen Ebene bald geradlinig, bald auf in verschiedenen krummen Linien (vermöge der Schwere g·dt) sich bewegt.
4) Wenn zwischen beiden Horizontal-Ebenen E und E eine beliebig krumme Fläche liegt, und dabei die Anfangs-Geschwindigkeit v in beliebige Richtung in dieser Fläche hat, so daß der schwere Atom in dieser krummen Fläche in sehr verschiedenen Bahnen von E nach E fällt oder steigt. (In diesem Falle kann der Atom in die Horizontal-Ebene E *zweimal* (wohl auch mehrere mal) kommen, einmal bei'm Fallen, das andere mal bei'm wieder Emporsteigen, oder das erstemal bei'm Steigen, das andere mal bei'm wieder Herunterfallen, vorausgesetzt, daß er immer wirklich in der krummen Fläche bleibt).
5) Wenn zwischen beiden Horizontal-Ebenen E und E eine beliebig einfach oder doppelt gekrümmte Bahn liegt (etwa eine Röhre), in welcher der Atom zu bleiben gezwungen ist, während seine Anfangs-Geschwindigkeit v natürlich in der Anfangs-Richtung dieser Bahn gedacht ist. Auch hier kann der schwere Atom zwei und mehrere mal in dieselbe Ebene E kommen.

Welcher dieser Fälle aber auch statt finden mag, so ist doch die Ge-

alſo $f_{x,y,z}$ = Konſtante, folglich iſt dann $v^2 = v^2$ oder $v = v$; d. h. die Geſchwindigkeit iſt dann allenthalben dieſelbe, alſo die

---

ſchwindigkeit v des Atoms, ſo oft er in der Ebene E anlangt (ſey's bei'm Steigen oder bei'm Fallen, oder wieder bei'm Steigen, u. ſ. w. f.) allemal gegeben durch die Gleichung

$$v^2 - v^2 = 2g\cdot(z-i), \quad \text{oder} \quad v = \sqrt{v^2 + 2g\cdot(z-i)},$$

alſo auch allemal ein und dieſelbe, ſo lange v, z und i dieſelben Werthe haben, d. h. ſo lange die Anfangs-Geſchwindigkeit v dieſelbe iſt und die Ebenen E und E dieſelben bleiben.

Sind alſo z. B. (Fig. 36.) EE' und EE' zwei ſolche Horizontal-Ebenen und iſt EEGE'E' eine ganz beliebige feſte, einfach oder doppelt gekrümmte Bahn, welche dem auf ihr vermöge der konſtanten Schwere g·dt ſich bewegenden Atom genügenden Widerſtand leiſtet; ſetzt man voraus, daß keine weitere Kraft wirkt (alſo namentlich nicht Reibung, nicht Widerſtand der Luft, oder dgl.); und iſt endlich OPQ vertikal, und OP = i, OQ = z, alſo PQ = z − i; ſo hat, wenn der Atom mit der Anfangs-Geſchwindigkeit v die Bahn EEGE' bis E' durchläuft, ſelbiger in E' dieſelbe Geſchwindigkeit (in der Richtung der Bahn nach oben), die er (nach unten) haben würde, wenn er die Höhe PQ frei durchfallen, aber in P dieſelbe Anfangs-Geſchwindigkeit v (vertikal nach unten) vorhanden geweſen wäre. Und da dies gilt, es mag z beliebig groß oder klein ſeyn, ſo folgt noch für z = i, d. h. wenn EE' mit EE' zuſammenfällt, daß der Atom in E' dieſelbe Geſchwindigkeit v wieder hat, welche er in E hatte. Ja, iſt PM = h die zur Geſchwindigkeit v gehörige Fall-Höhe, und iſt HMH' eine durch M gelegte Horizontal-Ebene, ſo iſt die Geſchwindigkeit des Atoms in H' (nach oben) = 0, weil für OM = z, z − i = −h wird, die Formel $v = \sqrt{v^2 + 2g\cdot(z-i)}$ jetzt alſo $v = \sqrt{v^2 - 2gh} = 0$ liefert, in ſo ferne nach (§. 33. Anmerk.) $v^2 = 2gh$ iſt. — Hätte man den Atom ohne alle Anfangs-Geſchwindigkeit in H hingelegt, ſo wäre er in der Bahn bis E herunter gefallen, und hätte in E die vorausgeſetzte Geſchwindigkeit v erhalten, weil die Formel $v = \sqrt{v^2 + 2g(z-i)}$ jetzt, wo v = 0, z = OP, dagegen i = OM, alſo z − i = h iſt, $v = \sqrt{2gh}$, d. h. v = v liefert. — Iſt der Atom in H' in Ruhe, ſo macht er ſogleich dieſelbe Bewegung nach denſelben Geſetzen rückwärts und erhebt ſich wieder bis H, wo ſeine Geſchwindigkeit wiederum Null iſt, während er durchweg in gleichen Höhen gleiche Geſchwindigkeit hat, die Bewegung mag nach unten oder nach oben gerichtet ſeyn. — Eine ſolche Vorrichtung wird aber ein Pendel genannt und jede einzelne dieſer ohne Ende fortdauernden Bewegungen von H nach H', oder von H' wieder nach H, heißt eine Schwingung (Oſcillation); — Dieſe einzelnen Schwingungen geſchehen auch in gleichen Zeiten, d. h. die von H nach H' dauert ſo lange, als die von H' nach H (d. h. dieſe Schwingungen ſind iſochron); denn es wird ein und daſſelbe unendlich-

Bewegung allemal konstant, sie mag frei seyn oder in einer gegebenen Fläche, oder in einer völlig bestimmt gegebenen Bahn statt finden.

III. Ist $X \cdot \partial x + Y \cdot \partial y + Z \cdot \partial z$ integrabel, und das Integral $f_{x,y,z}$ gefunden, so giebt die Gleichung

$$f_{x,y,z} = C,$$

wo C eine beliebige aber bestimmte Konstante ist, diejenige Fläche, in welcher der Atom mit derselben Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{v^2 + 2(C - f_{x,y,z})}$$

ankommt, er mag frei ankommen, oder auf einer (den gehörigen Widerstand leistenden) gegebenen Fläche, oder auf einer gegebenen (den gehörigen Widerstand leistenden) Kurve, wenn er nur von demselben Punkte (x, y, z) ausgeht, mit derselben Anfangs-Geschwindigkeit v, der Größe nach (welche jedoch der Richtung nach beliebig abgeändert werden kann), und wenn nur jedesmal die stetig wirkenden Kräfte X, Y, Z dieselben bleiben *).

---

kleine Element der Bahn aufwärts oder abwärts jedesmal mit derselben Geschwindigkeit durchlaufen, also gebraucht der Atom auch dieselbe Zeit dazu, seine Bewegung mag nach oben oder nach unten gerichtet seyn.

Vom Pendel sehe man insbesondere (§. 51.). — Wir bemerken hier nur noch einmal ausdrücklich, daß das Vorstehende nur dann gilt, wenn die Schwere $g \cdot dt$ allein wirkt, nicht aber wenn etwa noch Reibung oder Widerstand der Luft in Betrachtung gezogen werden sollte, weil im letztern Falle die Gleichung

$$\int (X \cdot \partial x + Y \cdot \partial y + Z \cdot \partial z) \cdot dt = 2g \cdot z$$

nicht mehr statt finden würde, ja die Formel $X \cdot \partial x + Y \cdot \partial y + Z \cdot \partial z$ gar nicht mehr integrabel wäre, also das Integral (⊙) nicht mehr existirte.

*) In dem in der Note zu (I.) betrachteten Beispiele ist $f = g \cdot z$ gewesen; also ist

$$g \cdot z = C \quad \text{oder} \quad z = \frac{C}{g}$$

die Gleichung der Ebene (die dasmal mit der Horizontal-Ebene XOY parallel läuft, und von ihr um $\frac{C}{g}$ absteht), in welcher alle Atome die von demselben Punkte (x, y, z) ausgehen, mit derselben Anfangs-Geschwindigkeit v, jedoch in beliebiger Richtung, und dabei frei, oder auf beliebig gegebenen (festen) Flächen, oder (festen) Bahnen sich bewegen, mit einer und derselben Geschwindigkeit $v = \sqrt{v^2 + 2(C - gz)}$ anlangen.

Diese Betrachtung lehrt, daß die Horizontal-Ebenen die einzigen für

IV. Da nach (I.) in allen den Fällen, wo

1) $\int(X\cdot\partial x+Y\cdot\partial y+Z\cdot\partial z)\cdot dt = f_{x,y,z}$

iſt, die Geſchwindigkeit v durch die Gleichung

2) $v^2 = v^2+2(f_{x,y,z}-f_{x,y,z})$

gegeben, und deshalb genau dieſelbe iſt, welche Bahn der Atom zwiſchen den beiden Punkten (x, y, z) und (x, y, z) nur immer durchlaufen haben möchte; ſo kann man ſich die Frage ſtellen, wie ſich die von dem Atom in der Wirklichkeit zwiſchen den gegebenen (Anfangs- und End-) Punkten (x, y, z) und (x', y', z') durchlaufene Bahn, zu den nächſten Nachbar-Bahnen verhält, die er im Falle der freien Bewegung, oder der Bewegung auf einer gegebenen Fläche L noch hätte durchlaufen können, um zu derſelben Zeit in demſelben End-Punkt (x', y', z') mit derſelben Geſchwindigkeit $v' = \sqrt{v+2(f_{x',y',z'}-f_{x,y,z})}$ anzukommen. — Durch eine mehr metaphyſiſche als mathematiſche Betrachtung iſt man dahin gelangt, einzuſehen, daß $\int v\cdot ds$, alſo auch $\int \partial s^2\cdot dt$ oder $\int v^2\cdot dt$, jedesmal zwiſchen den Grenzen genommen, die dem Anfangs-Punkt (x, y, z) und dem End-Punkt (x', y', z') angehören, bei der wirklich durchlaufenen Bahn größer oder kleiner iſt, als bei jeder andern nächſten Nachbar-Bahn, welche der Atom zwiſchen dieſen beiden End-Punkten noch hätte beſchreiben können, aber nicht wirklich beſchreibt. Dieſen Satz wollen wir hier aus der Vorausſetzung (I.) mathematiſch beweiſen.

Es ſeyen x, y und z diejenigen Funktionen von t, welche die Koordinaten der Bahn zu Ende jeder Zeit t vorſtellen. Dagegen ſeyen

$$x_\varkappa \text{ oder } x+\varkappa\cdot\partial x+\frac{\varkappa^2}{2!}\cdot\partial^2 x+\cdots,$$

$$y_\varkappa \text{ oder } y+\varkappa\cdot\partial y+\frac{\varkappa^2}{2!}\cdot\partial^2 y+\cdots$$

und

$$z_\varkappa \text{ oder } z+\varkappa\cdot\partial z+\frac{\varkappa^2}{2!}\cdot\partial^2 z+\cdots$$

---

chen ſind, in denen bei der in der Note zu (I.) betrachteten Bewegung der Atom mit einer und derſelben Geſchwindigkeit ankommt.

die zu demſelben t gehörigen Koordinaten der nächſten Nachbar-Kurven, welche der Atom noch hätte beſchreiben können; weshalb $\varkappa$ unendlich-klein gedacht werden ſoll, während $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$, $\delta^2 x$, ꝛc. ꝛc. ganz beliebig gedacht ſind, nur ſo, daß ſie für die Anfangs- und End-Werthe der Zeit der Null gleich werden, weil in dieſen Grenz-Punkten die Bahn, und dieſe nächſten Nachbar-Kurven zuſammenlaufen ſollen; ferner noch ſo, daß, wenn der Atom gezwungen ſeyn ſollte, in einer gegebenen Fläche $L_{x,y,z} = 0$ zu bleiben, auch dieſe nächſten Nachbar-Kurven in derſelben Fläche L liegen, alſo auch noch $L_{x_\varkappa, y_\varkappa, z_\varkappa} = 0$,

$$\text{d. h. } L_\varkappa \text{ oder } L + \varkappa \cdot \delta L + \frac{\varkappa^2}{2!} \cdot \delta^2 L + \cdots = 0,$$

folglich auch $\delta L$, d. h.

$$3) \qquad \partial L_x \cdot \delta x + \delta L_y \cdot \delta y + \partial L_z \cdot \delta z = 0$$

iſt.

Denkt man ſich nun dieſe Werthe $x_\varkappa$, $y_\varkappa$, $z_\varkappa$ ſtatt x, y, z ſubſtituirt, ſo gehen $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$, $\delta s$, v in $(\delta x)_\varkappa$, $(\delta y)_\varkappa$, $(\delta z)_\varkappa$, $(\delta s)_\varkappa$, $v_\varkappa$ über, und dieſe Funktionen von $\varkappa$ laſſen ſich in Reihen verwandeln nach Potenzen von $\varkappa$, deren Koeffizienten bezüglich durch $\delta\delta x$, $\delta\delta y$, $\delta\delta z$, $\delta\delta s$, $\delta v$ ꝛc. ꝛc, bezeichnet werden, genau nach dem obigen für $x_\varkappa$, $y_\varkappa$, $z_\varkappa$, $L_\varkappa$ gegebenen Muſter.

Die Gleichung (2.) giebt dann nach der Variations-Rechnung (Analyſ. §. 54. — 56.), d. h. nach dem Maclaurinſchen Lehrſatze (Analyſ. §. 19.)

$$\delta(v^2) = 2v \cdot \delta v = 2(\partial f_x \cdot \delta x + \partial f_y \cdot \delta y + \partial f_z \cdot \delta z),$$

oder, weil wegen (1.) $\partial f_x = X$, $\partial f_y = Y$, $\partial f_z = Z$ iſt,

$$4) \qquad v \cdot \delta v = X \cdot \delta x + Y \cdot \delta y + Z \cdot \delta z.$$

Weil aber aus den Gleichungen $(\odot_1)$ und $(\odot_2)$ des §. 37.) wenn man die jedesmaligen 3 Gleichungen bezüglich mit $\delta x$, $\delta y$ und $\delta z$ multiplizirt, und die Reſultate addirt,

$$5) \quad X \cdot \delta x + Y \cdot \delta y + Z \cdot \delta z = \partial^2 x \cdot \delta x + \partial^2 y \cdot \delta y + \partial^2 z \cdot \delta z$$

hervorgeht *), ſo geht die (4.) über in

*) In dem Falle der $(\odot_2)$ erhält man rechts auch noch
$$-R \cdot (\cos\lambda \cdot \delta x + \cos\mu \cdot \delta y + \cos\nu \cdot \delta z).$$

6) $v \cdot \delta v = \partial^2 x \cdot \delta x + \partial^2 y \cdot \delta y + \partial^2 z \cdot \delta z.$

Diese andere Gleichung

$$v^2 = \partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2,$$

wenn man in ihr dieselben Werthe der nächsten Nachbar-Kurven setzt, giebt

$$\delta(v^2) = 2v \cdot \delta v = 2 \cdot (\partial x \cdot \delta \partial x + \partial y \cdot \delta \partial y + \partial z \cdot \delta \partial z),$$

oder

7) $v \cdot \delta v = \partial x \cdot \partial(\delta x) + \partial y \cdot \partial(\delta y) + \partial z \cdot \partial(\delta z),$

in so ferne die durch $\delta \partial x$, $\delta \partial y$, $\delta \partial z$ bezeichneten Koeffizienten der für $(\partial x)_\varkappa$, $(\partial y)_\varkappa$, $(\partial z)_\varkappa$ existirenden Reihen in der That nichts anders sind als $\partial(\delta x)$, $\partial(\delta y)$ und $\partial(\delta z)$, sobald man diese Reihen wirklich herstellt.

Addirt man nun die Gleichungen (6. u. 7.) zu einander, so erhält man, weil nach (Analyf. §. 9.)

$$\partial^2 x \cdot \delta x + \partial x \cdot \partial \delta x = \partial(\partial x \cdot \delta x)$$

u. f. w. ist,

8) $2v \cdot \delta v$ oder $\delta(v^2) = \partial(\partial x \cdot \delta x + \partial y \cdot \delta y + \partial z \cdot \delta z),$

d. h.

9) $\int_{t'\div 0} \delta(v^2) \cdot dt = [\partial x \cdot \delta x + \partial y \cdot \delta y + \partial z \cdot \delta z)]_{t'\div 0},$

wo $t'$ die Zeit für den Endpunkt $(x', y', z')$ vorstellt, und wo rechts in $\partial x \cdot \delta x + \partial y \cdot \delta y + \partial z \cdot \delta z$ zuerst $t'$, dann 0 statt t zu setzen, das letztere aber vom erstern zu subtrahiren ist. Weil aber, nach der Voraussetzung, für diese beiden Grenz-Werthe von t, die Werthe von $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$ allemal Null werden, so findet sich also

10) $\int_{t'\div 0} \delta(v^2) \cdot dt$ oder $\delta \int_{t'\div 0} v^2 \cdot dt = 0.$

Aber eben deshalb ist nach (Analyf. §. 56.)

$\int_{t'\div 0} v^2 \cdot dt$ ein Maximum oder Minimum.

---

Weil aber $\cos\lambda = \frac{\partial L_x}{W}$, $\cos\mu = \frac{\partial L_y}{W}$, $\cos\nu = \frac{\partial L_z}{W}$ ist, so wird dieser Theil

$$= -\frac{R}{W} \cdot (\partial L_x \cdot \delta x + \partial L_y \cdot \delta y + \partial L_z \cdot \delta z);$$

und dieser ist in demselben Falle nach (3.) allemal der Null gleich.

Bei der freien Bewegung findet übrigens offenbar das Minimum allein statt, da die Nachbar-Kurven unbeschränkt sind, also auch so gewählt werden können, daß für sie $\int v \cdot ds$ größer wird.

Dieser Satz, daß $\int_{t' \div 0} v^2 \cdot dt$, oder $\int_{t' \div 0} \partial s^2 \cdot dt$, oder $\int_{s' \div 0} v \cdot ds$ (wenn $s'$ den zu $t = t'$ gehörigen Werth von $s$ vorstellt) allemal ein Maximum oder Minimum ist, ist ein spezieller Fall eines allgemeinen Gesetzes, welches das Gesetz der kleinsten Wirkung genannt wird (principe de la moindre action).

V. Ist $X = Y = Z = 0$, d. h. wirken gar keine stetig wirkenden Kräfte, so ist nach (II.) $v$ konstant; also ist dann $\int_{t' \div 0} v^2 \cdot dt = v^2 \cdot t'$, $\int_{s' \div 0} v \cdot ds = v \cdot s'$ (auch noch $s' = v \cdot t'$); also sind dann $v^2 \cdot t'$, folglich auch $t'$, und $v \cdot s'$, folglich auch $s'$, selbst Maxima oder Minima, d. h. die Bahn, die der Atom frei oder in einer gegebenen Fläche $L = 0$ beschreibt, ist dann so, daß sie unter allen, zwischen denselben End-Punkten liegenden nächsten Nachbar-Kurven die längste oder die kürzeste ist, und auch in der kürzesten Zeit beschrieben wird.

Giebt man z. B. in einer Hohl-Kugel dem Atom an irgend einer Stelle A in irgend einer Richtung eine Geschwindigkeit $v$, und läßt man weiter gar keine Kraft wirken (also namentlich auch nicht die Schwere), so wird der Atom bis zu einem zweiten gegebenen Punkt B hin allemal den größten Kreis der Kugel beschreiben, weil solcher unter allen Wegen von A bis B auf der Kugel der größeste oder der kleinste ist, und zwar der größeste, wenn er den Bogen AB beschrieben hat, welcher größer als der Halbkreis ist, und der kleinste, wenn er den Ergänzungs-Bogen AB durchlaufen hat. Das eine oder das andere hängt aber von der Richtung der Anfangs-Geschwindigkeit ab.

---

## Zweiter Abschnitt.

### Freie krummlinige Bewegung in's Besondere.

### §. 40.

#### Erste Integrale für die freie krummlinige Bewegung im Raume.

Bei der freien Bewegung hat man zunächst die 3 Gleichungen (§. 37. $\odot_1$), nämlich

1) $\partial^2 x = X$, $\partial^2 y = Y$ und $\partial^2 z = Z$,

wo X, Y, Z Funktionen von x, y, z, $\partial x$, $\partial y$ und $\partial z$ seyn mögen. Gelingt es nun, diese Gleichungen nach (Analys. §. 53.) allgemein zu integriren, so erhält man 3 Ur-Gleichungen zwischen x, y, z und t, in welche nach und nach 6 willkührliche Konstanten eingehen, die eben so nach und nach, oder zuletzt auf einmal, aus den Anfangs-Werthen von x, y, z, $\partial x$, $\partial y$, $\partial z$ (für $t = 0$) ihre Bestimmung finden können (indem man nämlich zu den 3 Ur-Gleichungen noch 3 Differenzial-Gleichungen der ersten Ordnung nimmt, und in allen 6 Gleichungen nach und nach oder auf einmal $t = 0$, also die bekannten Anfangs-Werthe von x, y, z, $\partial x$, $\partial y$, $\partial z$ statt letzterer setzt, wodurch man 6 Gleichungen erhält bloß zwischen den 6 Konstanten, so daß diese Konstanten daraus gefunden werden können).

Aus den 3 Ur-Gleichungen kann t eliminirt werden, und dann hat man 2 Gleichungen zwischen x, y, z; diese sind die Gleichungen der Bahn.

Aus x, y, z, wenn sie in t ausgedrückt sind, findet man leicht die Seiten-Geschwindigkeiten $\partial x$, $\partial y$ und $\partial z$, und daraus dann wieder

$$v = \sqrt{\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2},$$

d. h. die Geschwindigkeit v in der Richtung der Bahn, immer so wie sie zu Ende der Zeit t seyn wird.

Ist aber $X \cdot \partial x + Y \cdot \partial y + Z \cdot \partial z$ integrabel, und ist das

Integral davon $= f_{x,y,z}$, so hat man bereits das erste Integral ($\odot$ des §. 38. I.), nämlich

$$(\odot)\cdots \qquad v^2 - v^2 = 2(f_{x,y,z} - f_{\xi,\eta,\zeta}),$$

welches die Geschwindigkeit v augenblicklich giebt, wenn man nur die Anfangs-Geschwindigkeit v und die Koordinaten-Werthe des Anfangs- und End-Punktes hat.

Andere Integrale der Gleichungen (1.) sucht man sich auf folgende Art zu verschaffen. Man multiplizirt nämlich die zweite der Gleichungen (1.) mit x, die erstere derselben mit y und subtrahirt die Resultate von einander. Dies giebt die erstere der 3 Gleichungen

$$2) \qquad \left.\begin{array}{rcl} y\cdot\partial^2 x - x\cdot\partial^2 y &=& X\cdot y - Y\cdot x \\ x\cdot\partial^2 z - z\cdot\partial^2 x &=& Z\cdot x - X\cdot z \\ z\cdot\partial^2 y - y\cdot\partial^2 z &=& Y\cdot z - Z\cdot y \end{array}\right\},$$

während die beiden andern auf analogem Wege gefunden werden. Nimmt man nun von diesen 3 Gleichungen links und rechts die Integrale nach t, so erhält man

$$(\mathfrak{C})\cdots \left.\begin{array}{rcl} y\cdot\partial x - x\cdot\partial y &=& \int(X\cdot y - Y\cdot x)\cdot dt \\ x\cdot\partial z - z\cdot\partial x &=& \int(Z\cdot x - X\cdot z)\cdot dt \\ z\cdot\partial y - y\cdot\partial z &=& \int(Y\cdot z - Z\cdot y)\cdot dt \end{array}\right\}^*).$$

Diese Integrale sind aber für unsern Zweck nur dann brauchbar, wenn die Ausdrücke zur Rechten integrabel sind, d. h. sich finden lassen, ohne daß diejenigen Funktionen von t bekannt zu

---

*) Eliminirt man aus den beiden erstern der Gleichungen (2.) den Ausdruck $\partial^2 x$, so erhält man die dritte. Also sind die 3 Gleichungen (2.) eigentlich nur 2 verschiedene Gleichungen; deshalb sind aber auch die Integrale ($\mathfrak{C}$) nur als 2 Integrale anzusehen, so daß je 2 derselben genommen werden können, während die beiden willkührlichen Konstanten, welche rechts eingehen, aus 2 Bedingungen der Aufgabe ihre Bestimmung erhalten. Nimmt man immer 2 andere dieser Integrale ($\mathfrak{C}$), nennt man dabei die rechts eingehenden Konstanten c, c', c'', und bestimmt man sie paarweise, so erscheinen c, c', c'' als Funktionen der beiden Elemente, aus denen sie bestimmt werden, und es muß daher zwischen c, c', c'' eine Gleichung der Abhängigkeit existiren, wenn alle 3 Integrale ($\mathfrak{C}$) derselben Bewegung angehören, also in dieser Beziehung sich nirgends widersprechen sollen.

seyn brauchen, welche durch x, y, z vorgestellt sind (vergl. Analysis §§. 43. 44.).

Findet das Integral (⊙ des §. 38. I.) zugleich mit den hiesigen Integralen (☾) statt, so hat man, da die 3 letzten nicht von einander unabhängig sind, zusammen so viel als 3 Differenzial-Gleichungen der ersten Ordnung, welche als eben so viel erste Integrale der Gleichungen (I.) der Bewegung angesehen werden können. Man muß dann versuchen diese 3 Gleichungen auf's neue zu integriren, wenn man die Ur-Gleichungen haben will. Dazu ist es zuweilen gut, neue Veränderliche, z. B. Polar-Koordinaten statt der rechtwinklichen, einzuführen.

Findet aber dieses Integral (⊙ des §. 38. I.) oder finden die Integrale (☾) nicht statt, so müßte man sogleich die Gleichungen der zweiten Ordnung auf anderen Wegen, namentlich mittelst des Verfahrens des (§. 53. Analys.), und dann immer noch mit Zuziehung aller übrigen Hilfsmittel, als z. B. der Einführung neuer Veränderlichen u. dgl., zu integriren suchen.

## §. 41.

### Freie Bewegung in der Ebene.

I. Alle zu Ende einer jeden Zeit t auf den Atom stetig wirkenden Kräfte lassen sich allemal nach (§. 17.) in eine einzige $\varphi \cdot dt$ vereinigen. Ist nun die Richtung dieser Kraft $\varphi \cdot dt$ zu jeder Zeit t in einer und derselben Ebene, in welcher sich auch die Richtung der Anfangs-Geschwindigkeit befindet, so hat man, wenn die Axen der x und y in derselben Ebene genommen werden, nothwendig

$$Z = 0;$$

folglich giebt die dritte Gleichung der Bewegung, nämlich

$$\partial^2 z = Z = 0$$

sogleich, wenn man sie zweimal hinter einander integrirt,

$$\partial z = c \quad \text{und} \quad z = c \cdot t + c',$$

wo c und c' zwei zu bestimmende Konstanten sind.

Weil aber die Seiten-Geschwindigkeit $\partial z$ zu Anfange, wo

$t = 0$ ist, ebenfalls Null ist, der Voraussetzung zu Folge, so giebt dies

$$c = 0, \quad \text{also} \quad z = c';$$

und weil zu Anfange, wo $t = 0$ ist, auch $z = 0$ ist, ebenfalls der Voraussetzung zu Folge, so hat man noch

$$c' = 0, \quad \text{also für jedes } t, \quad z = 0;$$

d. h. die Bahn ist dann einfach gekrümmt und liegt mit allen ihren Punkten in derselben Ebene der x und y.

In diesem Falle bleiben also nur noch die beiden Gleichungen der Bewegung

$$(\odot_1) \cdots \quad \partial^2 x = X \quad \text{und} \quad \partial^2 y = Y,$$

welche jetzt die gesammte Theorie dieser freien krummlinigen Bewegung in sich schließen.

Wird z. B. ein Atom geworfen in beliebiger Richtung AD (Fig. 34.), welche mit der vertikalen AY, die wir zur Ordinaten-Axe nehmen, der Bezeichnung des (§. 35.) gemäß den Winkel b macht, so geht der Atom aus der Ebene DAY nicht heraus. Nimmt man nun in derselben Ebene DAY noch AX horizontal und zur Abscissen-Axe, so daß nach der Bezeichnung des (§. 35.) W. $DAX = a$ ist, so hat man $X = 0$ und $Y = -g$; und die Gleichungen $(\odot_1)$ werden daher dasmal

1) $\partial^2 x = 0$ und 2) $\partial^2 y = -g.$

Integrirt man die erstere dieser beiden Gleichungen zweimal hinter einander nach t, so erhält man

$$\partial x = C, \quad x = C \cdot t + C',$$

während für $t = 0$, $\partial x = v \cdot \cos a$, und $x = 0$, also

$$C = v \cdot \cos a \quad \text{und} \quad C' = 0$$

werden muß, so daß man

3) $$x = v \cdot t \cdot \cos a$$

hat. — Die (2.) integrirt, giebt

$$\partial y = -g \cdot t + C'' \quad \text{und} \quad y = -\tfrac{1}{2} g \cdot t^2 + C'' \cdot t + C''',$$

während für $t = 0$, $\partial y = v \cdot \cos b = v \cdot \sin a$ und $y = 0$, also $C'' = v \cdot \sin a$ und $C''' = 0$ wird, so daß man

4) $$y = -\tfrac{1}{2} g \cdot t^2 + v \cdot t \cdot \sin a$$

erhält.

Die beiden Gleichungen (3. u. 4.) geben nun zu jeder Zeit t die zugehörigen Koordinaten-Werthe x und y. Eliminirt man aber aus ihnen den Buchstaben t, so erhält man

5) $$y = -\frac{g}{2v^2 \cdot \cos\alpha^2} \cdot x^2 + x \cdot tg\,\alpha \text{ *).}$$

Dies ist also die Gleichung der Bahn, und diese Bahn ist nach (§. 8. Geom.) eine Parabel **).

II. In dem Falle der Bewegung in einer Ebene wird auch das Integral (§. 38. I. ⊙.) etwas einfacher, nämlich so:

$$(\odot)\cdots\ v^2 - v^2 = 2\int_{t\ldots 0} (X \cdot \partial x + Y \cdot \partial y) \cdot dt,$$

oder

$$= 2(f_{x,y} - f_{r,v}),$$

wo

$$v^2 = \partial x^2 + \partial y^2 \text{ und } \int (X \cdot \partial x + Y \cdot \partial y) \cdot dt = f_{x,y}$$

ist.

Statt der 3 Integrale (§. 40. ℂ.) bekommt man ferner jetzt nur das einzige

$$(\mathbb{C})\cdots\ y \cdot \partial x - x \cdot \partial y = \int (X \cdot y - Y \cdot x) \cdot dt,$$

wenn $X \cdot y - Y \cdot x$ integrabel ist.

Finden also diese jetzigen beiden Integrale (⊙ und ℂ statt (wobei $\partial x^2 + \partial y^2$ statt $v^2$ gedacht werden muß), so hat man zwei Differenzial-Gleichungen der ersten Ordnung zwischen x, y und t, die nun noch einmal integrirt werden müssen.

---

*) Wäre die Anfangs-Geschwindigkeit v unter den Horizont gerichtet gewesen, so wäre $\cos b = -\sin\alpha$ geworden; dann müßte statt $\sin\alpha$, $tg\,\alpha$ überall $-\sin\alpha$, $-tg\,\alpha$, oder, welches in der Rechnung auf dasselbe hinaus läuft, $-\alpha$ statt $\alpha$ gesetzt, d. h. $\alpha$ negativ in Rechnung gebracht werden.

**) So fliegt also eine Kanonen-Kugel, wenn man weder Widerstand der Luft noch sonst eine weitere Behinderung (also auch nicht Reibung der sich drehenden Kugel mit der Luft) voraussetzt.

Die Gleichungen (1. u. 2.) ließen sich dasmal jede für sich und unabhängig von der andern integriren, weil die (1.) kein y, die (2.) kein x in sich aufgenommen hatte. Dasmal sind also die Wege der Projektionen $M_1$ und $M_2$ von einander ganz unabhängig, und die End-Resultate genau dieselben, wie wenn $M_1$ bloß horizontal mit der Kraft $v \cdot \cos\alpha$ gestoßen worden wäre, so daß die horizontale und konstante Bewegung $x = v \cdot t \cdot \cos\alpha$ eintritt; dagegen $M_2$ bloß vertikal in die Höhe geworfen worden wäre mit der Geschwindigkeit $v \cdot \sin\alpha$, so daß die gleichförmig verzögerte vertikale Bewegung $y = v \cdot t \cdot \sin\alpha - \frac{1}{2} g \cdot t^2$ des (Beisp. 2. zu §. 33.) statt findet.

In dem vorstehenden (Beispiel zu I.) wird dieses Integral (⊙) folgendes, nämlich

$$v^2 - v_0^2 = -2g \cdot y, \quad \text{oder} \quad v = \sqrt{v_0^2 - 2g \cdot y};$$

diese Gleichung giebt also die Geschwindigkeit $v$, wie solche in jeder Höhe $y$ der Bewegung statt hat. In gleichen Höhen der paraboliſchen Bahn findet also ein und dieselbe Geschwindigkeit $v$ statt *).

Das Integral (ℂ) findet dagegen bei dieser Bewegung gar nicht statt; denn die Gleichung (ℂ) wird dasmal

$$y \cdot \partial x - x \cdot \partial y = \int gx \cdot dt,$$

und ist zwar eine richtige Gleichung aber kein Integral, weil der Ausdruck rechts nicht integrirt werden kann, bevor nicht $x$ in $t$ schon ausgedrückt und gefunden worden ist.

III. Finden dagegen bei der Bewegung in der Ebene die beiden Integrale (II. ⊙ und ℂ) wirklich statt, so führe man Polar-Koordinaten $r$ und $\theta$ so ein, daß (Fig. 35.) während $SM_1 = x$, $MM_1 = y$ ist, W. $X'SM = \theta$ **) und $SM = r$ (der Radius-Vektor) wird; und man hat dann

1) $x = -r \cdot \cos\theta$ und 2) $y = r \cdot \sin\theta$,

also

3) $r^2 = x^2 + y^2$.

Ferner hat man, wenn diese Gleichungen (1. und 2.) differenziirt werden,

4) $\partial x = -\partial r \cdot \cos\theta + r \cdot \sin\theta \cdot \partial\theta$

und

5) $\partial y = \partial r \cdot \sin\theta + r \cdot \cos\theta \cdot \partial\theta$;

und somit Gleichungen genug, um aus den obigen Integralen (II. ⊙. und ℂ) $x$, $y$, $\partial x$ und $\partial y$ eliminiren zu können. Dadurch gehen diese Gleichungen (⊙ und ℂ), da jetzt

6) $v^2$ oder $\partial x^2 + \partial y^2 = \partial r^2 + r^2 \cdot \partial\theta^2$

wird, über in

---

*) Das Allgemeinere über diese Thatsache ist im (§. 39.) noch einmal nachzulesen.

**) Man übersehe ja nicht, daß wenn wir hier Winkel in Rechnung bringen, wir solche nie in Graden ausdrücken, sondern allemal durch die Länge des, zwischen ihren Schenkeln mit dem Radius 1 beschriebenen Bogen, in Zahlen ausgerechnet. So bedeutet also hier oben $\theta$ den für den Radius 1 ausgerechneten Kreisbogen, welcher zwischen den Schenkeln des Winkels $X'SM$ beschrieben werden kann.

$$(A)\cdots\quad \partial r^2 + r^2\cdot\partial\theta^2 = v^2 + 2\int_{t\div 0}(X\cdot\partial x + Y\cdot\partial y)\cdot dt,$$

$$(B)\cdots\quad r^2\cdot\partial\theta = \int(X\cdot y - Y\cdot x)\cdot dt,$$

wo die Integrale zur Rechten natürlich auch in r und $\theta$ und in deren Anfangs-Werthe, die wir $r'$ und $\theta'$ nennen wollen, ausgedrückt werden müssen. Diese 2 Gleichungen (A. und B.) lassen sich aber öfter ohne zu große Schwierigkeit auf's neue integriren.

Als Beispiel hierzu dient die in den (§§. 42. und 43.) folgende Central-Bewegung; ferner die ganz spezielle Central-Bewegung der Planeten im (§. 49.).

IV. Bei der krummlinigen Bewegung in einer Ebene erscheinen noch einige Begriffe und Folgerungen, die wir hier gleich mittheilen müssen, obgleich dieselben auch bei der nicht freien Bewegung statt finden.

Zerlegt man nämlich die Geschwindigkeit $\partial s$ oder v, die allemal nach der Tangente MT der Bghn gerichtet ist, in zwei Seiten-Geschwindigkeiten, wovon die eine die Richtung SM (in ihrer Verlängerung MS') hat, die andere aber senkrecht auf SM steht (Fig. 35.), so finden sich hiese beiden Seiten-Geschwindigkeiten bezüglich

$$\partial r \quad \text{und} \quad r\cdot\partial\theta,$$

weil der Winkel TMS', welchen die Tangente MT mit dieser Richtung MS' macht, gerade so ist, daß wenn dr, $d\theta$, ds die in der Zeit dt gewonnenen Zuwachse von r, $\theta$, s sind, nach (§§. 6. 7. Geom.)

$$cos\,TMS' = \frac{dr}{ds}, \quad \text{und} \quad sin\,TMS' = \frac{r\cdot d\theta}{ds}$$

seyn muß, während nach (§. 21. Analys.)

$$dr = \partial r\cdot dt, \quad ds = \partial s\cdot dt \quad \text{und} \quad d\theta = \partial\theta\cdot dt$$

ist.

Dabei kann man sagen, daß die Richtung der Seiten-Geschwindigkeit $r\cdot\partial\theta$ mit der Tangente des Kreisbogens an M zusammenfällt, welcher aus S als Mittelpunkt mit SM = r als Radius beschrieben werden kann. Die Richtung dieser Seiten-

Geschwindigkeit $r \cdot \partial\theta$ fällt also auch mit dem Element dieses Kreisbogens an M (im Falle man den Kreis ebenfalls als eine (stetig) gebrochene Linie sich denkt) zusammen.

Den Differenzial-Koeffizienten $\partial\theta$, welcher die auf SM senkrechte Geschwindigkeit ausdrückt, die bei dieser Bewegung ein Punkt des Radius-Vektor SM oder r hat, der von S um die Einheit entfernt ist, nennt man die Winkel-Geschwindigkeit um S. — Die Winkel-Geschwindigkeit mit r multiplizirt, giebt die nach dem Element des, mit r beschriebenen Kreisbogens zerlegte wahre Geschwindigkeit um S. — Die letztere dagegen, durch r dividirt, giebt wiederum die Winkel-Geschwindigkeit.

Dabei ist S der Anfangs-Punkt der Koordinaten, also in der Ebene beliebig zu wählen.

Anmerk. Multiplizirt man die Gleichung (III. A.) mit $dt^2$, so hat man links, also auch rechts, das Quadrat des, in der unendlich-kleinen Zeit dt in der Bahn selbst beschriebenen Bogens MN, weil $(\partial r^2 + r^2 \cdot \partial\theta^2) \cdot dt^2 = \partial s^2 \cdot dt^2 = ds^2$ ist.

Multiplizirt man aber die Gleichung (III. B.) mit dt, so hat man links, also auch rechts, den in der unendlich-kleinen Zeit dt beschriebenen doppelten Sektor MSN, weil $\partial\theta \cdot dt = d\theta$ der Bogen für den Radius 1 ist, also $r \cdot d\theta$ der Bogen für den Radius r, folglich $\frac{1}{2} r^2 \cdot d\theta$ oder $\frac{1}{2} r^2 \cdot \partial\theta \cdot dt$ der Inhalt des Sektors MSN (vgl. Geom. §. 6.).

## §. 42.

### Central-Bewegung.

Einen hieher (zu §. 41.) gehörigen Fall der Bewegung in einer Ebene hat man in der Central-Bewegung. So nennt man nämlich die Bewegung, welche entsteht, wenn der Atom (Fig. 35.) etwa von A aus mit einer Anfangs-Geschwindigkeit v ausfährt, dann aber mit beliebiger Kraft $F \cdot dt$ stetig gegen einen festen Punkt S getrieben wird, welcher letztere das Centrum dieser Bewegung heißt. Die Kraft F heißt dabei die Central-Kraft.

I. Da dasmal nach (§. 41.) die Bahn in der Ebene liegen muß, welche durch die Richtung AD der Anfangs-Geschwindigkeit und durch das Centrum S gegeben ist, so lege man durch S in dieser Ebene zwei Axen SX und SY, auf welche die Koordinaten-Werthe $SM_1 = x$ und $MM_1 = y$ sich beziehen. Dann hat man, wenn $SM = r$ gesetzt wird,

1) $X = -F \cdot \frac{x}{r}$ und 2) $Y = -F \cdot \frac{y}{r}$,

oder

3) $X : Y = x : y$, d. h. $X \cdot y - Y \cdot x = 0$.

Dasmal wird also das Integral (§. 41. II. (( oder III. B.), nämlich

$$y \cdot \partial x - x \cdot \partial y \quad \text{oder} \quad r^2 \cdot \partial\theta = \int (X \cdot y - Y \cdot x) \cdot dt,$$

nun folgendes

$$((\cdots \qquad r^2 \cdot \partial\theta = c,$$

wo c eine willkührliche Konstante ist, welche noch näher bestimmt werden muß *).

---

*) Zur Bestimmung dieser Konstante c darf man nur $t = 0$ setzen. Es wird nämlich für $t = 0$, unter der Voraussetzung der Bezeichnung des (§. 35.),

$$x = \xi, \quad y = \eta, \quad \partial x = v \cdot \cos\mathfrak{a}, \quad \partial y = v \cdot \cos\mathfrak{b},$$

also auch, für $t = 0$,

$$r^2 \cdot \partial\theta = y \cdot \partial x - x \cdot \partial y = v \cdot (\eta \cdot \cos\mathfrak{a} - \xi \cdot \cos\mathfrak{b}).$$

Die Gleichung (( giebt daher für $t = 0$

$$c = v \cdot (\eta \cdot \cos\mathfrak{a} - \xi \cdot \cos\mathfrak{b}),$$

wodurch die Konstante c bestimmt ist.

Man kann aber diese Konstante c auch noch anders bestimmen. Stellen nämlich $r'$ und $\theta'$ die Anfangs-Werthe von r und $\theta$ vor, und bedenkt man, daß $r \cdot \partial\theta$ für $t = 0$ nach (§. 41. IV.) die in der, auf SA senkrechten Richtung AE zerlegte Anfangs-Geschwindigkeit ist, so findet sich für $t = 0$, weil W. DAH $= \mathfrak{a}$, W. X'SA = W. SAH $= \theta'$, also W. DAE $= \mathfrak{a} + \theta' - \frac{1}{2}\pi$ ist,

$$r \cdot \partial\theta = v \cdot \cos(\mathfrak{a} + \theta' - \tfrac{1}{2}\pi) = v \cdot \sin(\mathfrak{a} + \theta'),$$

also $\quad c = r^2 \cdot \partial\theta$ (für $t = 0$) $= r' \cdot v \cdot \sin(\mathfrak{a} + \theta')$,

in welcher Gleichung jedoch $\mathfrak{a}$ negativ in Rechnung gebracht werden muß, wenn AD' statt AD die Richtung der Anfangs-Geschwindigkeit v seyn sollte; wie die neue Rechnung dann ausweist.

Vermöge (§. 41. Anmerk.) geht aus diesem Resultate für die Central-Bewegung hervor:

Erstens der in der Zeit dt von r beschriebene Sektor MSN ist allemal $= \frac{1}{2}c \cdot dt$, also allemal gleich groß, wie groß oder klein auch t oder $\theta$ seyn mag.

Zweitens der Radius-Vektor beschreibt also überhaupt in gleichen Zeiten gleiche Sektoren, oder die in verschiedenen Zeiten beschriebenen Sektoren verhalten sich wie diese Zeiten.

Man nennt diese Eigenschaft der Central-Bewegung das Gesetz der Inhalte (principe d'aires) *).

Denkt man sich außer der Ebene der Bahn durch S noch eine Ebene E gelegt, auf welche letztere die Bahn, nebst den in den verschiedenen Zeiten beschriebenen Sektoren projizirt gedacht werden, so folgt unmittelbar aus (Geom. §. 2. III.)

drittens, daß auch die durch die Projektion des Radius-Vektor beschriebenen Sektoren sich wie die dazu verwandten Zeiten verhalten.

Dasselbe ergiebt sich aber auch direkt aus (§. 40.), wenn man anfänglich nicht darauf Rücksicht nimmt, daß die Bahn eben seyn muß, wie wir sogleich näher nachweisen wollen.

II. Legt man nämlich durch S drei beliebige, aber auf einander senkrechte Koordinaten-Axen, setzt man aber wieder SM = r,

*) Umgekehrt, so oft bei einer Bewegung dieses Gesetz der Inhalte statt findet, so oft ist

$$r^2 \cdot \partial\theta \quad \text{oder} \quad y \cdot \partial x - x \cdot \partial y = \text{Konstante};$$

demnach, wenn man differenziirt,

$$y \cdot \partial^2 x - x \cdot \partial^2 y = 0,$$

also auch

$$Y \cdot x - X \cdot y = 0 \quad \text{oder} \quad X : Y = x : y.$$

So oft aber diese Proportion statt findet, so oft wirkt die einzige Kraft, welche aus der Vereinigung von X und Y hervorgeht, stets in der Richtung SM (ob von M nach S, oder von S nach M, bleibt unbestimmt).

Wenn daher Kepler bei den Planeten-Bewegungen um die Sonne, letztere als fest gedacht, dieses Gesetz der Inhalte a posteriori entdeckt und hingestellt hat, so konnte die vorstehende Betrachtung zu der Annahme führen, daß die stetig wirkende Kraft, welche den Planeten in seiner Bahn hält, allemal in der Richtung wirkt, welche die Sonne und den Planeten in jedem Augenblicke mit einander verbindet.

so ist in den Formeln des (§. 40.), welche nun angewandt werden müssen,

$$X = -F\cdot\frac{x}{r},\quad Y = -F\cdot\frac{y}{r}\quad \text{und}\quad Z = -F\cdot\frac{z}{r},$$

also

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z}{z},$$

d. h. $Y\cdot x - X\cdot y = X\cdot z - Z\cdot x = Z\cdot y - Y\cdot z = 0.$

Die 3 Integrale (ℭ des §. 40.) geben daher jetzt

$$(\mathfrak{C})\cdots \left\{\begin{array}{l} y\cdot\partial x - x\cdot\partial y = c \\ x\cdot\partial z - z\cdot\partial x = c' \\ z\cdot\partial y - y\cdot\partial z = c'' \end{array}\right\}.$$

Da nun die Ausdrücke links, wenn man sie mit dt multiplizirt, nach (§. 41. Anmerk.) nichts weiter sind, als die doppelten Inhalte der in der Zeit dt mit der Projektion von r auf den drei Koordinaten-Ebenen beschriebenen Sektoren, so folgt die dritte Behauptung in (I.) für jede der 3 Koordinaten-Ebenen aus den Gleichungen (ℭ) unmittelbar.

Umgekehrt: verhalten sich bei irgend einer Bewegung, die von der Projektion des Radius-Vektor beschriebenen Sektoren, wie die dazu verwandten Zeiten, und zwar in Bezug auf 3 Koordinaten-Ebenen, so wirkt die stetige Kraft beständig in der Richtung, welche den bewegten Atom in jedem Augenblicke mit dem Punkte S verbindet, d. h. die Bewegung ist eine Central-Bewegung.

Denn es finden der Voraussetzung gemäß die 3 Gleichungen (ℭ) statt. Differenziirt man nun selbige, so erhält man

$$\begin{aligned} y\cdot\partial^2 x - x\cdot\partial^2 y &= 0 \\ x\cdot\partial^2 z - z\cdot\partial^2 x &= 0 \\ z\cdot\partial^2 y - y\cdot\partial^2 z &= 0, \end{aligned}$$

also ist auch nach (§. 40. Nr. 2.)

$$Y\cdot x - X\cdot y = 0,\quad X\cdot z - Z\cdot x = 0,\quad Z\cdot y - Y\cdot z = 0,$$

d. h.

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z}{z},$$

weshalb die Richtung der aus X, Y, Z hervorgehenden einzigen Kraft, den Resultaten des (§. 15.) gemäß, mit der Richtung SM zusammenfallen muß.

Eliminirt man aus den 3 Gleichungen (ℭ) sowohl ∂x, als

auch $\delta y$, so fällt $\delta z$ von selbst mit heraus, und man erhält die Gleichung

$$1) \qquad c \cdot z + c' \cdot y + c'' \cdot x = 0.$$

Da diese Gleichung nach (§. 11. Geom.), wenn man sich x und y ganz beliebig denken wollte, die Gleichung einer Ebene wäre, so ist die Bahn ganz in dieser Ebene; und die Gleichung (1.) bestimmt die Lage dieser Ebene der Bahn gegen die Koordinaten-Ebenen.

Da für $t = 0$, $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$ bezüglich die Anfangs-Geschwindigkeiten $v \cdot \cos \mathfrak{a}$, $v \cdot \cos \mathfrak{b}$, $v \cdot \cos \mathfrak{c}$ sind, so wie x, y, z dann durch $\xi$, $\eta$, $\zeta$ gegeben seyn sollen (§. 35.), so folgt, wenn man in den Gleichungen (() $t = 0$ setzt, sogleich

$$2) \qquad \left.\begin{array}{l} v \cdot (\eta \cdot \cos \mathfrak{a} - \xi \cdot \cos \mathfrak{b}) = c \\ v \cdot (\xi \cdot \cos \mathfrak{c} - \zeta \cdot \cos \mathfrak{a}) = c' \\ v \cdot (\zeta \cdot \cos \mathfrak{b} - \eta \cdot \cos \mathfrak{c}) = c'' \end{array}\right\};$$

wodurch die Konstanten c, c' und c'' bestimmt sind, während zwischen c, c', c'' noch die Gleichung (1.) für $t = 0$, nämlich

$$3) \qquad c \cdot \zeta + c' \cdot \eta + c'' \cdot \xi = 0$$

statt finden muß, welche man auch aus den Gleichungen (2.) erhält, wenn man $\cos \mathfrak{a}$ und $\cos \mathfrak{b}$ eliminirt, wobei $\cos \mathfrak{c}$ von selbst fortfällt.

Eliminirt man aber aus den 3 Gleichungen (2.) $\xi$ und $\eta$, so fällt auch $\zeta$ von selbst weg, und man hat noch

$$4) \qquad c \cdot \cos \mathfrak{c} + c' \cdot \cos \mathfrak{b} + c'' \cdot \cos \mathfrak{a} = 0.$$

Weiß man übrigens jetzt, daß die Bahn eben ist, so fragt sich noch, ob die Richtung AD der Anfangs-Geschwindigkeit v, welche mit den Axen die Winkel $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, macht, in derselben Ebene (1.) liegt. Zu dem Ende denke man sich einen beliebigen Punkt in der Richtung dieser Anfangs-Geschwindigkeit, bezeichne seine Koordinaten-Werthe durch $x'$, $y'$, $z'$, und setze noch

$$\sqrt{(x' - \xi)^2 + (y' - \eta)^2 + (z' - \zeta)^2} = W,$$

so hat man nach (§. 12. Geom.)

$$\cos \mathfrak{c} = \frac{z' - \zeta}{W}, \quad \cos \mathfrak{b} = \frac{y' - \eta}{W} \quad \text{und} \quad \cos \mathfrak{a} = \frac{x' - \xi}{W}.$$

Substituirt man nun diese Werthe in die Gleichung (4.), multiplizirt man das Resultat mit W. weg, und denkt man daran, daß $-c \cdot z - c' \cdot y - c'' \cdot x = 0$ ist nach (3.), so erhält man

$$c \cdot z' + c' \cdot y' + c'' \cdot x' = 0;$$

also genügt der Punkt $(x', y', z')$ wirklich der Gleichung der Ebene (1.), in welcher die Bahn liegt. Folglich liegt die Richtung der Anfangs-Geschwindigkeit in derselben Ebene (1.).

Sind aber $\frac{1}{2}c \cdot dt$, $\frac{1}{2}c' \cdot dt$ und $\frac{1}{2}c'' \cdot dt$ die in der Zeit dt auf den 3 Koordinaten-Ebenen durch die Projektionen des Radius-Vektor beschriebenen Sektoren, also die Projektionen des in der Ebene der Bahn in derselben Zeit dt von dem Radius-Vektor beschriebenen Sektors, so ist letzterer nach (§. 2. IV. Geometrie)

$$= \tfrac{1}{2} \cdot \sqrt{c^2 + c'^2 + c''^2} \cdot dt = \tfrac{1}{2} C \cdot dt,$$

wenn $$\sqrt{c^2 + c'^2 + c''^2} = C$$

gesetzt wird. — Daraus folgt aber, daß das Gesetz der Projektionen auch für den in der Ebene der Bahn selbst beschriebenen Sektor gilt, daß nämlich diese Sektoren in der Ebene der Bahn sich verhalten, wie die zu ihrer Beschreibung verwandten Zeiten, alles so, wie wir dieses in (I.) schon erfahren haben.

Endlich folgt noch aus (§. 2. III. Geom.), daß

$$\frac{c}{C}, \quad \frac{c'}{C}, \quad \frac{c''}{C}$$

die Kosinus der Winkel sind, welche die Ebene der Bahn mit den 3 Koordinaten-Ebenen macht.

Zuletzt aber, wenn man sich durch diese Rechnungen überzeugt hat, daß die Bahn eine ebene Kurve ist, und wenn man die Lage dieser Ebene selbst gegen die Koordinaten-Ebenen gefunden hat, verlegt man die Koordinaten-Axen der x und y in diese Ebene und kommt so zur Betrachtung (I.) zurück.

## §. 43.

### Spezielle Central-Bewegung.

Betrachten wir nun die Aufgabe des vorstehenden (§. 42.), also die Central-Bewegung, mit der besondern Einschränkung, daß

die stetig wirkende (Central-) Kraft F eine bloße Funktion des Radius-Vektor r ist, d. h. eine bloße Funktion der jedesmaligen Entfernung des Atoms vom Centro S der Bewegung (ohne daß in F noch $\theta$ oder t explizit vorkäme). In diesem Falle hat man, wenn die Axen der x und der y durch S gelegt und in der Ebene der Bahn gedacht werden, die beiden Gleichungen der Bewegung

$$1)\ \partial^2 x = X = -F_r \cdot \frac{x}{r} \quad \text{und} \quad 2)\ \partial^2 y = Y = -F_r \cdot \frac{y}{r};$$

und es ist dann, weil $r^2 = x^2 + y^2$, also $r \cdot \partial r = x \cdot \partial x + y \cdot \partial y$ ist,

$$\int (X \cdot \partial x + Y \cdot \partial y) \cdot dt = -\int (F_r \cdot \partial r) \cdot dt = -\int F_r \cdot dr.$$

(Vergl. Anmerk. 3. zu §. 38.) Daher findet nun auch das Integral (II. ⊙ oder III. A. des §. 41.) statt, nämlich, wenn $r'$ der Anfangs-Werth von r ist,

$$(\odot) \cdots \quad v^2 = \partial r^2 + r^2 \cdot \partial\theta^2 = v^2 - 2\int_{r'}^{r} F_r \cdot dr,$$

während das andere Integral nach (§. 42.) nämlich

$$(\mathfrak{C}) \cdots \quad r^2 \cdot \partial\theta = c$$

bereits gefunden ist.

Diese beiden Differenzial-Gleichungen (⊙ und $\mathfrak{C}$) der ersten Ordnung zwischen r, $\theta$ und t sind aber deshalb leichter zu integriren, weil sie nicht $\theta$ selbst enthalten, sondern, außer r und $\partial r$, nur $\partial\theta$. Deshalb kann man aus ihnen $\theta$ oder t ganz und vollständig eliminiren (mit allen Differenzial-Koeffizienten), ohne diese Gleichungen (⊙ oder $\mathfrak{C}$) noch einmal differenziiren zu müssen, wie dies letztere im Allgemeinen geschehen muß. (Vergl. das hieher gehörige Beispiel §. 49. 2te Aufgabe.)

Anmerk. Nimmt man die Central-Kraft mit der Entfernung r proportional, d. h. nimmt man $F_r = \mu \cdot r$, so ist es am bequemsten, von den ersten Gleichungen der Bewegung $\partial^2 x = X$ und $\partial^2 y = Y$ auszugehen, weil solche jetzt

$$\partial^2 x = -\mu x \quad \text{und} \quad \partial^2 y = -\mu y$$

werden, und einzeln, als lineare Gleichungen der zweiten Ordnung, nach (Analys. §. 53.) integrirt werden können. Die Bahn

wird eine Ellipse, und S zeigt sich als der Mittelpunkt dieser Ellipse.

Nimmt man die Kraft mit dem umgekehrten Quadrat der Entfernung proportional, also $F_r = \frac{\mu}{r^2}$, so hat man die (Aufgabe 2. des §. 49.), welche als hierher gehöriges Beispiel angesehen werden kann.

Nimmt man aber $F_r = \frac{\mu}{r^3}$, so läßt sich die Integration der Gleichungen ($\odot$ und $\mathbb{C}$ in endlicher Form auch noch durchsetzen. Nach Verschiedenheit der Anfangs-Geschwindigkeit, der Anfangs-Entfernung und der Größe von $\mu$, wird die Bahn unendliche Schenkel haben, oder eine Spirale werden. Im letztern Fall wird der Atom in unendlich-vielen Umläufen dem festen Punkt S immer näher und näher rücken, ihm unendlich nahe kommen, ohne ihn jedoch je zu erreichen.

## §. 44.

### Allgemeinere Aufgabe der freien Bewegung.

I. Bewegen sich zwei Atome O und O', der erstere von den Kräften X, Y, Z, der andere von den Kräften X', Y', Z' getrieben; sind ferner x, y, z die Koordinaten des erstern Atoms O, x', y', z' dagegen die Koordinaten des andern O', so hat man nach (§. 37. $\odot_1$) oder nach (§. 40.) für jeden dieser Atome die 3 Gleichungen der Bewegung, nämlich

1) $\partial^2 x = X$; 2) $\partial^2 y = Y$; 3) $\partial^2 z = Z$;

und

4) $\partial^2 x' = X'$; 5) $\partial^2 y' = Y'$; 6) $\partial^2 z' = Z'$.

Legt man nun durch O neue Axen parallel mit den alten, (welche also mit O zugleich sich bewegen, aber dabei immer parallel mit den alten, fest gedachten Axen bleiben); und nennt man die auf diese neuen Axen bezogenen Koordinaten-Werthe des andern Atoms O' bezüglich $x_1$, $y_1$ und $z_1$, so hat man nach (§. 1. Geom.)

$x' = x + x_1$, $y' = y + y_1$ und $z' = z + z_1$,

also auch

$\partial^2 x' = \partial^2 x + \partial^2 x_1$, $\partial^2 y' = \partial^2 y + \partial^2 y_1$ und $\partial^2 z' = \partial^2 z + \partial^2 z_1$.

Subtrahirt man daher von den Gleichungen (4. — 6.) bezüglich die Gleichungen (1. — 3.), so erhält man

7) $\partial^2 x_1 = X' - X$; 8) $\partial^2 y_1 = Y' - Y$

und

9) $\partial^2 z_1 = Z' - Z$;

und diese Gleichungen (7. — 9.) geben die Bewegung des Atoms O' um O; d. h. integrirt man sie und findet man aus ihnen $x_1$, $y_1$ und $z_1$ als Funktionen von t, so hat man zu jeder Zeit t den relativen Stand des Atoms O' gegen O; und eliminirt man aus den 3 Gleichungen zwischen $x_1$, $y_1$ und $z_1$ den Buchstaben t, so erhält man die beiden Gleichungen zwischen $x_1, y_1, z_1$, welche als die Gleichungen der Bahn des Atoms O' um O herum angesehen werden können *).

II. Sind die Kräfte X, Y, Z, welche den Atom O in seiner Bahn erhalten, nicht gegeben, sondern ist dagegen die ganze Bewegung des Atoms O bekannt, d. h. sind dagegen x, y, z als Funktionen von t bekannt, folglich auch $\partial^2 x$, $\partial^2 y$, $\partial^2 z$ bekannt, so wird man statt der Gleichungen (7. — 9.) die folgenden Gleichungen

10)

*) Denkt man sich nämlich die zusammengehörigen Koordinaten $x_1, y_1, z_1$ von einem festen Punkte aus parallel mit den festen Axen hingetragen, wie sie für die verschiedenen Werthe der Zeit t, oder wie sie zu den verschieden gedachten $x_1$ sich finden, so erhält man diejenige Kurve, welche man die Bahn von O' um O herum nennt. In der Wirklichkeit wird dieselbe von dem Atom O' nur dann beschrieben, wenn O fest liegt, also nicht beschrieben, wenn, wie hier vorausgesetzt worden, O selbst sich bewegt.

In diesem Sinne sagt man wohl, die Bahn des Mondes um die Erde sey eine Ellipse; eben so überhaupt, die Bahn der Trabanten um ihren Planeten sey elliptisch; obgleich die wirkliche Bahn des Mondes oder irgend eines Trabanten spiralförmig ist, und man von ihr nicht einmal behaupten kann, daß sie (nach 365 oder sonst einer Zahl von Tagen) in sich selbst zurückkehren müsse.

10) $\partial^2 x_1 = X' - \partial^2 x$; 11) $\partial^2 y_1 = Y' - \partial^2 y$;

12) $\partial^2 z_1 = Z' - \partial^2 z$

nehmen, welche man erhält, wenn man aus (1. — 3.) und (7. — 9.) die X, Y, Z eliminirt. Diese Gleichungen (10. — 12.) drücken nun die Bewegung des O' um O herum aus.

III. Die Formeln (7. — 9.) lehren noch, daß die Bewegung von O' um O ganz dieselbe bleibt, wenn von beiden Kräften X' und X, Y' und Y, Z' und Z, diejenigen außer Acht gelassen werden, welche auf beide Atome O und O' zugleich wirken und die (nach den Axen zerlegten Kräfte) X' und X, Y' und Y, endlich Z' und Z um gleich viel vermehren oder vermindern würden, weil letztere aus den Differenzen

$$X' - X, \quad Y' - Y, \quad Z' - Z$$

doch wieder herausfallen *).

---

## Dritter Abschnitt.

### Bewegung in einer gegebenen Fläche, und in bestimmt vorgeschriebener Bahn.

### §. 45.

#### Bewegung in gegebener Fläche oder Ebene.

I. Ist der Atom gezwungen auf einer gegebenen Fläche

1) $L_{x,y,z} = 0$

---

*) Wenn man z. B. Bewegungen auf der Erd-Oberfläche betrachtet, und auf feste Punkte der Erd-Oberfläche bezieht (z. B. bei dem Werfen der Bomben, ꝛc. ꝛc.), so kommt weder die tägliche Umdrehung der Erde um ihre Axe, noch die tägliche Bewegung der Erde um die Sonne in Betrachtung, weil diese Bewegungen gemeinschaftlich sind, sowohl den Punkten auf welche man die Bewegung bezieht, als auch den bewegten Atomen.

Dagegen wird nach (§. 48. und §. 49.) die Schwere durch die Umdrehung der Erde um ihre Axe vermindert, so daß die auf der Erd-Oberfläche durch die Schwere hervorgebrachten Bewegungen deshalb (quantitativ) ein wenig anders seyn würden, wenn sich die Erde nicht um ihre Axe drehte. Dies steht aber dem vorstehenden Ausspruch nicht im Geringsten im Wege, sobald man diejenige Schwere in Rechnung bringt, welche bei dieser täglichen Bewegung der Erde beobachtet und ausgemittelt wird.

sich zu bewegen, so sind nach (§. 37. $\odot_2$) die 3 Gleichungen der Bewegung folgende:

$$(\odot_2)\cdots \quad \left.\begin{array}{l} \partial^2 x = X + R\cdot\cos\lambda \\ \partial^2 y = Y + R\cdot\cos\mu \\ \partial^2 z = Z + R\cdot\cos\nu \end{array}\right\},$$

wo $\lambda, \mu, \nu$ die Winkel sind, welche die Normale an L mit den 3 Axen macht, also gegeben sind, wenn

$$2) \qquad \sqrt{\partial L_x^2 + \partial L_y^2 + \partial L_z^2} = V$$

gesetzt wird, durch die Gleichungen

$$3) \quad \cos\lambda = \frac{\partial L_x}{V}, \quad \cos\mu = \frac{\partial L_y}{V}, \quad \cos\nu = \frac{\partial L_z}{V},$$

während $R\cdot dt$ den normalen Gegendruck der Fläche L auf den bewegten Atom an jeder Stelle der Bahn ausdrückt (vgl. §. 37.).

Die jetzigen 3 Gleichungen ($\odot_2$) und die Gleichung $L = 0$ dazu, geben nun x, y, z und R als Funktionen von t, geben also die Gleichungen der Bahn, die Seiten-Geschwindigkeiten, und die Geschwindigkeit v in der Richtung der Bahn, so wie den Ort des Atoms zu Ende jeder Zeit t. Diese Gleichungen dürfen also nur noch, in jedem besondern Falle, integrirt werden.

Von diesen 3 Gleichungen der Bewegung haben wir auch bereits abgeleitet die Gleichung

$$v^2 - v^2 = 2\int_{t\div 0}^{t} (X\cdot\partial x + Y\cdot\partial y + Z\cdot\partial z)\cdot dt,$$

oder, wenn dieser Ausdruck zur Rechten integrabel ist, und integrirt $f_{x,y,z}$ giebt,

$$(\odot)\cdots \qquad v^2 - v^2 = 2(f_{x,y,z} - f_{r,v,\lambda})$$

(vgl. §. 38. I.); und im (§. 39.) haben wir noch die Folgerungen gezogen, welche für jede, also auch für die jetzt betrachtete Bewegung statt finden, so oft das Integral ($\odot$) statt hat.

II. Multiplizirt man die erstere der 3 Gleichungen ($\odot_2$) mit $\cos\lambda$, die andere mit $\cos\mu$, die dritte mit $\cos\nu$, und addirt man zuletzt die Resultate, so erhält man

$$4) \quad (\partial^2 x - X)\cdot\cos\lambda + (\partial^2 y - Y)\cdot\cos\mu + (\partial^2 z - Z)\cdot\cos\nu = R.$$

Bringt man aber die X, Y, Z in ($\odot_2$) auf die andere Seite, quadrirt und addirt man, so ergiebt sich

5) $(\partial^2 x - X)^2 + (\partial^2 y - Y)^2 + (\partial^2 z - Z)^2 = R^2$,

welches zwei symmetrische Ausdrücke für den Gegendruck R oder R·dt sind, und R liefern, wenn nur zuvor x, y, z in t gefunden sind. — Jede einzelne der Gleichungen $(\odot_2)$ giebt übrigens dieses R direkt, aber nicht in solchem symmetrischen Ausdrucke.

III. Wirkt gar keine Kraft, ist also $X = Y = Z = 0$, so gehen diese Gleichungen (4. und 5.) über in

4′) $R = \partial^2 x \cdot \cos\lambda + \partial^2 y \cdot \cos\mu + \partial^2 z \cdot \cos\nu$

und 5′) $R^2 = (\partial^2 x)^2 + (\partial^2 y)^2 + (\partial^2 z)^2$,

so daß dann die Größe des Drucks R·dt nach (5′) nichts weiter ist, als die mittlere Kraft aus den 3 Zuwachsen an Geschwindigkeit $\partial^2 x \cdot dt$, $\partial^2 y \cdot dt$ und $\partial^2 z \cdot dt$; nach (4′) dagegen: die Summe aller dieser Zuwachse an Geschwindigkeit, jeder auf die Richtung der Normale projizirt *).

IV. Ist die vorgeschriebene Fläche eine Ebene, so kann man die Axen der x und der y in dieselbe Ebene legen, so daß die Axe der z senkrecht auf derselben steht. Dann geht die Gleichung $L = 0$ in

1) $0 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot z = 0$, d. h. $z = 0$

über, und es ist noch $\cos\lambda = 0$, $\cos\mu = 0$ und $\cos\nu = \pm 1$. — Die 3 Gleichungen $(\odot_2)$ werden jetzt

2) $\partial^2 x = X$, $\partial^2 y = Y$ und $\partial^2 z = Z \pm R$.

Weil aber dasmal durchaus $z = 0$, also auch $\partial z = \partial^2 z = 0$ ist, so giebt die dritte der Gleichungen (2.)

3) $R = \pm Z$;

d. h. der Gegendruck R ist dem Drucke Z (absolut genommen) völlig gleich. Da nun sonach die dritte der Gleichungen (2.)

*) Wirken, wie hier oben in (III.) vorausgesetzt ist, gar keine Kräfte, so ist die Geschwindigkeit $v = \sqrt{\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2}$ konstant, nach (§. 39.); aber da die Richtung dieser Geschwindigkeit v sich in jedem Augenblick ändert, so sind die Seiten-Geschwindigkeiten $\partial x$, $\partial y$, $\partial z$ mit der Zeit t veränderlich, daher auch die Zuwachse in der nach t unmittelbar folgenden Zeit dt, nämlich $\partial^2 x \cdot dt$, $\partial^2 y \cdot dt$ und $\partial^2 z \cdot dt$ keineswegs der Null gleich; wohl aber ist der Zuwachs dv oder $\partial v \cdot dt$ der Null gleich.

ganz allein zur Bestimmung des Druckes R verwandt wird, und die beiden erstern der Gleichungen (2.), nämlich die Gleichungen

4) $$\partial^2 x = X \quad \text{und} \quad \partial^2 y = Y$$

gar nicht mehr R enthalten, so sind diese letztern beiden Gleichungen (4.) dasmal allein die Gleichungen zwischen x, y und t, welche demnach, wenn man sie integrirt und dann t eliminirt, die Gleichung der (ebenen) Bahn geben. —

Die Bewegung ist also genau so, wie wenn sie in dieser Ebene frei wäre, aber nur von den Kräften X und Y bewirkt, deren Richtungen in dieser Ebene liegen.

1stes Beispiel. Auf einer horizontalen Ebene bekomme ein Atom die Anfangs-Geschwindigkeit a, und der Richtung derselben wirke stetig entgegen eine konstante Kraft $\mu P$ (welche z. B. mit dem Gewicht P des Atoms proportional seyn mag); diese Bewegung näher zu bestimmen.

Nimmt man die Richtung der Anfangs-Geschwindigkeit zur Axe der x, so hat man $X = -\mu P$, $Y = 0$, daher werden die Gleichungen (IV. 4.) der Bewegung jetzt

1) $$\partial^2 x = -\mu P, \qquad 2) \quad \partial^2 y = 0.$$

Die zweite Gleichung giebt, wenn man sie hinter einander integrirt,

$$\partial y = c, \quad y = c \cdot t + c',$$

wo aber, weil nach der Voraussetzung für $t = 0$, auch $\partial y = 0$ und $y = 0$ werden muß, $c = c' = 0$ wird, so daß man für jedes t doch noch $y = 0$ hat, wie dies a priori einzusehen war. Die erstere Gleichung (1.) giebt dagegen, wenn man sie nach t integrirt, weil für $t = 0$, $\partial x = v$ werden muß,

$$\partial x = v - \mu P \cdot t$$

und

$$x = v \cdot t - \tfrac{1}{2} \mu P \cdot t^2.$$

Die Bewegung ist daher eine gleichmäßig verzögerte, geradlinige, und hört auf, wenn $\partial x = 0$ wird, also wenn $t = \frac{v}{\mu P}$ und $x = \frac{1}{2} \frac{v^2}{\mu P}$ geworden ist *).

2tes Beispiel. Auf einer Ebene, die gegen den Horizont um den spitzen Winkel $\varphi$ geneigt ist, wird ein Atom, den stetig die konstant und senkrecht auf den Horizont gedachte Schwere g oder $g \cdot dt$ treibt, mit der Anfangs-Geschwindigkeit v in gegebener Richtung in Bewegung gesetzt; außerdem wirke der jedesmaligen Richtung der Bahn genau entgegen die

*) So würde z. B. die Bewegung einer Kegel-Kugel seyn auf horizontaler ebener Bahn, wenn nur die Reibung in Rechnung gebracht wird, nicht aber der Widerstand der Luft.

ebenfalls konstante und stetige Kraft P oder P·dt. Die Bewegung dieses Atoms näher zu bestimmen.

Man lege durch den Anfangs-Punkt O der Bahn eine horizontale Ebene, nehme die Durchschnitts-Linie OX derselben mit der schiefen Ebene zur Axe der x, so wie die in der schiefen Ebene darauf senkrechte OY, nach oben gehend gedacht, zur Axe der y; und sind nun a und b die Winkel, welche die Anfangs-Geschwindigkeit v mit den Axen OX und OY macht, so sind

$$v \cdot \cos a \quad \text{und} \quad v \cdot \cos b$$

die Anfangs-Geschwindigkeiten nach diesen Axen. Die Schwere g an jeder Stelle zerlegt sich in die beiden Kräfte

$g \cdot \cos\varphi$ senkrecht auf die (schiefe) Ebene XOY

und $-g \cdot \sin\varphi$ parallel mit der Axe OY.

Die Kraft P, welche in der jedesmaligen Tangente, der Bewegung entgegen wirkt, zerlegt sich in

$$-P \cdot \frac{\partial x}{\partial s} \text{ parallel mit der Axe OX,}$$

und $$-P \cdot \frac{\partial y}{\partial s} \text{ parallel mit der Axe OY,}$$

wo $$\partial s = \sqrt{\partial x^2 + \partial y^2}$$

ist. Also hat man dasmal

$$X = -P \cdot \frac{\partial x}{\partial s} \quad \text{und} \quad Y = -g \cdot \sin\varphi - P \cdot \frac{\partial y}{\partial s}.$$

Die beiden Gleichungen (4. des Textes) werden daher jetzt

1) $\partial^2 x = -P \cdot \frac{\partial x}{\partial s}$ und 2) $\partial^2 y = -g \cdot \sin\varphi - P \cdot \frac{\partial y}{\partial s}$.

Die Gleichung (⊙) giebt dasmal

3) $$v^2 - v^2 = -2P \cdot s - 2g \cdot y \cdot \sin\varphi;$$

allein diese Gleichung ist zwar eine Relation, zwischen der Länge und Höhe der Bahn und der Geschwindigkeit, kann aber nicht als ein Integral der Gleichungen der Bewegung angesehen werden, weil s selbst noch nicht in x oder y ausgedrückt ist, und auch für's erste nicht, in x und y, oder in x, oder y allein ausgedrückt, hergestellt werden kann.

Und obgleich die Bewegung dem Texte zu Folge wie eine freie Bewegung in der Ebene betrachtet werden kann, von Kräften hervorgebracht, die nach den Axen bezüglich die obigen X und Y sind, so sind in diesem Beispiele die Kräfte doch nicht so, daß das Integral (⟨ des §. 41.) statt fände, wie man sich bei dem ersten Versuche überzeugt.

Wollte man aber jede der Gleichungen (1. u. 2.), nachdem vorher statt $\partial s$ sein Werth $\sqrt{\partial x^2 + \partial y^2}$ substituirt worden, zweimal hinter einander differenziiren, um aus allen Gleichungen x, $\partial x$, $\partial^2 x$, $\partial^3 x$ und $\partial^4 x$ zu eliminiren, und so eine (Differenzial-) Gleichung bloß zwischen y und t (von der vierten Ordnung) zu erhalten; oder wollte man nach (§. 18. Analys.) t

eliminiren, um eine Gleichung zwischen x, y, $\partial y_x$, $\partial^2 y_x$, $\partial^3 y_x$ und $\partial^4 y_x$ zu erhalten, so würde man letztere Gleichungen doch wieder nicht anders als in unendlichen Formen (etwa mittelst unendlicher Reihen) integriren können.

Wir begnügen uns daher mit der Bemerkung daß, den Gleichungen (1. u. 2.) gemäß, die hier zu betrachtende Bewegung genau mit der eines frei geworfenen Atoms übereinstimmt, auf welchen jedoch die Schwere $g \cdot \sin\varphi$ (statt g) wirkt, und bei welcher ein konstanter Widerstand der Luft P vorausgesetzt wird. Dies findet sich, wenn man nach (§. 41.) dieses letztere Problem in Gleichung stellt.

Ist $P = 0$, so geben die beiden Gleichungen (1. u. 2.) ohne weiteres die Integrale

$$x = v \cdot t \cdot \cos a \quad \text{und} \quad y = v \cdot t \cdot \cos b - \tfrac{1}{2} g t^2 \cdot \sin\varphi,$$

und die Bahn ist daher dieselbe bereits schon im (Beispiel zu §. 41. I.) gefundene Parabel, nur mit dem Unterschiede, daß hier $g \cdot \sin\varphi$ steht, wo dort g.

Anmerk. Bei der Bewegung auf einer gegebenen ebenen oder krummen Fläche muß man jedoch nicht übersehen, daß die (endliche) Kraft, welche auf den Atom zu Anfange wirkt, nur dann die Anfangs-Geschwindigkeit v ist, wenn die Richtung dieser Kraft in der Tangential-Ebene der gegebenen Fläche liegt. In jedem andern Falle muß man diese Kraft auf diese Tangential-Ebene projiziren, und nur der Theil davon, dessen Richtung in der Tangential-Ebene liegt, ist statt v zu setzen.

## §. 46.

### Bewegung in vorgeschriebener Bahn.

I. Ist der Atom gezwungen auf einer durch die Gleichungen

1) $L_{x,y,z} = 0$ und 2) $L'_{x,y,z} = 0$

gegebenen Bahn zu bleiben, so hat man nach (§. 37. $\odot_3$) die 3 Gleichungen der Bewegung

$$(\odot_3)\cdots \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial^2 x = X + Q \cdot \cos\varepsilon \\ \partial^2 y = Y + Q \cdot \cos\varepsilon' \\ \partial^2 z = Z + Q \cdot \cos\varepsilon'' \end{array} \right\},$$

wo Q der unbekannte, auf der Bahn normale Gegendruck der Bahn ist, welcher mit den Koordinaten-Axen die Winkel $\varepsilon$, $\varepsilon'$

und $\varepsilon''$ macht, von denen man aus (§. 37.) weiß (weil die Richtung des Drucks auf der Tangente senkrecht steht), daß

3) $\quad \cos\varepsilon \cdot \partial x + \cos\varepsilon' \cdot \partial y + \cos\varepsilon'' \cdot \partial z = 0$

ist, während ohnedies allemal

4) $\quad \cos\varepsilon^2 + \cos\varepsilon'^2 + \cos\varepsilon''^2 = 1$

seyn muß. — Diese 7 Gleichungen (1. — 4.) und $(\odot_3)$ müssen nun zur Bestimmung von Q, $\varepsilon$, $\varepsilon'$, $\varepsilon''$, x, y und z, als Funktionen von t dienen; so daß man dann auch $\partial x$, $\partial y$, $\partial z$ und daher auch v finden kann.

Ist $X \cdot \partial x + Y \cdot \partial y + Z \cdot \partial z$ integrabel, und das Integral davon $= f_{x,y,z}$, so hat man noch überdies die Gleichung ($\odot$ §. 38. I.) nämlich

$(\odot) \cdots \quad v^2 - v^2 = 2(f_{x,y,z} - f_{x,y,z})$,

welche, in so ferne $v^2 = \partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2$ ist, dann als ein erstes Integral der Gleichungen $(\odot_3)$ angesehen werden kann.

II. Wie im (§. 45.), so findet man auch hier wieder

5) $\quad Q = (\partial^2 x - X) \cdot \cos\varepsilon + (\partial^2 y - Y) \cdot \cos\varepsilon' + (\partial^2 z - Z) \cdot \cos\varepsilon''$;

auch

6) $\quad Q = \sqrt{(\partial^2 x - X)^2 + (\partial^2 y - Y)^2 + (\partial^2 z - Z)^2}$.

## §. 47.

### Wenn die Bahn eine ebene Kurve ist.

I. Ist die vorgeschriebene Bahn eine ebene Kurve, so kann man die Koordinaten-Axen OX und OY in dieser Ebene nehmen, also OZ senkrecht darauf, und statt der beiden Gleichungen $L = 0$ und $L' = 0$ hat man nun

$$L_{x,y} = 0 \quad \text{und} \quad L' = z = 0$$

als die Gleichungen der vorgeschriebenen Bahn, so daß zugleich mit $z = 0$ auch $\partial z = 0$ und $\partial^2 z = 0$ wird. Die 3 Gleichungen der Bewegung $(\odot_3)$ sind nun

$$\partial^2 x = X + Q \cdot \cos\varepsilon; \quad \partial^2 y = Y + Q \cdot \cos\varepsilon'$$

und $\qquad 0 = Z + Q \cdot \cos\varepsilon''$,

so daß jetzt der parallel mit der Axe OZ zerlegte Theil des Ge-

genbruckes Q, nämlich $Q \cdot \cos\varepsilon''$, genau gleich und entgegen ist der Kraft Z.

II. Ist daher noch $Z = 0$ gegeben, d. h. sind die Richtungen der wirkenden Kräfte alle in der gegebenen Ebene der Bahn, so hat man auch

$Q \cdot \cos\varepsilon'' = 0$, also $\cos\varepsilon'' = 0$ und $\varepsilon'' = 90^0 = \frac{1}{2}\pi$,

d. h. die Richtung des Gegendrucks Q, obgleich normal auf der Bahn, liegt jetzt zugleich in der Ebene der Bahn, also in der Richtung der sogenannten Normale der als Bahn gegebenen ebenen Kurve.

In diesem Falle wird also die Zuziehung der dritten Axe OZ ganz überflüssig, und man hat nun bloß die Gleichungen, wie sie aus denen des (§. 46. I.) für diesen speziellen Fall hervorgehen, nämlich

1) $L_{x,y} = 0$ (für die gegebene Bahn)

$$(\odot_2)\cdots \left\{ \begin{array}{l} \partial^2 x = X + Q\cdot\cos\varepsilon \\ \partial^2 y = Y + Q\cdot\cos\varepsilon' \end{array} \right\} \text{(die Gleichungen d. Beweg.)}$$

und

2) $\cos\varepsilon \cdot \partial x + \cos\varepsilon' \cdot \partial y = 0$ (Eigenschaft der Normale),

so wie noch

3) $$\cos\varepsilon^2 + \cos\varepsilon'^2 = 1.$$

Diese 5 Gleichungen müssen nun zur Bestimmung der 5 Unbekannten Q, $\varepsilon$, $\varepsilon'$, x und y als Funktionen von t dienen. Dabei findet sich noch aus (2. und 3.)

4) $$\cos\varepsilon = \pm\frac{\partial y}{\partial s} \quad \text{und} \quad \cos\varepsilon' = \mp\frac{\partial x}{\partial s},$$

während

5) $$\partial s = \sqrt{\partial x^2 + \partial y^2}$$

ist, und $\varepsilon$, $\varepsilon'$ die Winkel bedeuten, welche die Normale mit den Axen macht.

Das Integral $(\odot)$ wird jetzt

$$(\odot)\cdots \qquad v^2 - v^2 = 2(f_{x,y} - f_{r,\vartheta}),$$

so oft $\int (X \cdot \partial x + Y \cdot \partial y) \cdot dt = f_{x,y}$ gefunden wird; dabei ist jetzt, weil $\partial z = 0$ ist,

6) $$v = \partial s = \sqrt{\partial x^2 + \partial y^2}.$$

## §. 48.

### Von der Centrifugal-Kraft.

I. Wird vorausgesetzt, daß der Atom gezwungen ist in einer durch die Gleichung

1) $$x^2+y^2-l^2=0$$

gegebenen Kreise sich zu bewegen, dessen Mittel-Punkt im Anfangs-Punkt O der Koordinaten, und dessen Radius $=l$ ist, und wird dem Atom bloß die Anfangs-Geschwindigkeit $v$ gegeben, ohne daß weiter Kräfte auf ihn wirkten, so ist erstlich die Geschwindigkeit $v$ konstant nach (§. 39. II.) $=v$; zweitens ist der Gegendruck Q der Bahn genau nach dem Mittel-Punkt O hin gerichtet (nämlich normal auf den Kreis); endlich drittens heißt der Druck $Q\cdot dt$, den die Bahn in diesem Falle auszuhalten hat, also die Kraft $Q\cdot dt$ oder Q, mit welcher sich der Atom in der Richtung des Radius vom Mittel-Punkt zu entfernen strebt, und welcher von der bloßen Geschwindigkeit $v=v$ herrührt (weil außerdem keine andere Kräfte wirken) die Centrifugal-Kraft, auch Schwung-Kraft.

Zur Auffindung dieser Centrifugal-Kraft, welche wir durch $F\cdot dt$, also durch F bezeichnen wollen, hat man außer der Gleichung (1.) des Kreises noch die beiden Gleichungen der Bewegung (§. 47. $\odot_3$), nämlich die Gleichungen

2) $\partial^2x=F\cdot\cos\varepsilon$ und 3) $\partial^2y=F\cdot\cos\varepsilon'$,

während, wenn (Fig. 37.) $OP=x$ und $PM=y$ gedacht wird, $\varepsilon$ und $\varepsilon'$ die Winkel $\pi-MOX$ und $\pi-MOY$ sind, welche der Gegendruck in der Richtung der Normale MO (nicht OM) mit den Axen OX und OY macht, so daß man sogleich

4) $\cos\varepsilon=-\frac{x}{l}$ und 5) $\cos\varepsilon'=-\frac{y}{l}$

hat.

Die Gleichungen (2. und 3.) geben nach dem Verfahren des (§. 46. II.)

6) $$F=\partial^2x\cdot\cos\varepsilon+\partial^2y\cdot\cos\varepsilon'=-\frac{x\cdot\partial^2x+y\cdot\partial^2y}{l},$$

während, wenn man F aus denselben Gleichungen eliminirt,

7) $$y \cdot \partial^2 x - x \cdot \partial^2 y = 0$$

hervorgeht.

Die Gleichungen (1. u. 7.) müssen nun, integrirt, x und y, also auch $\partial x$, $\partial y$, $\partial^2 x$ und $\partial^2 y$ in t geben, während dann die (6.) auch die Kraft F giebt, welche ihrer Größe nach die Centrifugal-Kraft ist. Obgleich aber sich die (7.) integriren läßt, und sogleich

8) $$y \cdot \partial x - x \cdot \partial y = C$$

giebt, so müßte man doch noch die (1.) differenziiren, wo man dann

9) $$x \cdot \partial x + y \cdot \partial y = 0$$

erhielte, um aus den 3 Gleichungen (1. 8. u. 9.) y und $\partial y$ eliminiren zu können, und so die Gleichung

10) $$l^2 \cdot \partial x = C \cdot \sqrt{l^2 - x^2}$$

bloß zwischen x und t zu erhalten, welche dann vollends integrirt werden kann, und

$$\int \frac{1}{\sqrt{l^2 - x^2}} \cdot dx = \frac{C}{l^2} \cdot t + C'$$

liefert. Die (1.) giebt dann y dazu, und die (6.) giebt zuletzt die gesuchte Centrifugal-Kraft.

Die Rechnungen werden aber viel bequemer, wenn man die Polar-Koordinaten $XOM = \theta$ und $OM = r$ einführt. Man hat dann

11) $x = r \cdot \cos\theta$ und 12) $y = r \cdot \sin\theta$,

so wie

13) $\cos\varepsilon = -\cos\theta$ und 14) $\cos\varepsilon' = -\sin\theta$.

Die Gleichung (1.) des Kreises wird ganz einfach

15) $$r = l,$$

so daß noch

16) $$\partial r = 0 \quad \text{und} \quad \partial^2 r = 0$$

ist.

Differenzirt man nun die Gleichungen (11. und 12.) zweimal hinter einander nach allem t, so erhält man, wenn man 0 statt $\partial r$, und l statt r setzt,

17) $\partial x = -l \cdot \sin\theta \cdot \partial\theta$, 18) $\partial y = l \cdot \cos\theta \cdot \partial\theta$,

19) $\partial^2 x = -l \cdot \cos\theta \cdot \partial\theta^2 - l \cdot \sin\theta \cdot \partial^2\theta$

und

20) $\partial^2 y = -l \cdot \sin\theta \cdot \partial\theta^2 + l \cdot \cos\theta \cdot \partial^2\theta$.

Diese Werthe in die Gleichung (6.) substituirt, geben

21) $F = l \cdot \partial\theta^2$,

so daß jetzt nur noch $\partial\theta$ gefunden zu werden braucht.

Weil aber die Gleichungen der Bewegung (2. und 3.), nachdem F eliminirt worden, zur Gleichung (7.) führen, welche in Polar-Koordinaten ausgedrückt die nachstehende wird, nämlich

$$l^2 \cdot \partial^2\theta = 0, \quad \text{also} \quad \partial^2\theta = 0,$$

so erhält man, wenn diese integrirt wird, sogleich

22) $\partial\theta = C$,

wo C eine noch zu bestimmende Konstante ist. Da aber für $t = 0$, wenn der Atom sich dann in A befindet, $x = l$, $y = 0$, $\partial x = 0$, $\partial y = v$ und $\theta = 0$, also auch $\sin\theta = 0$, $\cos\theta = 1$ ist, so folgt aus (18.), daß dann (für $t = 0$) $\partial\theta = \frac{v}{l}$ ist. Setzt man also in (22.) $t = 0$, so erhält man $\frac{v}{l} = C$, wodurch die Konstante C bestimmt ist. Die Gleichung (22.) wird daher

23) $\partial\theta = \frac{v}{l}$ *).

und dieser Werth von $\partial\theta$ in die (21.) substituirt, giebt zuletzt

---

*) Dieses Resultat konnte man aus (21.) unmittelbar erhalten. Da die Gleichungen der Bewegung

$$\partial^2 x = F \cdot \cos\varepsilon \quad \text{und} \quad \partial^2 y = F \cdot \cos\varepsilon'$$

sind, so kann man die Bewegung als eine freie Bewegung betrachten, welche dadurch entsteht, daß eine (unbekannte) Kraft $F \cdot dt$ stetig den Atom gegen O hin treibt. Diese Bewegung, wenn sie als eine freie betrachtet wird, ist sogar zu gleicher Zeit eine Central-Bewegung, welche im (§. 42.) näher betrachtet worden ist. Und nach (§. 41.) ist bei jeder freien Bewegung in einer Ebene, um einen Punkt O, $\partial\theta$ die Winkel-Geschwindigkeit und $r \cdot \partial\theta$ oder $l \cdot \partial\theta$ die wahre Geschwindigkeit, also $l \cdot \partial\theta = v$ oder $\partial\theta = \frac{v}{l}$.

24) $$F = \frac{v^2}{l} = \frac{v^2}{l} \text{ (weil } v = v \text{ ist).}$$

Die Centrifugal-Kraft F ist daher allemal der

---

Man kann auch die Centrifugal-Kraft durch bloße geometrische Betrachtung finden. Der Gegendruck F·dt der Bahn in M (Fig. 38.) bewirkt, daß die Richtung der Geschwindigkeit v sich abändert, und von LM oder MP in MN übergeht, während PMN der Berührungs-Winkel $\delta$ ist, welcher nach (Geom. §. 16. VIII.) unendlich-klein und zwar

$$\delta = \frac{ds}{l}$$

gefunden worden, wenn ds den in der Zeit dt gewonnenen Zuwachs des Bogens s bedeutet; so daß gegen dt alle zweiten und höheren Potenzen von $\delta$ nach (Analys. §. 20. Nr. 12.) nicht in Betrachtung kommen können. Man muß also dann

$$\cos\delta = 1 - \frac{\delta^2}{2!} + \frac{\delta^4}{3!} - \cdots = 1$$

und

$$\sin\delta = \delta - \frac{\delta^3}{3!} + \frac{\delta^5}{5!} - \cdots = \delta$$

nehmen. Nun zerlegt sich aber MP oder v in zwei Kräfte oder Geschwindigkeiten, nämlich in

1) $v \cdot \cos\delta$ oder $v \cdot 1$ oder v nach der neuen Richtung MN,

und in

2) $v \cdot \sin\delta$ oder $v \cdot \delta$ in der Richtung MS, welche senkrecht auf MN in der Verlängerung des Radius OM gedacht ist.

Letztere ist nun die Centrifugal-Kraft F·dt. Also hat man

$$F \cdot dt = v \cdot \delta = \frac{v \cdot ds}{l}.$$

Weil aber

$$ds = \delta s \cdot dt = v \cdot dt$$

ist, so folgt noch, wenn man diesen Werth von ds substituirt,

$$F \cdot dt = \frac{v^2 \cdot dt}{l} \quad \text{oder} \quad F = \frac{v^2}{l},$$

genau wie oben im Text.

Aus dem Umstand, daß die obige erstere Kraft $v \cdot \cos\delta$, in so ferne, wegen des unendlich-kleinen $\delta$, $\cos\delta = 1$ ist, in $v \cdot 1$ oder v selbst übergegangen ist, hätte man auch folgern können, daß die Bewegung im Kreise konstant bleibt, so lange keine weiteren Kräfte hinzutreten. — Im Texte folgt aber dasselbe aus (§. 39. II.).

Huyghens, welcher die Centrifugal-Kraft zuerst bestimmt hat, bediente sich dazu noch eines dritten Weges, den wir hier nicht weiter anführen wollen, um so weniger, da wir hier uns einzig an den Gang des Textes halten müssen.

Quozient aus dem Quadrat der Geschwindigkeit durch den Radius der Kreisbahn dividirt.

II. Ist T die Zeit (in Sekunden), während welcher der Atom den ganzen Umfang $2l\pi$ der Bahn beschreibt, so hat man, weil $s = v \cdot t$ ist, auch

$$2l\pi = v \cdot T, \quad \text{also} \quad v = \frac{2l\pi}{T}.$$

Dadurch wird der eben für die Centrifugal-Kraft $F \cdot dt$ gefundene Ausdruck diese Form annehmen:

$$F = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot l.$$

Werden daher zwei oder mehr Kreis-Bewegungen in einer und derselben Zeit T vollendet, so verhalten sich die verschiedenen Centrifugal-Kräfte F, wie die Radien l der Bahnen. — (Eine Anwendung hiervon s. §. 49.).

III. Obgleich der Begriff „Centrifugal-Kraft" nach (I.) nur bei einer konstanten Kreis-Bewegung vorkommen kann, so hat doch bei jeder andern Bewegung in einer bestimmt vorgeschriebenen, ebenen oder doppelt gekrümmten Bahn die Geschwindigkeit v zu irgend einer bestimmten Zeit t, einen bestimmten Werth, und die Bahn selbst hat an der Stelle, wo sich der Atom zu dieser Zeit t befindet, einen Krümmungs-Kreis, welcher in der Krümmungs-Ebene liegt und an dieser Stelle mit der Kurve zusammenfällt. Denkt man sich also bei jeder beliebigen Bewegung in jeder beliebigen, vorgeschriebenen Bahn, daß zu Ende einer beliebigen aber bestimmten Zeit t, die Kräfte X, Y, Z plötzlich aufhören zu wirken, so daß der Atom bloß noch der Geschwindigkeit v, wie sie eben jetzt gerade ist, folgt, so hat man eine unendlich-kleine Zeit hindurch eine konstante Kreis-Bewegung, deren Geschwindigkeit $= v$ ist, und die zum Halbmesser der Bahn den augenblicklichen Krümmungs-Halbmesser $\varrho$ hat. So gedacht, findet also bei jeder Bewegung in vorgeschriebener Bahn an jeder Stelle dieser Bahn, in der verlängerten Richtung des augenblicklichen Krümmungs-Halbmessers $\varrho$ eine Centrifugal-Kraft $f \cdot dt$ statt, so daß

$$(\sigma)\cdots \qquad f = \frac{v^2}{\varrho}$$

ist, wenn v die augenblickliche Geschwindigkeit an dieser Stelle der Bahn vorstellt *).

Vereinigt man bei einer solchen beliebigen Bewegung in vorgeschriebener Bahn die wirkenden Kräfte X, Y und Z in eine einzige $\varphi$, so wird die Richtung von $\varphi$ mit der Tangente der Bahn eine Ebene bilden. Zerlegt man in dieser Ebene die Kraft $\varphi$ in zwei Kräfte, die eine T in der Richtung der Tangente der Bahn, welche allein die Geschwindigkeit ändert, und die andere P senkrecht auf die Richtung der Bahn (welche mit den Koordinaten-Axen die Winkel p, p′ und p″ machen mag), so ist klar, daß wenn man diese Kraft P und die obige Centrifugal-Kraft f (welche in der Richtung des Krümmungs-Halbmessers wirkt, der mit den Axen die Winkel $\zeta$, $\zeta'$ und $\zeta''$ machen mag) in eine einzige vereinigt, diese einzige mittlere Kraft der Größe und Richtung nach der Gesammtdruck ist, den die Bahn eben jetzt (d. h. zu Ende der Zeit t) auszuhalten hat. Weil aber die Gleichungen der Bewegung ($\odot_3$ des §. 46.) den eben so großen Gegen-Druck Q der Bahn bestimmen, so muß also nach (§. 17.)

$$(\varphi)\cdots \quad \left\{ \begin{array}{l} f\cdot\cos\zeta + P\cdot\cos p = -Q\cdot\cos\varepsilon = X - \vartheta^2 x \\ f\cdot\cos\zeta' + P\cdot\cos p' = -Q\cdot\cos\varepsilon' = Y - \vartheta^2 y \\ f\cdot\cos\zeta'' + P\cdot\cos p'' = -Q\cdot\cos\varepsilon'' = Z - \vartheta^2 z \end{array} \right\}$$

seyn **). — Aus dieser Eigenschaft aber hätte man auch (ohne

*) Weil v und $\varrho$ an jeder andern Stelle der Bahn andere Werthe haben können und werden, so wird auch die Centrifugal-Kraft an jeder andern Stelle der Bahn im Allgemeinen eine andere seyn, ja bei einer doppelt gekrümmten Bahn auch immer in einer andern Ebene; jedoch wird sie immer normal auf die Bahn wirken.

**) Obgleich diese Gleichungen ($\varphi$) feststehen und keines weitern Beweises bedürfen, so ist es doch nicht uninteressant, zu sehen, wie die Rechnung diese Gleichungen a posteriori bestätigt. Betrachten wir bloß die erstere dieser Gleichungen. — Weil die Kräfte P und T dasselbe leisten, was die Kräfte X, Y und Z, so hat man nach (Anmerk. 2. zu §. 25.), wenn man alle Kräfte auf die Axe der x projizirt, und weil die Projektionen von Y und Z auf die Richtung der X, der Null gleich sind,

von der Betrachtung der Kreis-Bewegung auszugehen) den Begriff der Centrifugal-Kraft f ableiten können.

IV. Man kann aber den Begriff der Centrifugal-Kraft auch auf die beiden Fälle ausdehnen, wo die Bewegung blöß in einer gegebenen Fläche statt findet, oder auch ganz frei ist. Denkt man sich nämlich in beiden Fällen die Bahn, welche der Atom wirklich beschreibt, in einem Augenblick zu Ende der Zeit, als wäre sie bestimmt vorgeschrieben, so würde sie in der Richtung des Krümmungs-Halbmessers $\varrho$ von der bloßen Geschwindigkeit v allerdings den Normal-Druck $f = \frac{v^2}{\varrho}$ erleiden, welchen wir Centrifugal-Kraft nannten; und diese Kraft kann man auch in diesen beiden Fällen noch Centrifugal-Kraft nennen.

Weil aber in diesen beiden übrigen Fällen der Bewegung die Bahn nicht bestimmt vorgeschrieben ist, so würde diese Centrifugal-Kraft den Atom aus seiner Bahn entfernt haben, wenn nicht in demselben Moment die wirkenden Kräfte X, Y, Z, oder die an ihre Stelle getretenen Kräfte P und T der Nummer (III.) hinzugetreten wären, und dieses Verlassen der Bahn verhindert hätten, wozu jedoch nur die Kraft P allein beigetragen

---

1) $$P \cdot cos p + T \cdot cos \alpha = X.$$

Nun ist aber

2) $$f = \frac{v^2}{\varrho} = \frac{\partial s^2}{\varrho},$$

also nach (§. 16. VII. Geom.)

3) $$f \cdot cos \zeta = \frac{\partial x}{\partial s} \cdot \partial^2 s - \partial^2 x,$$

dabei aber nicht bloß $\frac{\partial x}{\partial s} = cos \alpha$, sondern auch nach (§. 38. II.)

4) $$\partial^2 s = T.$$

Substituirt man nun diese Werthe in (3.), so erhält man

5) $$f \cdot cos \zeta = T \cdot cos \alpha - \partial^2 x.$$

Addirt man jetzt die Gleichungen (1. und 5.), so erhält man die erstere der Gleichungen (Q) unmittelbar.

Und ganz auf analogem Wege bestätigen sich auch die beiden andern der Gleichungen (Q) in der wirklichen Ausrechnung.

haben kann, weil die andere Kraft T in der Richtung der Tangente nur die Geschwindigkeit ändert. Daraus folgt:

1) Bei der Bewegung in einer gegebenen Fläche $L_{x,y,z} = 0$, muß die mittlere Kraft, welche aus der Vereinigung der Centrifugal-Kraft f·dt und des von X·dt, Y·dt, Z·dt herrührenden normalen Druckes P·dt hervorgeht, genau der Druck R·dt seyn, welchen die Fläche L während der Bewegung in der Richtung der Normale erleidet; und da der eben so große Gegen-Druck R·dt aus den Gleichungen der Bewegung ($\odot_2$ des §. 45.) gefunden wird, so muß also, wenn wir die Bezeichnung der (III.) beibehalten, seyn:

$$(A)\cdots \left\{ \begin{array}{l} f\cdot\cos\zeta + P\cdot\cos p = -R\cdot\cos\lambda = X - \partial^2 x \\ f\cdot\cos\zeta' + P\cdot\cos p' = -R\cdot\cos\mu = Y - \partial^2 y \\ f\cdot\cos\zeta'' + P\cdot\cos p'' = -R\cdot\cos\nu = Z - \partial^2 z \end{array} \right\} *).$$

Nimmt man die Axen OX und OY in dem Augenblick, wo die Bewegung betrachtet wird, in der Tangential-Ebene der Fläche L, und läßt man dabei OX mit der Tangente der Bahn zusammenfallen, so ist die Koordinaten-Ebene YOZ zugleich die Normal-Ebene der Bahn, so daß in ihr die Kräfte f, P und R liegen. Daher ist dann $\zeta = \frac{1}{2}\pi$, $p = \frac{1}{2}\pi$, $\lambda = \mu = \frac{1}{2}\pi$, und die erstere der Gleichungen (A.) ist identisch $0 = 0$. Die Gleichungen (A.) reduziren sich nun auf die beiden

$$(B)\cdots \left\{ \begin{array}{l} f\cdot\cos\zeta' + P\cdot\cos p' = 0 \\ f\cdot\cos\zeta'' + P\cdot\cos p'' = \pm R \end{array} \right\},$$

während zu gleicher Zeit wegen $\cos\zeta = \cos p = 0$,

$$(C)\cdots \left\{ \begin{array}{l} \cos\zeta'^2 + \cos\zeta''^2 = 1 \\ \cos p'^2 + \cos p''^2 = 1 \end{array} \right\}$$

und $\zeta'$ der Neigungs-Winkel der Krümmungs-Ebene der Bahn gegen die Tangential-Ebene ist.

Der erstern der Gleichungen (B) kann man sich daher bedienen, um bequem diesen Neigungs-Winkel $\zeta'$ zu finden.

Ist

*) Diese Gleichungen sind zu gleicher Zeit durch dieselbe Rechnung noch einmal bestätigt, welche in der Note zu (III.) gegeben worden ist.

Ist $P = 0$, so wird $\cos\zeta' = 0$ und $\zeta' = \frac{1}{2}\pi$, d. h. die Krümmungs-Ebene steht dann allemal auf der Tangential-Ebene senkrecht *). Diese Eigenschaft hat also die Bahn auf der Fläche L nicht bloß dann, wenn gar keine Kraft wirkt (so daß die Geschwindigkeit konstant, also beständig der Anfangs-Geschwindigkeit gleich ist), sondern auch dann, wenn noch Kräfte wirken, aber bloß in der Richtung der jedesmaligen Tangente der Bahn **), weil dann noch immer $P = 0$ ist.

Nun läßt sich aber beweisen, daß die Kurve auf einer Fläche L ein Minimum oder Maximum der Länge hat zwischen zwei gegebenen Grenz-Punkten, so oft die Krümmungs-Ebene durchge-

---

*) Diese Eigenschaft kann man auch direkt erweisen. Sind nämlich $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa''$ die Winkel, welche die auf der Krümmungs-Ebene senkrechte Gerade mit den 3 Axen macht, so steht offenbar die Krümmungs-Ebene auf der Tangential-Ebene senkrecht, wenn

1) $\cos\varkappa \cdot \cos\lambda + \cos\varkappa' \cdot \cos\mu + \cos\varkappa'' \cdot \cos\nu = 0$

ist. Diese Gleichung (1.) muß also erwiesen werden. Nun hat man aber, wenn $P = 0$ ist und bloß T wirkt,

$$X = T \cdot \cos\alpha, \quad Y = T \cdot \cos\beta, \quad Z = T \cdot \cos\gamma;$$

also sind die Gleichungen der Bewegung auf der Fläche L (§. 45.) jetzt

2) $\partial^2 x = T \cdot \cos\alpha + R \cdot \cos\lambda, \quad \partial^2 y = T \cdot \cos\beta + R \cdot \cos\mu,$
$$\partial^2 z = T \cdot \cos\gamma + R \cdot \cos\nu;$$

ferner ist nach (§. 16. VI. Geom.)

3) $\cos\varkappa = \frac{1}{W} \cdot (\partial y \cdot \partial^2 z - \partial z \cdot \partial^2 y), \quad \cos\varkappa' = \frac{1}{W} \cdot (\partial z \cdot \partial^2 x - \partial x \cdot \partial^2 z),$
$$\cos\varkappa'' = \frac{1}{W} \cdot (\partial x \cdot \partial^2 y - \partial y \cdot \partial^2 x).$$

Substituirt man aber diese Werthe statt $\cos\varkappa$, $\cos\varkappa'$, $\cos\varkappa''$ in die Gleichung (1.), so wird diese zu erweisende Gleichung die Form annehmen:

4) $(\partial y \cdot \partial^2 z - \partial z \cdot \partial^2 y) \cdot \cos\lambda + (\partial z \cdot \partial^2 x - \partial x \cdot \partial^2 z) \cdot \cos\mu +$
$$(\partial x \cdot \partial^2 y - \partial y \cdot \partial^2 x) \cdot \cos\nu,$$

und diese Gleichung zeigt sich sogleich als eine richtige Gleichung, sobald man statt $\partial^2 x$, $\partial^2 y$, $\partial^2 z$ ihre Werthe aus (2.) in sie substituirt, und statt $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ ihre Werthe $\frac{\partial x}{\partial s}$, $\frac{\partial y}{\partial s}$, $\frac{\partial z}{\partial s}$ setzt; denn sie wird dann identisch $0 = 0$. — Also findet auch die (1.) mit den Gleichungen (2.) zugleich statt.

**) Wie z. B. Reibung, Widerstand der Luft, u. dgl.

hends auf der Tangential-Ebene der Fläche L senkrecht steht *). Also beschreibt der Atom, auf welchen außer der Anfangs-Geschwindigkeit entweder gar keine Kräfte wirken, oder auf welchen fortwährend nur Kräfte in der Richtung der Bahn selbst wirken, allemal eine solche Bahn, daß zwischen zweien ihrer Punkte ein Minimum oder Maximum der Länge statt findet, in Bezug auf alle nächst anliegenden Kurven, welche in derselben Fläche L zwischen denselben Grenz-Punkten noch liegen können.

2) Bei der Bewegung in ganz freier Bahn muß die Centrifugal-Kraft $f \cdot dt$ genau gleich und entgegengesetzt seyn der Kraft $P \cdot dt$. — Es muß also seyn

$$(D)\cdots \quad \left.\begin{array}{rl} & f = P \\ \zeta + p &= \pi \\ \zeta' + p' &= \pi \\ \zeta'' + p'' &= \pi \end{array}\right\},$$

oder

$$\left.\begin{array}{rl} f \cdot cos\,\zeta + P \cdot cos\,p &= 0 \\ f \cdot cos\,\zeta' + P \cdot cos\,p' &= 0 \\ f \cdot cos\,\zeta'' + P \cdot cos\,p'' &= 0 \end{array}\right\} **).$$

---

*) Wenn man sich nämlich die Aufgabe stellt: die Kurve auf einer Fläche L zu finden, welche zwischen je zweien ihrer Punkte ein Minimum oder Maximum der Länge hat (unter allen nächsten Nachbar-Kurven in derselben Fläche L zwischen denselben Punkten), und diese Aufgabe nach dem im (§. 56. Analys.) angedeuteten Verfahren löst, so finden sich die Differenzial-Gleichungen der Kurve so, daß aus ihnen sogleich hervorgeht, wie die Krümmungs-Ebene der Bahn an jeder Stelle, auf der Tangential-Ebene der Fläche L senkrecht stehe.

**) Auch diese Gleichungen (D) bestätigen sich noch besonders aus den jetzt statt findenden Gleichungen der Bewegung, genau mittelst der Rechnung in der (Note zu III.). Es findet sich nämlich dort unmittelbar

1) $\qquad f \cdot cos\,\zeta + P \cdot cos\,p = X - \partial^2 x.$

Aber hier bei der freien Bewegung ist

2) $\qquad \partial^2 x = X, \quad$ also $\quad X - \partial^2 x = 0;$

folglich wird auch die Gleichung (1.) jetzt

3) $\qquad f \cdot cos\,\zeta + P \cdot cos\,p = 0,$

welches die erstere der Gleichungen (D) ist. — Die beiden andern ergeben sich natürlich auf ganz analogem Wege.

Bei der freien Bewegung ist also die Richtung der Kraft P zu gleicher Zeit die Richtung des Krümmungs-Halbmessers, so daß der Mittelpunkt in der verlängerten Richtung von P liegt. Der Krümmungs-Halbmesser der Bahn liegt daher allemal in der Ebene, welche die Richtung der wirkenden Kraft $\varphi$ (welche in P und T zerlegt worden ist) mit der Tangente der Bahn macht. Ist dabei $\theta$ der Winkel, den die Richtung der allein wirkenden Kraft $\varphi$ mit dem Krümmungs-Halbmesser macht, so ist $\varphi \cdot \cos\theta$ die Kraft P; also ist auch, weil $f = P$ ist, nothwendig

$$(E)\cdots \qquad \frac{v^2}{\varrho} = \varphi \cdot \cos\theta.$$

Mittelst dieser Gleichung kann man die einzig wirkende Kraft $\varphi$ finden, wenn $v$, $\varrho$ und $\theta$ bekannt sind *).

Anmerk. Man vergleicht auch gerne die Centrifugal-Kraft f irgend einer krummlinigen Bewegung, gegeben durch die Gleichung

$$1) \qquad f = \frac{v^2}{\varrho}$$

mit der Schwere g, wie solche an irgend einer Stelle der Erd-Oberfläche gerade ist. Man denkt sich nämlich die Fall-Höhe h, welche ein, ohne alle Anfangs-Geschwindigkeit frei und vermöge dieser konstant gedachten Schwere $g \cdot dt$ allein herabfallender Atom durchfallen muß, damit er gerade die obige Geschwindigkeit v erhalte; und man hat dann nach (§. 33. Anmerk.)

---

*) Bei der Planeten-Bewegung um die Sonne S (letztere als fest gedacht) hat Newton aus den Kepler'schen Gesetzen, wie wir (S. 394.) gezeigt haben, und im folgenden (§. 49.) abermals zeigen werden, gefolgert, daß die Bewegung eine Central-Bewegung ist. — Aus der durch Beobachtungen bekannten Gleichung der elliptischen Bahn konnte er dann den Krümmungs-Halbmesser $\varrho$ und den Winkel $\theta$ finden; das Gesetz der Inhalte (§. 42., welches eines der Kepler'schen Gesetze ist) in Verbindung mit der Gleichung der Bahn gab dann die Geschwindigkeit v, und aus dieser Geschwindigkeit v hat dann Newton zuletzt mittelst der obigen Gleichung (E) die Central-Kraft $\varphi$, welche den Planeten treibt und in seiner Bahn erhält, selbst noch ausgemittelt. Der folgende (§. 49.) zeigt in seiner ersten Aufgabe, wie dasselbe Problem aus den beiden Gleichungen für die freie Bewegung direkt gelöst wird.

hends auf der Tangential-Ebene der Fläche L senkrecht steht *). Also beschreibt der Atom, auf welchen außer der Anfangs-Geschwindigkeit entweder gar keine Kräfte wirken, oder auf welchen fortwährend nur Kräfte in der Richtung der Bahn selbst wirken, allemal eine solche Bahn, daß zwischen zweien ihrer Punkte ein Minimum oder Maximum der Länge statt findet, in Bezug auf alle nächst anliegenden Kurven, welche in derselben Fläche L zwischen denselben Grenz-Punkten noch liegen können.

2) Bei der Bewegung in ganz freier Bahn muß die Centrifugal-Kraft $f \cdot dt$ genau gleich und entgegengesetzt seyn der Kraft $P \cdot dt$. — Es muß also seyn

$$(D)\cdots \quad \left\{ \begin{array}{rcl} f & = & P \\ \zeta + p & = & \pi \\ \zeta' + p' & = & \pi \\ \zeta'' + p'' & = & \pi \end{array} \right\},$$

oder

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f \cdot \cos\zeta + P \cdot \cos p & = & 0 \\ f \cdot \cos\zeta' + P \cdot \cos p' & = & 0 \\ f \cdot \cos\zeta'' + P \cdot \cos p'' & = & 0 \end{array} \right\} **).$$

---

*) Wenn man sich nämlich die Aufgabe stellt: die Kurve auf einer Fläche L zu finden, welche zwischen je zweien ihrer Punkte ein Minimum oder Maximum der Länge hat (unter allen nächsten Nachbar-Kurven in derselben Fläche L zwischen denselben Punkten), und diese Aufgabe nach dem im (§. 56. Analys.) angedeuteten Verfahren löst, so finden sich die Differenzial-Gleichungen der Kurve so, daß aus ihnen sogleich hervorgeht, wie die Krümmungs-Ebene der Bahn an jeder Stelle, auf der Tangential-Ebene der Fläche L senkrecht stehe.

**) Auch diese Gleichungen (D) bestätigen sich noch besonders aus den jetzt statt findenden Gleichungen der Bewegung, genau mittelst der Rechnung in der (Note zu III.). Es findet sich nämlich dort unmittelbar

1) $\qquad f \cdot \cos\zeta + P \cdot \cos p = X - \partial^2 x.$

Aber hier bei der freien Bewegung ist

2) $\qquad \partial^2 x = X, \quad \text{also} \quad X - \partial^2 x = 0;$

folglich wird auch die Gleichung (1.) jetzt

3) $\qquad f \cdot \cos\zeta + P \cdot \cos p = 0,$

welches die erstere der Gleichungen (D) ist. — Die beiden andern ergeben sich natürlich auf ganz analogem Wege.

Bei der freien Bewegung ist also die Richtung der Kraft P zu gleicher Zeit die Richtung des Krümmungs-Halbmessers, so daß der Mittelpunkt in der verlängerten Richtung von P liegt. Der Krümmungs-Halbmesser der Bahn liegt daher allemal in der Ebene, welche die Richtung der wirkenden Kraft $\varphi$ (welche in P und T zerlegt worden ist) mit der Tangente der Bahn macht. Ist dabei $\theta$ der Winkel, den die Richtung der allein wirkenden Kraft $\varphi$ mit dem Krümmungs-Halbmesser macht, so ist $\varphi \cdot \cos\theta$ die Kraft P; also ist auch, weil $f = P$ ist, nothwendig

(E)... $$\frac{v^2}{\varrho} = \varphi \cdot \cos\theta.$$

Mittelst dieser Gleichung kann man die einzig wirkende Kraft $\varphi$ finden, wenn $v$, $\varrho$ und $\theta$ bekannt sind *).

Anmerk. Man vergleicht auch gerne die Centrifugal-Kraft f irgend einer krummlinigen Bewegung, gegeben durch die Gleichung

1) $$f = \frac{v^2}{\varrho}$$

mit der Schwere g, wie solche an irgend einer Stelle der Erd-Oberfläche gerade ist. Man denkt sich nämlich die Fall-Höhe h, welche ein, ohne alle Anfangs-Geschwindigkeit frei und vermöge dieser konstant gedachten Schwere $g \cdot dt$ allein herabfallender Atom durchfallen muß, damit er gerade die obige Geschwindigkeit $v$ erhalte; und man hat dann nach (§. 33. Anmerk.)

---

*) Bei der Planeten-Bewegung um die Sonne S (letztere als fest gedacht) hat Newton aus den Kepler'schen Gesetzen, wie wir (S. 394.) gezeigt haben, und im folgenden (§. 49.) abermals zeigen werden, gefolgert, daß die Bewegung eine Central-Bewegung ist. — Aus der durch Beobachtungen bekannten Gleichung der elliptischen Bahn konnte er dann den Krümmungs-Halbmesser $\varrho$ und den Winkel $\theta$ finden; das Gesetz der Inhalte (§. 42., welches eines der Kepler'schen Gesetze ist) in Verbindung mit der Gleichung der Bahn gab dann die Geschwindigkeit $v$, und aus dieser Geschwindigkeit $v$ hat dann Newton zuletzt mittelst der obigen Gleichung (E) die Central-Kraft $\varphi$, welche den Planeten treibt und in seiner Bahn erhält, selbst noch ausgemittelt. Der folgende (§. 49.) zeigt in seiner ersten Aufgabe, wie daſſelbe Problem aus den beiden Gleichungen für die freie Bewegung direkt gelöst wird.

2) $$v^2 = 2gh.$$

Aus (1. und 2.) erhält man aber dann sogleich

3) $$\frac{f}{g} = \frac{2h}{\varrho},$$

d. h. die Centrifugal-Kraft f verhält sich zur Schwere g, wie diese doppelte Fall-Höhe zu dem Krümmungs-Halbmesser.

---

## Vierter Abschnitt.

### Verschiedene Uebungs-Aufgaben zur Lehre der krummlinigen Bewegung eines Atoms.

### §. 49.

#### Zur Bewegung der Himmelskörper.

**Erste Aufgabe.** Kepler hat aus den Beobachtungen der Planeten-Bewegungen folgende 3 Gesetze, nach ihm die Kepler'schen genannt, abstrahirt:

1) Die Planeten-Bahnen sind ebene Kurven, und der aus dem Mittelpunkt der Sonne auslaufende Radius-Vektor beschreibt Sektoren, welche mit den Zeiten proportional sind.

2) Die Bahnen der Planeten sind Ellipsen, und die Sonne bildet den einen Brennpunkt dieser Ellipsen.

3) Die Quadrate der Umlaufs-Zeiten verschiedener Planeten verhalten sich wie die Würfel der (ganzen oder halben) großen Axen ihrer Bahnen.

Stellen wir uns nun folgende Aufgabe:

Ein Atom bewege sich um einen festen Punkt F' (Fig. 14.), der den Mittelpunkt der Sonne vorstellen kann, nach den beiden erstern Kepler'schen Gesetzen. Man soll die stetige Kraft $\varphi \cdot dt$ oder $\varphi$ finden, ihrer Größe und ihrer Richtung nach, welche diesen Atom treibt, damit er gerade diese Bewegung annimmt.

Es sey (Fig. 14.) AMBOD die elliptische Bahn des Atoms, $F'$ der eine Brennpunkt, $AO' = O'O = a$ die halbe große Axe der Bahn, wo dann A das Perihelium (Sonnen-Nähe), O dagegen das Aphelium (Sonnen-Ferne), so wie a die mittlere Entfernung genannt wird. Der Atom bewege sich von A in der Richtung nach M hin; die Zeit t werde von dem Augenblick an gerechnet, wo der Atom durch das Perihelium A geht, und sey $= t$, wenn er in M ist. Es sey ferner Winkel $AF'M = \theta$ und $F'M = r$ (wo $\theta$ die wahre Anomalie genannt wird), so ist die Gleichung dieser, durch das zweite Kepler'sche Gesetz hier gegebenen elliptischen Bahn nach (Geometrie §. 8.)

$$1) \qquad r = \frac{a \cdot (1 - e^2)}{1 + e \cdot \cos\theta},$$

wenn e die Excentrizität der Ellipse bedeutet, so daß

$$a \cdot e = F'O'$$

ist.

Der in der Zeit dt von dem Radius-Vektor r beschriebene elliptische Sektor ist, wenn $d\theta$ den in dieser Zeit dt erhaltenen Zuwachs von $\theta$ vorstellt (so daß man $d\theta = \vartheta\theta \cdot dt$ hat) offenbar, nach (Geom. §. 6.), $= \frac{1}{2} r^2 \cdot d\theta$, und da nach dem ersten Kepler'schen Gesetz dieser Inhalt mit der Zeit dt proportional seyn soll, so hat man noch die Gleichung

$$\alpha) \qquad r^2 \cdot d\theta = c \cdot dt \quad \text{oder} \quad r^2 \cdot \vartheta\theta = c,$$

wo c eine aus den Beobachtungen leicht zu bestimmende Konstante ist, da sie allemal der Quotient aus dem doppelten Sektor dividirt durch die Zeit, also auch aus dem doppelten Inhalt der ganzen Ellipse $2\pi \cdot a^2 \cdot \sqrt{1 - e^2}$ durch die ganze Umlaufs-Zeit T ist, so daß man

$$\beta) \qquad c = \frac{2\pi \cdot a^2 \cdot \sqrt{1 - e^2}}{T} = n \cdot a^2 \cdot \sqrt{1 - e^2}$$

erhält, wenn

$$\gamma) \qquad n = \frac{2\pi}{T}$$

gesetzt wird.

Die Gleichung ($\alpha$) kann nun so geschrieben werden:

2) $$r^2 \cdot \delta\theta = n \cdot a^2 \cdot \sqrt{1-e^2}$$ *).

*) Es ist nach (§§. 4. u. 5.) der Quotient $\frac{2\pi}{T}$ die Geschwindigkeit eines Punktes, welcher den Umfang $2\pi$ des Kreises, dessen Radius 1 ist, in der Zeit T gleichförmig durchläuft, also nach (§. 41. IV.) die Winkel-Geschwindigkeit eines fingirten Planeten, welcher mit dem wahren Planeten aus dem Perihelio zu gleicher Zeit ausginge, zu gleicher Zeit dahin zurückkäme, dagegen seine Bahn gleichförmig im Kreise zurücklegen würde. Daher wird die Zahl n die mittlere Geschwindigkeit genannt, so wie n·t die mittlere Bewegung heißt. Es ist aber eigentlich n·t die (wahre) Anomalie des fingirten Planeten, nämlich der in der Zeit t von seinem Radius-Vektor beschriebene Bogen, für den Radius 1. Der Unterschied $\theta - n \cdot t$ der (wahren) Anomalien $\theta$ und n·t, des wahren und des fingirten Planeten, heißt die Gleichung des Mittelpunkts, und diese ist positiv von A bis O, aber negativ von O bis A zurück; d. h. von A nach O hin ist der wahre Planet dem fingirten voraus, in O fallen sie beide wieder zusammen, und von O nach A hin bleibt der wahre Planet hinter dem fingirten zurück.

Die Zeit der täglichen (scheinbaren) Umdrehung des ganzen Himmels-Gewölbes um die Erde (d. h. die ganze Umdrehung der Erde um ihre Axe) ist konstant, daher als Zeit-Einheit zu gebrauchen. Wir nennen diese Zeit einen Sterntag. Aber eben so ist die Zeit, die verfließt, bis die Erde in ihr Perihelium zurückkommt, ebenfalls konstant, und wir nennen sie ein Sternjahr. Da die Erde, während sie sich um ihre Axe dreht, zu gleicher Zeit sich um die Sonne herumbewegt, so beschreibt die Sonne (scheinbar) in der gestirnten Himmels-Kugel eine Bahn (welche die Ekliptik genannt wird, und welche die Lage der Ebene der Erdbahn gegen die Fixsterne bezeichnet) von Westen nach Osten, d. h. der Richtung der täglichen Umdrehung der gestirnten Himmels-Kugel entgegen. Daher tritt die Sonne alle Tage etwas später in den Meridian, als der Stern, bei welchem sie gestern stand; folglich ist der wahre Sonnentag etwas länger als der Sterntag. Diese wahren Sonnentage sind einander ungleich, einmal weil die Ekliptik mit dem Aequator einen Winkel macht, und dann auch, weil die (scheinbare) Bewegung der Sonne in der Ekliptik nach dem ersten Kepler'schen Gesetze sich richtet, also ungleichförmig ist. Denkt man sich aber eine fingirte Sonne in derselben Zeit gleichförmig den Aequator durchlaufend, in welcher die wahre Sonne die Ekliptik durchzieht, so giebt diese fingirte Sonne den mittlern Sonnentag (oder die mittlere Zeit), den wir in 24 Stunden, 24·60 Minuten, 24·60·60 oder 86400 Sekunden zertheilen. — Diese Sekunde mittlerer Zeit, in so ferne sie ebenfalls konstant ist, nehmen wir nun hier als Zeit-Einheit. — Der Sterntag hat nur 86164,09 solcher Sekunden mittlerer Zeit, d. h. es ist 1 mittlerer Sonnentag = 1,0027379 Sterntage.

Diese zwei Gleichungen (1. und 2.) sind also dasmal vorausgesetzt.

Zerlegen wir nun die gesuchte Kraft $\varphi$ in zwei Kräfte X und Y nach rechtwinklichen Axen, die wir durch $F'$ legen, und wovon wir die erstere mit $F'X$ zusammenfallen lassen wollen, so daß die andere darauf senkrecht steht; bezeichnen wir ferner die rechtwinklichen Koordinaten-Werthe $F'P$ und $MP$ bezüglich durch x und y, so daß man

3) $x = r \cdot \cos\theta$ und 4) $y = r \cdot \sin\theta$

hat, so sind die beiden Gleichungen der Bewegung in der Ebene nach (§. 41.)

5) $\partial^2 x = X$ und 6) $\partial^2 y = Y$.

Aus diesen Gleichungen (1. — 6.) müssen sich nun X und Y als (explizite oder implizite) Funktionen von t finden lassen; also ist dann auch $\varphi$ der Größe und Richtung nach gefunden. Die Rechnung erfordert theoretisch auch weiter nichts, als daß man aus den letzt erwähnten 6 Gleichungen 4 der Veränderlichen x, y, r, $\theta$, t eliminirt, und aus den beiden übrig bleibenden Gleichungen X und Y noch berechnet.

Wie immer, so erfordert aber auch hier die Ausführung der Rechnung einige Aufmerksamkeit, wenn sie nicht mit zu großen Schwierigkeiten verknüpft bleiben soll. Man muß daher hier von den beiden Gleichungen (5. und 6.) erst nach (§. 41. II.) die beiden Integrale nehmen, nämlich

$$(\odot)\cdots \quad v^2 - v^2 = 2\int_{t\div 0}(X \cdot \partial x + Y \cdot \partial y) \cdot dt$$

und

$$(\mathbb{C})\cdots \quad y \cdot \partial x - x \cdot \partial y = \int (X \cdot y - Y \cdot x) \cdot dt;$$

dann in diesen beiden Gleichungen, die statt der (5. und 6.) genommen werden, die Polar-Koordinaten einführen nach (§. 41. III.), so daß sie in

$$(A)\cdots \quad v^2 = r^2 \cdot \partial\theta^2 + \partial r^2 = v^2 + 2\int_{t\div 0}(X \cdot \partial x + Y \cdot \partial y) \cdot dt$$

und

$$(B)\cdots \quad r^2 \cdot \partial\theta = \int (Y \cdot x - X \cdot y) \cdot dt$$

übergehen; und letztere Gleichungen (A. und B.) muß man nun statt der Gleichungen (5. und 6.) nehmen.

Die (B.) mit der (2.) verglichen zeigt sogleich, daß hier das Integral zur Rechten in (B.) konstant, also

$$(C)\cdots \quad Y\cdot x - X\cdot y = 0, \quad \text{d. h.} \quad \frac{Y}{X} = \frac{y}{x}$$

ist. Weil aber $\frac{Y}{X}$ nach (§. 12.), abgerechnet vom ($\pm$) Zeichen, allemal die trigonometrische Tangente des Winkels ist, den $\varphi$ mit der Axe der x macht, und $\frac{y}{x} = tg\,\theta$ ist, so zeigt die Gleichung (C), daß jener Winkel $= \theta$, oder $= \pi - \theta$ ist; d. h. die Kraft $\varphi$ ist in der Richtung des Radius-Vektor F'M (entweder nach F' hin, oder von F' ab wirkend). Die Bewegung gehört also zu den im (§. 42.) betrachteten Central-Bewegungen, wie wir dies auch daselbst in der Note bereits auf demselben Wege, wie eben hier, gezeigt haben.

Daß aber die Kraft $\varphi$ nach F' hin (und nicht in der entgegengesetzten Richtung) wirken müsse, lehrt die bloße Ansicht der Bahn, in so ferne sie eine geschlossene ist; also sind

$$\pi - \theta \quad \text{und} \quad \tfrac{1}{2}\pi + \theta$$

die Winkel, welche die Kraft $\varphi$ mit den Axen macht; folglich ist auch

$$X = \varphi\cdot cos(\pi - \theta) = -\varphi\cdot cos\,\theta = -\varphi\cdot\frac{x}{r}$$

und $$Y = \varphi\cdot cos(\tfrac{1}{2}\pi + \theta) = -\varphi\cdot sin\,\theta = -\varphi\cdot\frac{y}{r}.$$

Man hat daher

$$X\cdot\partial x + Y\cdot\partial y = -\varphi\cdot\frac{x\cdot\partial x + y\cdot\partial y}{r},$$

oder, weil $x^2 + y^2 = r^2$, also $x\cdot\partial x + y\cdot\partial y = r\cdot\partial r$ ist,

$$X\cdot\partial x + Y\cdot\partial y = -\varphi\cdot\partial r.$$

Die Gleichung (A) wird daher jetzt

$$(D)\cdots \quad v^2 = r^2\cdot\partial\theta^2 + \partial r^2 = v^2 - 2\int_{t=0}(\varphi\cdot\partial r)\cdot dt;$$

und diese Gleichung muß also noch zur Bestimmung von $\varphi$, der Größe nach, dienen. — Differenziirt man aber diese Gleichung, um das $\int$ Zeichen wegzumachen, so erhält man

7) $-\varphi \cdot \partial r = \frac{1}{2}\partial(v^2)$, oder $\varphi = -v \cdot \frac{\partial v}{\partial r} = --v \cdot \partial v_r$,

so daß alles jetzt nur noch darauf ankommt, aus den durch die Kepler'schen Gesetze gegebenen, und hier vorausgesetzten Gleichungen (1. und 2.) die Geschwindigkeit v (in r ausgedrückt) zu finden.

Schreibt man aber die Gleichung (1.) so:

8) $$\frac{1}{r} = \frac{1 + e \cdot \cos\theta}{a \cdot (1 - e^2)},$$

und differenziirt man sie jetzt, so erhält man

9) $$\frac{\partial r}{r^2} = \frac{e \cdot \sin\theta \cdot \partial\theta}{a \cdot (1 - e^2)}.$$

Eliminirt man nun aus den Gleichungen (1. oder 8., 2. u. 9.) und der nachstehenden

10) $$v^2 = r^2 \cdot \partial\theta^2 + \partial r^2$$

sowohl $\theta$ als auch $\partial\theta$ und $\partial r$, so erhält man

(E)··· $$v^2 = -n^2 \cdot a^2 + 2\frac{n^2 \cdot a^3}{r}.$$

Diese Gleichung nach r differenziirt, giebt dann sogleich

$$-v \cdot \partial v_r = \frac{n^2 \cdot a^3}{r^2};$$

also daß nach (7.)

(F)··· $$\varphi = \frac{n^2 \cdot a^3}{r^2} = 4\pi^2 \cdot \frac{a^3}{T^2} \cdot \frac{1}{r^2}$$

gefunden ist *).

Dächte man sich einen zweiten Atom nach denselben zwei erstern Kepler'schen Gesetzen sich um F' herum bewegend, wenn auch in einer andern Ebene; und fände man bei Vergleichung dieser beiden Bewegungen, daß auch noch das dritte Kepler'sche Gesetz statt findet, nämlich daß $\frac{a^3}{T^2}$ in beiden Bewegungen

*) Die Kraft $\varphi$ all, welche unter den hier gemachten Voraussetzungen den Planeten in seiner Bahn erhält, ist allemal gegen die Sonne gerichtet, und ist mit demumgekehrten Quadrat der Entfernung r von der Sonne proportional.

einerl und denselben Werth hat, so würde aus der Gleichung (E) folgern, daß in gleichen Entfernungen von F', beide Atome von einer und derselben Kraft $\varphi$ in ihren Bahnen erhalten würden *).

Setzte man

11) $$n^2 \cdot a^3, \quad \text{oder} \quad 4\pi^2 \cdot \frac{a^3}{T^2} = \mu,$$

so wäre

(G)... $$\varphi = \frac{\mu}{r^2},$$

und $\mu$ wäre diese Kraft $\varphi$ in der Einheits-Entfernung (für $r = 1$); und der Werth von $\mu$ bliebe also in beiden Bewegungen ein und derselbe **).

---

*) Für die Bewegungen der verschiedenen Planeten um die (als ruhend gedachte) Sonne, geht also aus dem dritten Kepler'schen Gesetze hervor, daß sie alle durch eine Kraft in ihren Bahnen erhalten werden, welche in der Einheits-Entfernung von der Sonne eine und dieselbe ist, nach dem Quadrat der Entfernungen aber abnimmt.

**) Man nennt diese Kraft, mit welcher die materiellen Atome in der Natur gegen einander getrieben werden, und welche im umgekehrten Verhältniß des Quadrats der Entfernung steht, die allgemeine Attraktion oder Anziehung, auch die allgemeine Schwere. — In so ferne ein Atom B auf der Erd-Oberfläche von jedem Atom des ganzen Erd-Körpers nach demselben Gesetze, nämlich nach dem ungekehrten Quadrat der Entfernung, angezogen wird, so kann man nach (§ 17.) die einzige Kraft finden, der Größe und Richtung nach, welche dasselbe leistet, als alle diese unendlich vielen einzelnen Kräfte, die auf den Atom B wirken. Diese mittlere Kraft giebt die allgemeine irdische Schwere für den Atom B an dieser Stelle der Erd-Oberfläche. Man findet sie:

1) Für den Fall, daß die Erde eine vollkommene und aus homogen concentrischen Schichten bestehende Kugel ist, der Richtung nach mit dem durch B gehenden Radius der Kugel zusammenfallend, der Größe nach aber genau so, wie wenn alle Atome der gesammten Erd-Kugel in ihrem Mittelpunkte vereint wären. Diese allgemeine Schwere ist daher für jede Stelle der Erd-Kugel-Oberfläche eine und dieselbe.

2) Für den Fall, daß die Erde ein Ellipsid ist, welches durch Umdrehung einer, wenig vom Kreise verschiedenen Ellipse um ihre kleine Axe entsteht (wo denn die kleine Axe der Ellipse die Entfernung der beiden Pole, die große Axe dagegen der Durchmesser des Aequators wird), welches jedoch auch aus concentrischen homogenen (ellipsoidischen, ähnlichen)

Nehmen wir nun die gerade umgekehrte

Zweite Aufgabe. Ein Atom hat an einer Stelle A, in

---

Schichten bestehend gedacht wird, findet sich diese allgemeine Schwere, deren Richtung immer mit der Normale (an das Ellipsoid) zusammenfallend gedacht wird, vom Pol nach dem Aequator hin (in den einzelnen Parallel-Kreisen) abnehmend, so daß, wenn sie im Pole durch G, in dem Parallel-Kreise, dessen Breite $\psi$ ist, durch G′ bezeichnet wird, man hat

1) $$G' = G\cdot(1-\tfrac{1}{289}\cdot\cos\psi^2),$$

also daß am Aequator, wo $\psi = 0$, diese Schwere $= G\cdot(1-\frac{1}{289}) = \frac{288}{289}\cdot G$ ist. — In der Breite, deren Sinus $= 1/\sqrt{2}$ ist, findet sich diese allgemeine irdische Schwere genau so, wie wenn die Erde eine vollkommene Kugel wäre, deren Halbmesser mit dem Halbmesser des Meridians zusammenfällt, und auf deren Oberfläche der Atom B gedacht wird.

Unter Halbmesser des (elliptischen) Meridians versteht man aber den Halbmesser eines Kreises, der mit dem Meridian einerlei Umfang hat. Für unsere Erde hat man gefunden, Halbmesser des Aequators = 3271691; Halbe Erd-Axe = 3260964; Verhältniß dieser beiden 305:304; Halbmesser des Meridians = 3266330; alles in Toisen ausgedrückt, während 1 Toise = 6,21002 preuß. oder rhnl. Fuße ist.

Die auf diesem Wege gefundene Kraft G′ für die Breite $\psi$ ist jedoch nicht die Schwere, wie sie sich bei dem Fall der Körper, bei Pendel-Schwingungen, bei dem Gewichte der Körper, überhaupt bei irdischen Erscheinungen ausweist, sondern letztere ist noch kleiner, wegen der Umdrehung der Erde um ihre Axe, welche in jedem Sterntag, also in 86164 Sekunden mittlerer Zeit, einmal ganz vollendet wird, und wodurch auf jedem Parallel-Kreis, dessen Radius r ist, jeder Atom auf der Erd-Oberfläche nach (§. 48. II.) eine Centrifugal-Kraft f erhält, in der Richtung (Fig. 39.) BD′ des verlängerten Radius BD = r, so daß

$$f = \frac{4\pi^2\cdot r}{T^2}$$

ist, wenn T die Länge des Sterntags, also 86164 Sekunden mittl. Zeit, und r den Radius des Parallel-Kreises in preuß. (rhnl.) Fußen ausdrückt.

Weil aber bei der Bestimmung dieser Centrifugal-Kraft die Erde als eine Kugel in Rechnung gebracht werden kann, deren Halbmesser R der Halbmesser des Meridians seyn mag, so daß R = 20284000 preuß. (rhnl.) Fuße ist, so hat man, wenn $\psi$ die Breite des Parallel-Kreises BD vorstellt, die vorstehende Centrifugal-Kraft f so:

2) $$f = \frac{4\pi^2\cdot R\cdot\cos\psi}{T^2},\quad \text{wo } \pi = 3{,}14159\cdots.$$

Denkt man sich nun in dem Orte B einen Horizont Hh, und zerlegt man diese Centrifugal-Kraft f, welche die Richtung BD′ hat, in die beiden Seiten-Kräfte $f\cdot\sin\psi$ in der Richtung BH, und $f\cdot\cos\psi$ in der Richtung BB′, welche letztere der Richtung der Schwere genau entgegen wirkt,

einer gewissen Richtung AD (Fig. 35.) eine gewisse Anfangs-Geschwindigkeit v, und wird außerdem von einer Kraft stetig und zu jeder Zeit nach einem festen Punkte S hin getrieben. Diese Kraft $\varphi$ ist in der Entfernung r von S allemal $= \frac{\mu}{r^2}$,

---

so wird offenbar die allgemeine irdische Schwere in B vermindert erscheinen, und zwar um das Theilchen

$$\frac{4\pi^2 \cdot R \cdot \cos\psi^2}{T^2},$$

welches mit dem Quadrat des Kosinus der Breite $\psi$ im Verhältniß steht, so daß diese Verminderung im Aequator am größten, im Pol dagegen Null ist. — Ist also G' die allgemeine irdische Schwere an dem Orte B, und g die bei den Beobachtungen irdischer Bewegungen (an demselben Orte B) wirklich in die Sinne fallende Schwere, so hat man

$$3) \quad g = G' - \frac{4\pi^2 \cdot R \cdot \cos\psi^2}{T^2} = G' \cdot \left(1 - \frac{4\pi^2 \cdot R \cdot \cos\psi^2}{G' \cdot T^2}\right).$$

Man berechnet nun $\frac{4\pi^2 \cdot R}{G' \cdot T^2}$ (wo alles bekannt ist, sobald man im Nenner statt G' das aus Pendel-Beobachtungen (S. §. 51.) genommene und nur wenig von G' verschiedene g selbst setzt), und man findet dann statt der (3.) diese andere Gleichung

$$4) \quad g = G' \cdot \left(1 - \frac{1}{289} \cdot \cos\psi^2\right) = G' \cdot \left(1 - \frac{1}{17^2} \cdot \cos\psi^2\right).$$

Setzt man hier statt G' seinen Werth aus (1.), so ergiebt sich, wenn man das Glied $\frac{1}{289} \cdot \frac{1}{289} \cdot \cos\psi^4$ außer Acht läßt,

$$5) \quad g = G \cdot \left(1 - \frac{1}{289} \cdot \cos\psi^2\right),$$

wo G die allgemeine irdische Schwere am Pol, g aber die bei irdischen Bewegungen in der Breite $\psi$, wirklich in die Sinne fallende Schwere, die man auch die örtliche nennen könnte, bedeutet. — In diesem Verhältniß (5.) nimmt also die örtliche Schwere g vom Pol nach dem Aequator zu ab.

Geschähe die Umdrehung der Erde um ihre Axe schneller, so könnte bald die Centrifugal-Kraft so anwachsen, daß sie, am Aequator, der allgemeinen irdischen Schwere gleich würde, so daß im Aequator die Materie auf der Erd-Oberfläche aufhören würde, Schwere zu zeigen; und zwar würde dies eintreten, sobald diese Umdrehung 17 mal schneller vor sich ginge, als dies der Fall ist.

Umgekehrt ist es höchst wahrscheinlich, wenn nicht ganz gewiß, daß gerade die Centrifugal-Kraft Ursache ist von der Abweichung der Erde (und der Planeten überhaupt) von ihrer (anfänglichen) Kugelgestalt, in so ferne die flüssigen Theile der größern Centrifugal-Kraft am Aequator nachgeben mußten (s. den dritten Theil).

wo $\mu$ einen konstanten (von t unabhängigen) Werth haben soll. Man soll diese Bewegung näher bestimmen.

Auflösung. Diese Aufgabe ist nur ein noch speziellerer Fall der im (§. 43.) bereits betrachteten speziellen Central-Bewegung; es ist nämlich jetzt das dortige

$$F_r = \varphi = \frac{\mu}{r^2},$$

so daß jetzt

$$\int F_r \cdot dr = -\frac{\mu}{r}, \quad \text{also} \quad \int_{r\ldots r'} F_r \cdot dr = \frac{\mu}{r'} - \frac{\mu}{r}$$

ist. Man hat daher hier sogleich die beiden Integral-Gleichungen der Bewegung

$$(\odot)\cdots \quad v^2 \text{ oder } \partial r^2 + r^2 \cdot \partial\theta^2 = \left(v^2 - 2\frac{\mu}{r'}\right) + 2\frac{\mu}{r}$$

und

$$(\mathbb{C})\cdots \qquad r^2 \cdot \partial\theta = c,$$

wo die Konstante c bereits in der Note zu (§. 42. I.) ihre Bestimmung gefunden hat, nämlich $c = v \cdot r' \cdot \sin(\theta' + \alpha)$*).

Um die Gleichungen ($\odot$ und $\mathbb{C}$) noch einmal zu integriren, eliminire man aus ihnen t nach (§. 18. Analys.), indem man nämlich zuvor

$$\frac{1}{\partial t_\theta} \text{ statt } \partial\theta \text{ (oder } \partial\theta_t)$$

und

$$\frac{\partial r_\theta}{\partial t_\theta} \text{ statt } \partial r \text{ (oder } \partial r_t)$$

substituirt, dann aber $\partial t_\theta$ eliminirt. Dies giebt

$$1) \qquad c^2 \cdot (\partial r_\theta^2 + r^2) = r^4 \cdot \left[\left(v^2 - 2\frac{\mu}{r'}\right) + 2\frac{\mu}{r}\right].$$

---

*) Die Gleichung ($\mathbb{C}$) selbst giebt überdieß, wenn man links und rechts die Integrale nach allem t nimmt, noch

$$2 \times \text{Sekt} \cdot \text{ASM} = c \cdot t,$$

also

$$c = \frac{2 \times \text{Sekt} \cdot \text{ASM}}{t},$$

wodurch c auf's neue bestimmt ist, wenn nur für irgend eine Zeit t der Inhalt des Sektors ASM gegeben ist, oder berechnet werden kann.

Aus dieſer Gleichung findet man $\partial r_\theta$, alſo auch $\partial\theta_r$ in r ausgedrückt, auf algebraiſchem Wege, und hat dann ſogleich $\theta$ in r. — Es iſt aber bequemer einen neuen Veränderlichen $\varrho$ einzuführen mittelſt der Gleichung

2) $$r = \frac{1}{\varrho}, \quad \text{ſo daß} \quad \partial r_\theta = -\frac{\partial\varrho_\theta}{\varrho^2}$$

wird. Nach Subſtitution dieſer Werthe geht die Gleichung (1.), wenn noch

3) $$\frac{1}{r'} = \varrho'$$

geſetzt wird, über in

$$c^2\cdot(\partial\varrho_\theta{}^2+\varrho^2) = (v^2-2\mu\varrho')+2\mu\cdot\varrho,$$

und giebt, wenn man ſie nach $\partial\varrho_\theta$ oder $\frac{1}{\partial\theta_\varrho}$ algebraiſch auflöſt,

$$\partial\theta_\varrho = \frac{c}{\sqrt{(v^2-2\mu\varrho')+2\mu\cdot\varrho-c^2\cdot\varrho^2}},$$

oder

$$\theta = \omega+\int\frac{c}{\sqrt{(v^2-2\mu\varrho')+2\mu\cdot\varrho-c^2\cdot\varrho^2}}\cdot d\varrho,$$

wo $\omega$ eine noch zu beſtimmende Konſtante iſt. Dieſes Integral zur Rechten wird nun nach (§. 32. III. Analyſ.) gefunden, und liefert

$$\theta-\omega = \frac{1}{\cos}\frac{\mu-c^2\cdot\varrho}{\sqrt{\mu^2+c^2(v^2-2\mu\varrho')}},$$

oder, wenn man ſtatt $\varrho$ ſeinen Werth $\frac{1}{r}$ aus (2.) ſubſtituirt,

$$\cos(\theta-\omega) = \frac{\mu-c^2\cdot\frac{1}{r}}{\sqrt{\mu^2+c^2\cdot(v^2-2\mu\varrho')}},$$

d. h. wenn der Kürze wegen

4) $$\frac{1}{\mu}\cdot\sqrt{\mu^2+c^2\cdot(v^2-2\mu\varrho')} = e$$

geſetzt wird,

5) $$r = \frac{c^2 : \mu}{1 + e \cdot \cos(\theta - \omega)}$$ *),

und dies ist die Gleichung der Bahn zwischen den Polar-Koordinaten $\theta$ und r.

Die Konstante $\omega$ kann dadurch bestimmt werden, daß man in dieser Gleichung $\theta'$ und $r'$ statt $\theta$ und r schreibt. Man mache dann in der Figur (Fig. 35.) W. $X'SZ = \omega$, führe neue rechtwinkliche Koordinaten-Axen ein, von denen SZ die eine ist, die andere aber durch S hindurch geht und auf SZ senkrecht steht, bezeichne die neuen Koordinaten-Werthe, auf diese neuen Axen bezogen, durch $x'$ und $y'$, so daß man

6) $r \cdot \cos(\theta - \omega) = x'$ und $r \cdot \sin(\theta - \omega) = y'$,

also

7) $$r = \sqrt{x'^2 + y'^2}$$

hat; und die Gleichung der Bahn wird dann

8) $\mu^2 \cdot y'^2 + \mu^2 \cdot (1 - e^2) \cdot x'^2 - 2\mu e c^2 \cdot x' - c^4 = 0$.

Dies ist aber die Gleichung einer Parabel, Hyperbel oder Ellipse, je nachdem $e^2 = 1$, oder $e^2 > 1$ oder $e^2 < 1$, d. h. je nachdem $r' \cdot v^2 \gtreqless 2\mu$ ist; und es hängt also von der (Anfangs-) Geschwindigkeit v, der (Anfangs-) Entfernung $r'$, so wie von der Intensität $\mu$ der stetig wirkenden Kraft (in der Entfernung 1), aber nicht von der Richtung der Anfangs-Geschwindigkeit ab, ob die Bahn paraboliſch, hyperboliſch oder elliptisch wird.

Setzen wir voraus eine elliptische Bahn, also $r' \cdot v^2 < 2\mu$, oder $e^2 < 1$, also auch $e < 1$, weil wir e positiv gedacht haben, so kann man noch die nähere Lage dieser Ellipse suchen. Da die Gleichung (5.), wenn man in ihr aus (6.) $\frac{x'}{r}$ statt $\cos(\theta - \omega)$ setzt, r in $x'$ rational giebt, so ist nach (Geom. §. 8. V.) S einer der Brennpunkte der Ellipse. Diese Gleichung

*) Eigentlich wird der Nenner $= 1 - e \cdot \cos(\theta - \omega)$; denkt man sich aber $\omega + \pi$ statt $\omega$ gesetzt, so geht derselbe in $1 + e \cdot \cos(\theta - \omega)$ über. Die willkührliche und noch zu bestimmende Konstante kann aber auch in der Form $\omega + \pi$ eingeführt werden.

(5.) giebt aber auch noch den kleinsten und größesten Werth von r, wenn $\cos(\theta-\omega) = +1$ oder $= -1$, also wenn $\theta-\omega = 0$ oder $\theta-\omega = \pi$ wird. — Perihelium und Aphelium dieser Bahn liegen also in der durch die Konstante $\omega$ bestimmten Axe SZ, auf beiden Seiten von S, und $\theta-\varphi$ ist die wahre Anomalie. Dieser kleinste und größte Werth von r findet sich aber bezüglich $= \frac{c^2}{\mu\cdot(1+e)}$ und $= \frac{c^2}{\mu\cdot(1-e)}$; die Summe beider ist $= \frac{2c^2}{\mu\cdot(1-e^2)}$; und dies ist die große Axe der Ellipse. Bezeichnen wir solche durch 2a, so hat man

$$9) \quad a = \frac{c^2}{\mu\cdot(1-e^2)}, \quad \text{oder} \quad \frac{c^2}{\mu} = a\cdot(1-e^2).$$

Subtrahirt man obige kleinste und größeste Werthe von r von einander, so erhält man mit Zuziehung der (9.) das Resultat 2ae; also ist ae die Entfernung des Mittelpunktes der Ellipse vom Brennpunkte S, und e die Excentrizität dieser Ellipse. — Setzt man endlich diesen Werth von $\frac{c^2}{\mu}$ in die Gleichung (5.) der Ellipse, so geht solche über in die Form

$$10) \quad r = \frac{a\cdot(1-e^2)}{1+e\cdot\cos(\theta-\omega)}.$$

Also hat man nun, wenn nur v, $r'$ und $\mu$ bekannt sind, die Größe und Lage der Axen dieser elliptischen Bahn, den kleinsten und größesten Abstand des bewegten Atoms von S, also auch die Lage des Perihelium und Aphelium, so wie die Gleichung dieser Ellipse in bekannter Form gefunden.

Die Gleichung (⊙) giebt die Geschwindigkeit an jeder Stelle; weil aber die Gleichungen (4. und 9.), wenn man aus ihnen c eliminirt, und $\frac{1}{r'}$ statt $\varrho'$ schreibt,

$$v^2-2\mu\varrho' = v^2-2\mu\cdot\frac{1}{r'} = -\frac{\mu}{a}$$

geben, so geht die Gleichung (⊙) über in

11)

11) $$v^2 = \mu \cdot \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right).$$

Die Gleichung (☾) giebt aber $\partial\theta = \frac{c}{r^2}$, also $\partial t_\theta = \frac{r^2}{c}$; setzt man daher statt r seinen Werth aus (10.), so hat man sogleich t in $\theta$, also auch $\theta$ in t.

Eliminirt man aus (☉ und ☾) $\partial\theta$, so bekommt man auch noch eine Gleichung zwischen $\partial r$ und r, also auch zwischen $\partial t_r$ und r, welche t in r, also auch r in t liefert.

## §. 50.

### Zur Ballistik.

#### Vorerinnerung.

Obgleich ein Planet einem Körper gleich geachtet werden kann, welcher zu irgend einer Zeit mit irgend einer Geschwindigkeit in irgend einer Richtung ausgeworfen worden ist, so unterscheidet sich doch die „Ballistik," oder „die Lehre der geworfenen Körper" dadurch wesentlich von der Bewegung der Planeten, daß der Planet von der allgemeinen Schwere (Attraktion) beständig nach der Sonne getrieben wird, und die stetig wirkende Kraft mit der Entfernung von der Sonne sich ändert, während die Kraft, welche die auf der Erde geworfenen Körper treibt, nämlich die örtliche Schwere, immer konstant und parallel mit sich wirkend angenommen wird. In der Anwendung macht der (bedeutende) Widerstand der Luft (und auch die Reibung der in der Regel sich drehenden Kugel mit der Luft) das Problem der Ballistik viel schwieriger als das der Planeten-Bewegung, so daß bis jetzt die theoretischen Resultate der Ballistik nur in sehr engen Grenzen mit den Erfahrungen in Uebereinstimmung haben gebracht werden können. Wir betrachten aber nichts desto weniger einige hieher gehörige Aufgaben, theils um mehr Beispiele zu unserer allgemeinen Theorie der Bewegung gegeben zu haben, theils auch, um dem Anfänger zu zeigen, auf welche Schwierigkeiten das Problem der Ballistik zunächst stößt.

Erste Aufgabe. Ein Atom wird (Fig. 34.) mit der Geschwindigkeit v in der Richtung AD ausgeworfen, seine Bewegung zu bestimmen (dies ist die im Beispiel zu §. 41. bereits gelöste Aufgabe).

Es sey AX horizontal, AY vertikal, W. DAX = a, W. DAY = b, so hat man, wenn g·dt die Schwere, x und y die Koordinaten des Atoms zu der Zeit t sind, und in A, t = 0 ge-

dacht wird, nach (§. 41.) die beiden Gleichungen der Bewegung, nämlich

$$\partial^2 x = 0 \quad \text{und} \quad \partial^2 y = -g,$$

welche, gehörig integrirt, nach und nach

$$\partial x = v \cdot \cos\mathfrak{a}, \qquad \partial y = v \cdot \cos\mathfrak{b} - g \cdot t,$$

und

1) $x = v \cdot t \cdot \cos\mathfrak{a}$, 2) $y = v \cdot t \cdot \cos\mathfrak{b} - \frac{1}{2} g \cdot t^2$

geben. Wenn man nun t aus letztern beiden Gleichungen eliminirt, so erhält man noch die Gleichung der Bahn

$$y = x \cdot \frac{\cos\mathfrak{b}}{\cos\mathfrak{a}} - \frac{1}{2} \frac{g}{v^2 \cdot \cos\mathfrak{a}^2} \cdot x^2,$$

oder

3) $$y = x \cdot tg\,\mathfrak{a} - \frac{1}{2} \frac{g}{v^2 \cdot \cos\mathfrak{a}^2} \cdot x^2,$$

wo $-x \cdot tg\,\mathfrak{a}$ statt $x \cdot tg\,\mathfrak{a}$ geschrieben, oder, was in der Rechnung denselben Erfolg hat, $\mathfrak{a}$ negativ in Rechnung gebracht werden muß, so oft die Anfangs-Richtung AD nicht, wie in der Figur, nach oben sondern nach unten zu geht. — Diese Gleichung (3.) ist die Gleichung einer Parabel. — Das Integral (§. 41. ⊙) giebt noch die Geschwindigkeit

4) $v^2 - v^2 = -2g \cdot y$, oder $v = \sqrt{v^2 - 2g \cdot y}$ *).

Alles dieses ist bereits im (Beispiel zu §. 41.) zu finden.

Eliminirt man die Höhe y aus (2. und 4.), so erhält man die End-Geschwindigkeit v auch in die Zeit t ausgedrückt. — Eliminirt man aber die Höhe y aus (3. und 4.), so erhält

---

*) Weil dieses Integral (§. 41. II. ⊙) also (§. 38. ⊙) statt findet, so gelten für diese Flug-Bahn alle die im (§. 39.) gezogenen Folgerungen, namentlich:

1) In gleichen Höhen hat der Atom beim Steigen und Fallen eine und dieselbe Geschwindigkeit.

2) Das Integral $\int_{t \div 0} v^2 \cdot dt$, oder $\int_{s \div 0} v \cdot ds$ für die beschriebene Bahn ist kleiner, als bei jeder andern nächst anliegenden Bahn, welche der geworfene Atom zwischen den zu $t = 0$ und $t = t$ gehörigen Grenz-Punkten hätte beschreiben mögen.

man auch die Geschwindigkeit v in die horizontale Entfernung x ausgedrückt, nämlich

$$5) \qquad v = \sqrt{\left(v^2 - 2gx \cdot tg\,\alpha + \frac{g^2}{v^2 \cdot \cos\alpha^2} \cdot x^2\right)}.$$

Will man die horizontale Wurf-Weite AE = x finden, so sucht man aus der Gleichung (3.) der Bahn den Werth x von x, welcher zu y = 0 gehört. Die Gleichung (3.) geht also jetzt über in

$$0 = x \cdot tg\,\alpha - \tfrac{1}{2}\frac{g}{v^2 \cdot \cos\alpha^2} \cdot x^2,$$

und giebt die Wurf-Weite

$$6) \qquad x = \frac{2v^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{g} = \frac{v^2 \cdot \sin 2\alpha}{g} = AE^*).$$

Der Winkel α heißt der Elevations-Winkel, und die Wurf-Weite AE wächst also mit dem Elevations-Winkel, hat aber ihr Maximum erreicht, wenn der Elevations-Winkel = 45° geworden ist. Je größer der Elevations-Winkel α über 45° wird, desto mehr nimmt die Wurf-Weite wieder ab. Uebrigens verhalten sich die Wurf-Weiten, unter sonst gleichen Umständen, wie die Quadrate der Anfangs-Geschwindigkeiten. — Die Geschwindigkeit in E ist, wie die in A.

Soll die größte Höhe BC des Wurfes gefunden werden, so sucht man den Werth AB = x' von x, oder den Werth t' von t, für welchen y ein Maximum, also $\partial y_x = 0$ oder $\partial y_t$, d. h. $\partial y = 0$ wird (vgl. Analys. §. 56.). Die Gleichung (3.) giebt aber, nach x differenzirt,

*) Suchte man die Zeit, um von A bis E zu kommen, so müßte man aus (1.) den Werth von t suchen, der zu x = x = AE gehört, und man würde finden, daß diese Zeit $= \frac{2v \cdot \sin\alpha}{g}$ ist, und zwar dieselbe, die ein in der Richtung AE geradlinig und gleichförmig mit der Geschwindigkeit $v \cdot \cos\alpha$ sich bewegender Atom gebrauchen würde, um von A bis E zu gelangen.

$$\partial y_x = tg\,\alpha - \frac{g}{v^2 \cdot cos\,\alpha^2} \cdot x,$$

während die (2.), nach t differenzirt,

$$\partial y = v \cdot cos\,\beta - g \cdot t = v \cdot sin\,\alpha - g \cdot t$$

giebt. Man hat daher sowohl

$$0 = tg\,\alpha - \frac{g}{v^2 \cdot cos\,\alpha^2} \cdot x',$$

als auch $$0 = v \cdot sin\,\alpha - g \cdot t';$$

und man erhält die horizontale Entfernung $x'$ der größten Höhe,

$$7) \quad x' = \frac{v^2 \cdot sin\,\alpha \cdot cos\,\alpha}{g} = \frac{\frac{1}{2} v^2 \cdot sin\,2\alpha}{g} = AB;$$

und die Zeit $t'$, in welcher der Atom auf dieser größten Höhe sich befindet, ist

$$8) \quad t' = \frac{v \cdot sin\,\alpha}{g}.$$

Hätte man aber $t'$ allein gefunden, so würde die Gleichung (1.) $x'$ dazu geliefert haben. —

Die größte Höhe $BC = y'$ findet man nun aber entweder als den Werth von y aus (2.), der zu dem Werthe $t = t'$ gehört, oder aus (3.) als den Werth von y, der zu $x = x'$ gehört. Jedesmal findet sich aber diese größte Höhe

$$9) \quad y' = \frac{v^2 \cdot sin\,\alpha^2}{2g} = BC.$$

Die größte Höhe wächst also mit dem Elevations-Winkel fortwährend, bis letzterer 90° geworden ist. Und unter sonst gleichen Umständen verhalten sich die größten Höhen wie die Quadrate der Anfangs-Geschwindigkeiten.

Vergleicht man aber (7. und 6.) mit einander, so bemerkt man sogleich, daß $AB = \frac{1}{2} AE$, d. h. daß die größte Höhe sich in der halben Wurf-Weite befindet.

In der größten Höhe C der Bahn ist, weil dann $\partial y = 0$ seyn muß, die Richtung der Geschwindigkeit v horizontal. Die Größe $v'$ dieser Geschwindigkeit findet sich aber nach (4.) aus der Gleichung

$$v' = \sqrt{v^2 - 2g \cdot y'},$$

also daß

10) $$v' = v \cdot \cos\alpha,$$

d. h. so wird, wie die horizontale Seiten-Geschwindigkeit zu jeder Zeit t ist (in so ferne man $\partial x = v \cdot \cos\alpha$ hat).

Nimmt man CX' und CY' auf einander senkrecht als neue Koordinaten-Axen, und setzt man

$$CP = x' \quad \text{und} \quad PM = y',$$

so finden zwischen x und x', y und y' die Gleichungen

$$y = BC - CP = \frac{v^2 \cdot \sin\alpha^2}{2g} - x',$$

und $$x = AB - MP = \frac{v^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{g} - y'$$

statt. Substituirt man nun diese Werthe statt y und x in die Gleichung (3.) der Bahn, so erhält man die neue Gleichung der Bahn,

11) $$y'^2 = \frac{2v^2 \cdot \cos\alpha^2}{g} \cdot x',$$

woraus erhellet, daß C der Scheitel, CX' der Haupt-Durchmesser oder die Axe der Parabel ist, und daß der Zweig der Parabel im Aufsteigen (der aufsteigende Zweig) dem Zweige bei'm Herabfallen (dem herabfallenden) congruent ist. Der Parameter dieser Parabel ist dabei $\frac{2v^2 \cdot \cos\alpha^2}{g}$.

Nennt man den Winkel, welchen die Tangente der Bahn in E mit dem Horizonte macht, den Einfalls-Winkel, so geht aus dieser letztern Betrachtung hervor, daß der Einfalls-Winkel bei dieser paraboliſchen Flug-Bahn allemal dem Elevations-Winkel $\alpha$ gleich ist.

Soll der Wurf durch einen Punkt F hindurchgehen, dessen Weite $AF_1 = x_1$ und Höhe $FF_1 = y_1$ gegeben sind, so müssen diese Werthe $x_1$ und $y_1$ statt x und y in die Gleichung (3.) der Bahn substituirt, diese Gleichung identisch machen. Es muß also dann seyn

12) $$y_1 = x_1 \cdot tg\,\alpha - \frac{g}{2v^2 \cdot \cos\alpha^2} \cdot x_1^2.$$

Diese Gleichung muß daher zwischen dem Elevations-Winkel $\alpha$ und der Anfangs-Geschwindigkeit $v$ statt finden, damit der Wurf gerade durch den Punkt F gehe.

Setzt man die Anfangs-Geschwindigkeit $v$ (welche bei'm Geschütz von der Ladung abhängt) als gegeben voraus, so kann man den Elevations-Winkel $\alpha$ aus dieser Gleichung (12.) dazu finden. Wird nämlich

$$tg\,\alpha = p, \quad \text{also} \quad \frac{1}{\cos\alpha^2} = \sec\alpha^2 = 1 + p^2$$

gesetzt, so geht die Gleichung (12.) über in

13) $$y_1 = x_1 \cdot p - \frac{g x_1^2}{2v^2}(1 + p^2);$$

und diese giebt, nach $p$ aufgelöst,

14) $p$ oder $tg\,\alpha = \dfrac{v^2 \pm \sqrt{v^4 - 2gv^2 \cdot y_1 - g^2 \cdot x_1^2}}{g \cdot x_1}$.

Diese beiden Werthe von $tg\,\alpha$ sind imaginär, wenn

$$v^4 - 2g \cdot v^2 \cdot y_1 - g^2 \cdot x_1^2$$

negativ wird; der Punkt F kann also dann mit dieser Anfangs-Geschwindigkeit $v$ gar nicht erreicht werden; sie sind einander gleich, wenn

15) $$v^4 - 2g \cdot v^2 \cdot y_1 - g^2 \cdot x_1^2 = 0$$

ist, und diese Gleichung giebt, wenn man $x_1$ und $y_1$ als vermöge dieser Gleichung (15.) zusammengehörige aber sonst beliebige Koordinaten-Werthe sich denkt, alle Punkte F in der Vertikal-Ebene, welche bei dieser Anfangs-Geschwindigkeit $v$ gerade noch (mit den durch die Gleichung $tg\,\alpha = \dfrac{v^2}{g x_1}$ gegebenen Elevations-Winkeln) erreicht werden können. Für alle Punkte F, welche innerhalb dieser durch die Gleichung (15.) gegebenen Grenzlinie liegen, ist der Radikand $v^4 - 2g \cdot v^2 \cdot y_1 - g^2 \cdot x_1^2$ in (14.) positiv, also $tg\,\alpha$ reell aber zwei-werthig; und es kann

also jeder dieser Punkte mit derselben Anfangs-Geschwindigkeit v unter zwei verschiedenen Elevations-Winkeln getroffen werden *).

Stellen wir nun die zusammengesetztere

zweite Aufgabe; nämlich genau wiederum die erste, jedoch unter der Voraussetzung, daß die Luft im Verhältniß des Quadrats der Geschwindigkeit, der Bewegung Widerstand leiste, so daß also eine Kraft $= \mu \cdot v^2 = \mu \cdot \partial s^2$ (wo $\mu$ nach t konstant ist) in Rechnung gebracht werden muß, der jedesmaligen Richtung der Bewegung genau entgegen.

Die Kosinusse der Winkel, welche diese Kraft $\mu \cdot v^2$ oder $\mu \cdot \partial s^2$ mit den Axen AX und AY macht, sind, da sie in der Richtung der Tangente der Bahn, aber entgegen, wirkt,

$$-\frac{\partial x}{\partial s} \quad \text{und} \quad -\frac{\partial y}{\partial s};$$

daher ist allemal

$$X = -\mu \cdot \partial s \cdot \partial x \quad \text{und} \quad Y = -g - \mu \cdot \partial s \cdot \partial y.$$

Die Gleichungen (§. 41. I.) der Bewegung sind daher dasmal

1) $\partial^2 x = -\mu \cdot \partial s \cdot \partial x$ und 2) $\partial^2 y = -g - \mu \cdot \partial s \cdot \partial y$,

wo

3) $\partial s = \sqrt{\partial x^2 + \partial y^2} = \partial x \cdot \sqrt{1 + \partial y_x^2}$

ist. Diese Gleichungen (1. u. 2.) müssen nun integrirt werden, unter der Voraussetzung, daß für $t = 0$

4) $\partial x = v \cdot \cos \mathfrak{a}$ und $\partial y = v \cdot \cos \mathfrak{b}$, also $\partial y_x = tg\, \mathfrak{a}$

wird, wo $\mathfrak{a}$ (in $tg\, \mathfrak{a}$) negativ in Rechnung gebracht werden muß, so oft die Anfangs-Geschwindigkeit nach unten gerichtet ist.

Die Integrale (⊙ und ℂ des §. 41. II.) finden hier nicht statt. Man muß daher die Integration nach (§. 53. Analys.) versuchen, und zu dem Ende vor allen Dingen t nach (§. 18.

*) Aus der Formel (14.), wenn man ihre geometrische Bedeutung aufsucht, geht übrigens noch hervor, daß die beiden Anfangs-Richtungen, unter denen man mit derselben Anfangs-Geschwindigkeit v das Ziel treffen kann, von der Linie gleich weit abliegen, welche den Winkel FAY halbirt.

Analyſ.) eliminiren. Setzt man aber, jenem (§. 18.) gemäß, $\frac{1}{\partial t_x}$ ſtatt $\partial x$, $-\frac{\partial^2 t_x}{\partial t_x^3}$ ſtatt $\partial^2 x$, ferner $\frac{\partial y_x}{\partial t_x}$ ſtatt $\partial y$, und

$$\frac{\partial t_x \cdot \partial^2 y_x - \partial y_x \cdot \partial^2 t_x}{\partial t_x^3} \text{ ſtatt } \partial^2 y,$$

ſo gehen die Gleichungen (1. und 2.) über, weil auch noch $\partial s = \frac{\partial s_x}{\partial t_x}$ iſt, in

5) $$\partial^2 t_x = \mu \cdot \partial s_x \cdot \partial t_x$$

und

6) $$\partial t_x \cdot \partial^2 y_x - \partial y_x \cdot \partial^2 t_x = -g \cdot \partial t_x^3 - \mu \cdot \partial y_x \cdot \partial s_x \cdot \partial t_x,$$

welche letztere, wenn man $\partial^2 t_x$ aus (5.) ſubſtituirt, noch viel einfacher geſchrieben werden kann, nämlich

7) $$\partial^2 y_x = -g \cdot \partial t_x^2.$$

Differenzirt man nun, um aus (5. und 7.) alles t eliminiren zu können, die (7.) nach x, und eliminirt man dann aus (5. 7.) und dieſer neuen Gleichung ſowohl $\partial t_x$ als auch $\partial^2 t_x$, ſo ergiebt ſich die Gleichung der Bahn

8) $$\partial^3 y_x = 2\mu \cdot \partial s_x \cdot \partial^2 y_x,$$

oder $$\partial^3 y_x - 2\mu \cdot \partial^2 y_x \cdot \sqrt{1 + \partial y_x^2} = 0,$$

welche nun integrirt werden muß.

Führt man zu dem Ende, in ſo ferne die Gleichung (8.) nicht y ſelbſt enthält, einen neuen Veränderlichen p ein, nach (§. 51. Analyſ.), mittelſt der Gleichung

9) $$\partial y_x = p,$$

ſo ſchreibt ſich die (8.) ſo;

10) $$\partial^2 p_x - 2\mu \cdot \sqrt{1 + p^2} \cdot \partial p_x = 0,$$

ſo daß dieſe nur noch von der zweiten Ordnung iſt. Nimmt man aber hier von jedem Glied das Integral nach x, ſo erhält man ſogleich

$$\partial p_x = 2\mu \cdot \int \sqrt{1 + p^2} \cdot dp,$$

oder nach (§. 32. III. Analyſ.)

11) $\frac{1}{\mu}\cdot\partial p_x = p\cdot\sqrt{1+p^2}+log(p+\sqrt{1+p^2})-a,$

wo a eine noch näher zu bestimmende Konstante ist. Um a zu finden, bestimme man für $t=0$ die Werthe von p und $\partial p_x$. Es ist aber aus (7.)

12) $\partial p_x = \partial^2 y_x = -g\cdot\partial t_x^2 = -\frac{g}{\partial x^2},$

folglich für diesen Werth 0 von t, wegen (4.),

13) $\partial p_x = -\frac{g}{v^2\cdot cos\,\alpha^2}$ (für $t=0$).

Die Gleichung (11.) giebt daher für $t=0$ die Konstante a so:

14) $a = \frac{g}{\mu\cdot v^2\cdot cos\,\alpha^2}+tg\,\alpha\cdot sec\,\alpha+log(tg\,\alpha+sec\,\alpha).$

Setzt man nun in (11.) $\frac{1}{\partial x_p}$ statt $\partial p_x$, so hat man sogleich

15) $x=\frac{1}{\mu}\cdot\int\frac{1}{p\cdot\sqrt{1+p^2}+log(p+\sqrt{1+p^2})-a}\cdot dp;$

und, wegen $\partial y_p = \partial y_x\cdot\partial x_p = p\cdot\partial x_p$, auch noch

16) $y=\frac{1}{\mu}\cdot\int\frac{p}{p\cdot\sqrt{1+p^2}+log(p+\sqrt{1+p^2})-a}\cdot dp.$

Diese Integrationen können in endlicher Form nicht ausgeführt werden. Hätte man aber die Integrale, so würde man aus den Gleichungen (15. u. 16.), indem p eliminirt wird, die Gleichung der Bahn haben. — Das System der beiden Gleichungen (15. u. 16.) ersetzt also die Gleichung der Bahn.

Um eine (Integral-) Gleichung zwischen t und x zu finden, nehme man die (7.), setze $\partial p_x$ statt $\partial^2 y_x$, multiplizire sie mit $\partial x_p^2$, und man erhält

17) $\partial x_p = -g\cdot\partial t_p^2$, oder $\partial t_p = \frac{1}{\sqrt{g}}\cdot\sqrt{-\partial x_p},$

d. h.

18) $t=\frac{1}{\sqrt{g\mu}}\int\frac{1}{[a-p\cdot\sqrt{1+p^2}-log(p+\sqrt{1+p^2})]^{\frac{1}{2}}}\cdot dp.$

Ferner ist noch

$$v^2 = \partial x^2 \cdot (1 + \partial y_x^2) = \partial x^2 \cdot (1 + p^2),$$

oder, weil nach (7.)

$$\partial x^2 = -\frac{g}{\partial y_x^2} = -\frac{g}{\partial p_x} = -g \cdot \partial x_p$$

ist,

$$v^2 = -g \cdot (1 + p^2) \cdot \partial x_p,$$

d. h.

$$19)\quad v^2 = \frac{g \cdot (1 + p^2}{\mu \cdot [a - p \cdot \sqrt{1 + p^2} - log(p + \sqrt{1 + p^2})]}.$$

Läßt man die Integrale (15. 16. u. 18.) mit $p = 0$ aufhören, d. h. setzt man nach geschehener Integration und gehöriger Bestimmung der Konstanten $p = 0$, so erhält man x, y und t, wie sie der größten Höhe, also dem Scheitel (Gipfel) des Wurfes zukommen. Für negative Werthe von p erhält man Punkte des fallenden Zweiges der Bahn. Für den Werth von p, der zu $y = 0$ sich findet (und wofür nicht der Anfangs-Werth $tg\,\alpha$ angenommen wird), findet man x = der Wurf-Weite. Diese Wurf-Weite ist nun nicht mehr das Doppelte von der Abscisse der größten Höhe des Wurfes; auch ist diese Wurf-Weite nicht mehr die größte bei einem Winkel von 45°, sondern bei einem kleinern Winkel; endlich ist der Einfalls-Winkel nicht mehr dem Elevations-Winkel gleich, sondern größer als der letztere. Auch ist die Geschwindigkeit in E anders als in A. — Denkt man sich den fallenden Zweig der Bahn unter dem Horizonte AE ohne Ende verlängert, so wird die Bewegung, je länger sie dauert, desto mehr vertikal und gleichförmig. — Dieses letztere kann man aus den Differenzial-Gleichungen schließen, welche für die Bewegung aus den oben gefundenen Gleichungen erhalten werden, wenn man durch den Scheitel C der Bahn neue Axen CX′ und CZ (senkrecht auf CX′) legt und die, diesen neuen Axen entsprechenden Koordinaten einführt.

### Integration für den Fall eines sehr kleinen Elevations-Winkels.

Ist der Elevations-Winkel α sehr klein, so daß sich die Bahn nur wenig vom Horizonte AE entfernt, so kann man $\partial s_x = \sqrt{1 + p^2} = 1$,

demnach $s = x$ und $\partial s = \partial x$ nehmen. Die Gleichungen (1. und 2.) der Bewegung werden nun

1′) $\partial^2 x = -\mu \cdot \partial x^2$ und 2′) $\partial^2 y = -g - \mu \cdot \partial x \cdot \partial y$;

und die Gleichung (8.) der Bahn wird jetzt

3′) $$\partial^3 y_x - 2\mu \cdot \partial^2 y_x = 0.$$

Die Gleichung (1′.) da sie von y gar nichts hat, kann nun ohne weiteres integrirt werden, und dann auch die Gleichung (2′.); allein noch bequemer ist die Gleichung (3′.) für die Bahn. Integrirt man in ihr jedes Glied nach x, so erhält man

4′) $$\partial^2 y_x - 2\mu \cdot \partial y_x + c = 0;$$

und dies Verfahren wiederholt, giebt

5′) $$\partial y_x - 2\mu \cdot y + c \cdot x + c' = 0.$$

Setzt man in (4′. und 5′.) $t = 0$, also $tg\,\alpha$ statt $\partial y_x$ und $-\frac{g}{v^2 \cdot cos\,\alpha^2}$ nach (13.) statt $\partial^2 y_x$, so erhält man

6′) $$-\frac{g}{v^2 \cdot cos\,\alpha^2} - 2\mu \cdot tg\,\alpha + c = 0$$

und

7′) $$tg\,\alpha + c' = 0,$$

wodurch die Konstanten c und c′ bestimmt sind. Die Gleichung (5′.) ist linear von der ersten Ordnung, integrirt sich also nach (§. 52. oder auch §. 53. Analys.) und giebt, wenn man die Konstante sogleich so bestimmt, daß für $x = 0$ auch $y = 0$ wird,

8′) $$y = \frac{c}{2\mu} \cdot x + \frac{2c'\mu + c}{4\mu^2} \cdot (1 - e^{2\mu x}),$$

welches eine Ur-Gleichung der Bahn ist. Setzt man in ihr statt der c und c′ ihre Werthe aus (6′. und 7′.), so wird sie

9′) $$y = x \cdot tg\,\alpha - \frac{g}{4\mu^2 \cdot v^2 \cdot cos\,\alpha^2} \cdot (e^{2\mu x} - 2\mu x - 1);$$

und diese (Näherungs-) Gleichung fällt mit der paraboliſchen (und genauen) Flug-Bahn der (ersten Aufgabe dieses §.) zusammen, so oft $\mu = 0$ gesetzt wird, d. h. so oft der Widerstand der Luft aufhört. — Diese Gleichung (9′.) ist zu gebrauchen für alle Punkte der Bahn, die über, und für diejenigen Punkte, welche nicht sehr viel unter dem Horizont liegen.

Findet man aus (9′.) $\partial y_x$ oder p und dann wieder $\partial^2 y_x$ oder $\partial p_x$, und bemerkt man, daß die Gleichung (7.) $\partial t_x = \frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \sqrt{-\partial p_x}$ liefert, so erhält man noch

10′) $$\partial t_x = \frac{1}{v \cdot cos\,\alpha} \cdot e^{\mu x}, \quad \text{also} \quad t = \frac{1}{\mu \cdot v \cdot cos\,\alpha} \cdot (e^{\mu x} - 1),$$

eine (genäherte) Gleichung zwiſchen t und x.

Macht man zwei Versuche, unter übrigens ganz gleichen Umständen, nur mit verschiedenem Elevations-Winkel $\alpha$, und bemerkt man die Koordinaten $l$ und $\lambda$, $l'$ und $\lambda'$ für die Orte des Eintreffens ein klein wenig unter dem Horizont, so daß $\lambda$, $\lambda'$ negativ aber sehr klein sind, so giebt die Gleichung (9'.), wenn man einmal $l$, $\lambda$, dann aber auch noch $l'$, $\lambda'$ statt $x$, $y$ substituirt zwei Gleichungen zwischen $v$ und $\mu$, aus denen also $v$ (die Anfangs-Geschwindigkeit) und $\mu$ (der Koefficient des Widerstandes der Luft) gefunden werden können. Wiederholt man dies Verfahren aus wiederholten Paaren von Versuchen, die unter sonst gleichen Umständen angestellt sind, so kann man aus den jedesmal gewonnenen Werthen von $v$ und $\mu$, zuletzt Mittelwerthe nehmen. — Wollten diese gefundenen Mittelwerthe mit allen übrigen Versuchen stimmen, welche unter denselben Umständen, und immer nur mit geänderter Elevation angestellt werden, so wäre dieses ein physikalischer Beweis, daß das Gesetz $\mu \cdot v^2$ des Luft-Widerstandes, das von der Natur befolgte ist. — Diese Versuche sind aber bis jetzt nicht übereinstimmend gefunden worden, wenigstens nicht für alle Geschwindigkeiten.

Anmerk. 1. Die Gleichungen (1. und 2. der vorstehenden Aufgabe) nämlich

1) $\partial^2 x = -\mu \cdot \partial s \cdot \partial x$ und 2) $\partial^2 y = -g - \mu \cdot \partial s \cdot \partial y$

lassen sich auch integriren als Gleichungen zwischen 3 Veränderlichen $x$, $s$ und $t$, oder $y$, $s$ und $t$. — Dividirt man nämlich die (1.) durch $\partial x$, und nimmt man dann die Integrale nach $t$ links und rechts, so erhält man

$$log\, \partial x = -\mu \cdot s + c,$$

oder, weil für $s = 0$, $\partial x = v \cdot cos\, \alpha$ werden muß,

3) $$\partial x = v \cdot cos\, \alpha \cdot e^{-\mu s}.$$

Die Gleichung (2.) würde, wenn sie rechts nicht $-g$ noch hätte,

4) $$\partial y = C \cdot e^{-\mu s}$$

geben. Nimmt man daher, wie im (§. 53. Analys.), diese Form (4.) für das Integral an, sucht aber $C$ als Funktion von $t$ noch so dazu, daß der Gleichung (2.) genügt wird, so findet sich zur Bestimmung von $C$ die Gleichung

$$\partial C = -g \cdot e^{\mu s}, \quad \text{also} \quad C = -g \cdot \int e^{\mu s} \cdot dt.$$

Die Gleichung (4.) wird nun

5) $$\partial y = -g \cdot e^{-\mu s} \cdot \int e^{\mu s} \cdot dt.$$

Dividirt man nun diese Gleichung (5.) durch die (3.), um $\partial y_x$ zu erhalten, so ergiebt sich sogleich

6) $$\partial y_x = -\frac{g}{v \cdot \cos\alpha} \cdot \int e^{\mu s} \cdot dt.$$

Setzt man wiederum hier

7) $$\partial y_x = p,$$

und differenziirt man die (6.) nach allem t, so findet sich

8) $$\partial p = -\frac{g}{v \cdot \cos\alpha} \cdot e^{\mu s},$$

oder, wenn man diese Gleichung abermals durch die (3.) dividirt,

9) $$\partial p_x = -\frac{g}{v^2 \cdot \cos\cdot\alpha^2} \cdot e^{2\mu s}.$$

Multiplizirt man hier rechts mit $\partial s_x$, um nachgehends nach x integriren zu können, links aber mit $\sqrt{1+p^2}$ (welches $= \partial s_x$ ist), so erhält man, wenn man nach x integrirt,

$$\int \sqrt{1+p^2} \cdot dp = -\frac{g}{v^2 \cdot \cos\alpha^2} \cdot \int e^{2\mu s} \cdot ds,$$

d. h.

10) $$p \cdot \sqrt{1+p^2} + log(p+\sqrt{1+p^2}) = a - \frac{g}{\mu \cdot v^2 \cdot \cos\alpha^2} \cdot e^{2\mu s},$$

wo a die Konstante ist, welche für $t = 0$, also $s = 0$, $p = tg\,\alpha$, leicht bestimmt wird.

Man hat nun aus (9.)

11) $$\partial x_p = -\frac{v^2 \cdot \cos\alpha^2}{g} \cdot e^{-2\mu s};$$

eliminirt man also aus (10. und 11.) alles s (nämlich $e^{-2\mu s}$), so erhält man $\partial x_p$ in p; dann auch $\partial y_p = p \cdot \partial x_p$ in p; und zuletzt aus (8.) auch noch $\partial t_p \left(= -\frac{v \cdot \cos\alpha}{g} \cdot e^{-\mu s}\right)$, sobald man nur wieder s eliminirt). — So bekommt man dieselben Resultate, welche wir oben, nach dem systematischen Wege des (§. 53. Analys.), ebenfalls bekommen haben.

Es versteht sich dabei, daß man in dem kurz vorher betrachteten Fall sehr kleiner Elevations-Winkel $\alpha$, wo man

$$\sqrt{1+p^2} = 1, \quad \text{also} \quad \partial s_x = 1 \quad \text{und} \quad s = x$$

genommen hat, dasselbe Integrations-Verfahren anwenden könnte. — Wir bemerken diese Wege, glauben aber, daß das direkteste Verfahren immer das Beste ist.

Anmerk. 2. Borda hat gelehrt, die Gleichung (8. oder 10.) der Bahn näherungsweise dadurch zu integriren, daß er statt des konstanten Luft-Widerstands-Koeffizienten $\mu$ (der mit der Dichtigkeit der Luft proportional gedacht wird) einen Veränderlichen sich denkt, der für kleine Elevations-Winkel am Gipfel mit dem wahren wieder zusammenfällt, für größere Elevations-Winkel aber am Anfange mit dem wahren, dagegen im Gipfel mit dem noch mit $\cos\alpha$ multiplizirten wahren Luft-Widerstands-Koeffizienten übereinstimmt.

Ist also der Elevations-Winkel $\alpha$ sehr klein, so setzt er $\frac{\mu}{\sqrt{1+p^2}}$ statt $\mu$. Die Integration der Gleichung (10.) wird dann sehr einfach.

Ist dagegen der Elevations-Winkel $\alpha$ größer als $15^0 - 18^0$, doch nicht größer als $45^0$, so setzt er $\frac{\mu \cdot (\cos\alpha + p \cdot \sin\alpha)}{\sqrt{1+p^2}}$, oder $\mu \cdot \cos(\alpha - \alpha)$ statt $\mu$, wo $\alpha$ der Winkel ist, den die Tangente der Bahn mit der Axe der x macht; und die Integration der Gleichung (10.) der Bahn geht dann auch viel leichter von Statten.

Der dadurch entstehenden Resultate bedient sich Borda jedoch nur für den aufsteigenden Zweig bis zum Gipfel. Er bestimmt den Gipfel der Bahn so wie die Geschwindigkeit daselbst, deren Richtung horizontal ist, und betrachtet nun den fallenden Zweig der Bahn als eine nach denselben Gleichungen zu bestimmende Kurve, in so ferne dieser fallende Zweig im Gipfel seinen Anfangs-Punkt, seine Anfangs-Geschwindigkeit und seine Anfangs-Richtung hat.

Diese Näherungs-Methode des Borda wird fast von allen spätern Lehrern der Ballistik zu Grunde gelegt, und die Resultate stimmen, wenn sie noch für verschiedene Anfangs-Geschwindigkeiten nach verschiedenen Modifikationen gefunden sind, mit den Erfahrungen noch am meisten überein.

Anmerk. 3. In allen diesen Untersuchungen kann man statt der Anfangs-Geschwindigkeit v ihre Fall-Höhe h, so wie überhaupt statt der Geschwindigkeit v die ihr zugehörige Fall-Höhe h in Rechnung bringen, dadurch, daß man

$$v^2 = 2gh \quad \text{und} \quad v^2 = 2gh$$

setzt, nach (§. 33. Anmerk.). — Die Formeln nehmen dann eine nur wenig geänderte Gestalt an.

## §. 51.

### Pendel-Bewegung.

Unter den Beispielen, die wir über die Bewegung eines Atoms in einer gegebenen Fläche oder in bestimmt vorgeschriebener Bahn geben können, ist die Pendel-Bewegung das an sich interessanteste.

### I. Allgemeine Erklärung und Behandlung des Pendels.

Wir nennen aber jede Vorrichtung einen mathematischen Pendel, durch welche ein Atom gezwungen ist, auf einer gegebenen Fläche oder auf bestimmt vorgeschriebener Bahn zu bleiben, während er von der konstant und immer parallel mit sich selbst wirkenden Schwere g·dt getrieben wird, dabei in irgend einer Richtung an irgend einer Stelle irgend eine Anfangs-Geschwindigkeit hat (die auch Null seyn kann), und wenn während der Dauer der Bewegung, der Atom selbst, oder irgend ein anderer Punkt, oder irgend eine Linie, oder irgend eine Ebene der Vorrichtung, periodisch an denselben Ort zurückkehrt.

Denkt man sich die Koordinaten-Axen OX und OY horizontal (d. h. senkrecht auf die Richtung der Schwere g·dt) und die dritte Axe OZ dann vertikal (parallel mit der Richtung der Schwere) und in demselben Sinne (nach unten), so ist für diese Pendel-Bewegung, wenn bloß die Schwere g·dt allein wirkt,

1) $X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = g$

und die Gleichungen der Bewegung sind daher nach (§. 37.)

2) $\partial^2 x = Q \cdot \cos\varepsilon, \quad \partial^2 y = Q \cdot \cos\varepsilon', \quad \partial^2 z = g + Q \cdot \cos\varepsilon''$,

wo Q den senkrechten Gegendruck der Fläche, und $\varepsilon$, $\varepsilon'$, $\varepsilon''$ die Winkel vorstellen, welche die Normale der Fläche mit den Axen macht, im Falle die Bewegung auf einer Fläche statt finden soll; wo aber, wenn eine bestimmte Linie als Bahn vorgeschrieben ist, Q den senkrechten Gegendruck dieser Linie bedeutet, dessen durch die Winkel $\varepsilon$, $\varepsilon'$ und $\varepsilon''$ bestimmte Richtung noch unbekannt ist, aber doch senkrecht auf der Tangente der Bahn, so daß man in beiden Fällen noch

3) $\cos\varepsilon \cdot \partial x + \cos\varepsilon' \cdot \partial y + \cos\varepsilon'' \cdot \partial z = 0$,

so wie immer auch

4) $\cos\varepsilon^2 + \cos\varepsilon'^2 + \cos\varepsilon''^2 = 1$

hat; alles genau nach (§. 37.), oder auch nach (§. 45. und §. 46.).

Multiplizirt man nun diese 3 Gleichungen der Bewegung (2.) bezüglich mit $\partial x$, $\partial y$, $\partial z$; addirt man die Resultate und nimmt man links und rechts die Integrale nach t, alles genau so, wie solches im (§. 38.) geschehen ist, so erhält man die dortige Gleichung ($\odot$), nämlich

($\odot$)··· $\quad v^2 - v^2 = 2g \cdot (z - \zeta)$,

wo $\zeta$ die (dritte) Koordinate des Anfangs-Punktes der Bahn, und v die Anfangs-Geschwindigkeit (in der Anfangs-Richtung der Bahn) ist.

Diese Gleichung ($\odot$), durch welche die Geschwindigkeit v des Pendels zu Ende einer jeden Zeit t bestimmt wird, findet also statt, der Atom mag auf einer gegebenen Fläche oder auf einer gegebenen Kurve sich bewegen. Diese Gleichung ($\odot$) zeigt zu gleicher Zeit, daß die Geschwindigkeit v allemal dieselbe wird, so oft z denselben (positiven oder negativen) Werth hat, d. h. so oft der Atom wiederum in dieselbe Horizontal-Ebene gelangt, oder, wie man sagt, wiederum dieselbe Höhe erreicht. Bewegt sich aber der Atom in einer gegebenen Kurve, so daß er denselben Bahn-Theil öfter durchlaufen muß, so braucht er, weil

er

er (vorwärts oder rückwärts) an jeder Stelle dieselbe Geschwindigkeit hat, zu demselben Bahn-Theil (vorwärts oder rückwärts) auch immer dieselbe Zeit. „Die Schwingungen (d. h. die wiederkehrenden Bewegungen in der ganzen Bahn) sind daher gleichzeitig (isochron)." Dies sind also allgemeine Eigenschaften aller Pendel, auf welche keine andere Kraft als nur die Schwere allein wirkt. (Vgl. sorgfältig §. 39. und die Note daselbst.)

II. Einfacher Pendel im vertikalen Kreise.

Betrachten wir nun zunächst den besondern Fall, daß der Atom gezwungen ist, in einem vertikal liegenden Kreise FAEMF (Fig. 40.) zu bleiben, dessen Radius $= l$ seyn mag, und welcher die Länge des Pendels heißt. Durch den Mittelpunkt C dieses Kreises gehen die horizontale Axe OX und die vertikale Axe OZ hindurch, so daß beide in seiner eigenen Ebene genommen seyn mögen. Der Atom sey also in A, wenn $t = 0$ ist, und in M, wenn $t = t$ ist; er habe in A, in der Richtung der Tangente an A, die Anfangs-Geschwindigkeit $v$, so wie in M die Geschwindigkeit $v$ *). Es seyen ferner MM' und AA' horizontal gedacht, so daß $\pm OD = z$ und $\pm OB = z$ ist **).

Aus der Gleichung (I. ⊙), nämlich aus

$$(\odot) \qquad v^2 - b^2 = 2g \cdot (z - z)$$

die auch hier wieder statt findet, ergiebt sich sogleich der Werth $z'$ von $z$, wo $v = 0$ ist, d. h. wo der Atom ruht, nämlich

$$z' = z - \frac{1}{2g} \cdot v^2, \quad \text{oder} \quad z' = z - h$$

wenn $h$ die zur Anfangs-Geschwindigkeit $v$ gehörige Fall-Höhe vorstellt, so daß $v^2 = 2gh$ ist (vergl. §. 33. Anmerk.). Es kann daher die Anfangs-Geschwindigkeit $v$ so groß genommen

*) Es sey z. B. der schwere Atom an einem schwerlosen Faden von der Länge $l$ in O aufgehängt, so daß er anfänglich in E sich befindet, nachher aber bis A aufgehoben und dann mit der Anfangs-Geschwindigkeit $v$ senkrecht auf den Radius herunter gestoßen wird.

**) In der Figur ist $z = +OD$, $z = +OB$; allein der Punkt M (ja selbst der Punkt A) könnte auch oberhalb X'OX liegen, und dann würde $z$ (oder auch $z$) einen negativen Werth annehmen.

werden, daß $z'$ negativ und an sich größer als der Radius $l$ des Kreises wird, und dann existirt keine solche Stelle in diesem Kreise, wo $v = 0$ seyn könnte. Der Pendel durchläuft also wiederholt und ohne Ende fort den ganzen Kreis, hat jedoch allemal in gleichen Höhen, er mag steigen oder fallen, gleiche Geschwindigkeiten. — Ist jedoch die Anfangs-Geschwindigkeit $v$ klein genug, so daß $z'$, wenn auch negativ, doch an sich kleiner als der Radius $l$ des Kreises wird, nimmt man etwa $v$ und $z$ so, daß

$$z = OB \text{ und } z' = -OG, \text{ also } z - z' = BG = h$$

ist, und denkt man sich durch B und G horizontale (mit OX parallele) Gerade $AA'$ und $KK'$, so ist der Pendel, wenn er in $K'$ anlangt, in Ruhe, nachdem er von A aus (mit der Anfangs-Geschwindigkeit $v$) den Bogen $AEK'$ durchlaufen hat. Diese Ruhe ist aber nur augenblicklich, denn dieselbe Schwere läßt ihn sogleich wieder den Rückweg antreten, so daß er nun eine zweite Bewegung beginnt, für welche $z = -OG$ und $v = 0$ ist. Sucht man die Geschwindigkeit $v'$ dieser zweiten Bewegung in $A'$, so muß man in der Gleichung $(\odot)$ $-OG$ statt $z$, Null statt $v$, so wie $v'$ statt $v$, und $OB$ statt $z$ setzen, und man erhält

$$v'^2 = 2g \cdot (OB + OG) = 2g \cdot BG = 2g \cdot h = v^2;$$

d. h. in $A'$ hat der Atom bei der zweiten Bewegung dieselbe Geschwindigkeit $v$, die er bei der ersten Bewegung in A hatte. Daher erhebt er sich bei der zweiten Bewegung bis K, und fällt dann wieder zurück, um sich bis $K'$ wieder zu erheben. Diese Bewegungen vorwärts und rückwärts, Schwingungen oder Oscillationen genannt, wiederholen sich daher ohne Ende; in gleichen Höhen, bei'm Steigen oder bei'm Fallen, finden gleiche Geschwindigkeiten statt. — Dieses alles folgt aus der Gleichung $(\odot)_1$, welche als ein erstes Integral der Gleichungen der Bewegung zunächst gefunden worden ist.

Fügt man aber zu diesem Integral $(\odot)_1$, d. h. (weil hier $y = 0$, also auch $\partial y = 0$, $\partial^2 y = 0$, also

$$v^2 = \partial s^2 = \partial x^2 + \partial z^2$$

ist) zu dem Integral

1) $v^2$ oder $\partial x^2+\partial z^2 = v^2+2g\cdot(z-z)$

noch die Gleichung der Bahn

2) $x^2+z^2 = l^2$

hinzu, so hat man zwei Gleichungen, welche x und z in t geben, so daß auch die zu jeder Stelle der Bahn gehörige Zeit gefunden werden kann. — Diese fernere Integration macht sich aber noch einfacher, wenn man Polar-Koordinaten einführt, nämlich OM = r und (im Bogen für den Radius 1 ausgedrückt) W. AOM $= \theta'+\theta$, wo W. AOZ $= \theta'$ konstant und W. ZOM $= \theta$ veränderlich (d. h. eine Funktion von t) seyn soll, so daß $\theta$ einen negativen Werth hat, wenn der Atom links von E, etwa in M' seyn sollte. Die Gleichung (2.) der Bahn wird nun ganz einfach

3) $r = l$, also $\partial r = 0$, $\partial^2 r = 0$,

und da deshalb jetzt

$$x = l\cdot\sin\theta \quad \text{und} \quad z = l\cdot\cos\theta,$$

also $\partial x = l\cdot\cos\theta\cdot\partial\theta$ und $\partial z = -l\cdot\sin\theta\cdot\partial\theta$

gefunden wird, so geht die Gleichung (1.) über in

4) $v^2$ oder $(l\cdot\partial\theta)^2 = v^2+2gl\cdot(\cos\theta-\cos\theta')$ *),

---

*) Nach (§. 38. II.) gilt für jede krummlinige Bewegung die Gleichung $\partial^2 s = T$ und nach (Anmerk. 2. zu §. 38.) ist die Anwendung dieser Gleichung bei bestimmt vorgeschriebener Bahn besonders bequem. Wenden wir solche deshalb hier an, wo der Figur zu Folge $T = -g\cdot\sin\theta$, $s = l\cdot(\theta'+\theta)$, $\partial s = l\cdot\partial\theta$ und $\partial^2 s = l\cdot\partial^2\theta$ ist, so giebt sie sogleich

$$\partial^2\theta = -\frac{g}{l}\cdot\sin\theta.$$

Multiplizirt man nun diese Gleichung, um sie zu integriren, mit (dem integrirenden Faktor) $\partial\theta$, so erhält man sogleich, indem man links und rechts die Integrale nach t nimmt,

$$\partial\theta^2 = 2\frac{g}{l}\cdot\cos\theta+c,$$

wo die Konstante c daraus bestimmt werden muß, daß für $t = 0$ auch $\theta'+\theta = 0$, also $\theta = -\theta'$, so wie noch $l\cdot\partial\theta = \partial s = v = v$, also $\partial\theta = \frac{v}{l}$ werden muß. Diese letztere Gleichung giebt daher für diesen Werth $t = 0$,

in so ferne $z = OB = l \cdot \cos\theta'$ ist. — Diese Gleichung giebt $\partial t_\theta$ in $\theta$ unmittelbar, also t durch eine Quadratur, die sich jedoch in endlicher Form nicht herstellen läßt.

Betrachten wir nun den gewöhnlichen Fall dieses Pendels, wo nämlich die Anfangs-Geschwindigkeit $v = 0$ ist. — Die Gleichung (4.) giebt dann

5) $v^2$ oder $(l \cdot \partial\theta)^2 = 2gl \cdot (\cos\theta - \cos\theta')$.

Sucht man den Werth $\theta''$ von $\theta$, für welchen $v = 0$ wird, so findet sich zu dessen Bestimmung aus (5.)

$$\cos\theta'' - \cos\theta' = 0,$$

oder

6) $$\theta'' = \theta',$$

d. h. in $A'$, wo $\theta'' = \mathfrak{W}.\, EOA' = \theta' = \mathfrak{W}.\, EOA$ ist, befindet sich der Pendel (momentan) in Ruhe, eine Schwingung ist beendigt, und die neue Schwingung beginnt von $A'$ nach A zurück, und so ohne Ende fort; während diese Schwingungen alle nach (I.) in gleichen Zeiten zurückgelegt werden, d. h. isochron sind.

Die Gleichung (5.) giebt übrigens zur Bestimmung dieser Zeit

7) $$t \cdot \sqrt{\frac{g}{l}} = \int_{\theta \div (-\theta')} \frac{1}{\sqrt{2(\cos\theta - \cos\theta')}} \cdot d\theta,$$

welches Integral in endlicher Form nicht gefunden werden kann.

A. Auffindung dieses Integrals (7.) in der ersten Annäherung.

Denkt man sich $\theta'$ und dann auch $\theta$ unendlich-klein oder wenigstens so klein, daß die höheren Potenzen von $\theta'$ außer Acht gelassen werden können, so hat man, da nach (Analys. §. 13.)

$\cos\theta - \cos\theta' = \frac{1}{2}(\theta'^2 - \theta^2) - \frac{1}{24}(\theta'^4 - \theta^4) + \frac{1}{720}(\theta'^6 - \theta^6) - \cdots$

ist, zunächst bloß

---

und weil $\cos(-\theta') = \cos\theta'$ ist, $\frac{v^2}{l^2} = 2\frac{g}{l} \cdot \cos\theta' + c$, und geht durch Substitution dieses Werthes von c sogleich in die obige (4.) über.

$$\cos\theta - \cos\theta' = \tfrac{1}{2}(\theta'^2 - \theta^2)$$

zu nehmen. Dadurch geht die Gleichung (6.) über in

$$t \cdot \sqrt{\frac{g}{l}} = \int_{\theta=(-\theta')}^{\theta} \frac{1}{\sqrt{\theta'^2 - \theta^2}} \cdot d\theta.$$

Dieses Integral kann aber nach (§. 32. III. Analys.) gefunden werden; nämlich

$$\int \frac{1}{\sqrt{\theta'^2 - \theta^2}} \cdot d\theta = -\frac{1}{\cos}\frac{\theta}{\theta'};$$

daher giebt die vorstehende Gleichung, da $\frac{1}{\cos}(-1) = \pi$ ist,

$$t \cdot \sqrt{\frac{g}{l}} = \pi - \frac{1}{\cos}\frac{\theta}{\theta'}, \text{ oder } \frac{\theta}{\theta'} = \cos\left(\pi - t \cdot \sqrt{\frac{g}{l}}\right),$$

d. h.

8) $$\theta = -\theta' \cdot \cos\left(t \cdot \sqrt{\frac{g}{l}}\right);$$

und dies ist die Gleichung, welche den Ort des Pendels zu jeder Zeit t angiebt.

Da $v = \partial s = l \cdot \partial\theta$ ist, so findet sich noch

9) $$v = \theta' \cdot \sqrt{gl} \cdot \sin\left(t \cdot \sqrt{\frac{g}{l}}\right),$$

wodurch die Geschwindigkeit v auch in t ausgedrückt ist.

Sucht man die Zeit der ganzen Schwingung, d. h. die Zeit T, welche verfließt, bis zuerst $v = 0$ wird; so hat man zu deren Bestimmung aus (9.) die Gleichung

$$0 = \sin\left(T \cdot \sqrt{\frac{g}{l}}\right),$$

oder

10) $T \cdot \sqrt{\frac{g}{l}} = \pi$, oder $g \cdot T^2 = l \cdot \pi^2$, oder $T = \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$ *).

Sucht man die Zeit der halben Schwingung, d. h. die Zeit T', welche der Atom gebraucht, um von A bis zu dem

*) Bei solchen unendlich-kleinen Schwingungen ist also die Dauer T einer Schwingung von der Weite $2\theta'$ dieser Schwingungen ganz unabhängig.

niedrigſten Punkte E zu gelangen, ſo muß man in der (8.) $T'$ ſtatt t, und $\Theta$ ſtatt $\theta$ ſetzen, und man erhält

11) $0 = \cos\left(T' \cdot \sqrt{\frac{g}{l}}\right)$, d. h. $T' \cdot \sqrt{\frac{g}{l}} = \frac{1}{2}\pi$, alſo $T' = \frac{1}{4}T$;

d. h. die Dauer der halben Schwingung iſt auch nur halb ſo groß, als die Dauer der ganzen Schwingung; und der Bogen EA′ aufwärts wird in derſelben Zeit $T' = \frac{1}{4}T$ durchlaufen, wie der Bogen AE abwärts *).

Die Gleichung (10.) nämlich

$$g \cdot T^2 = l \cdot \pi^2$$

giebt, da $\pi$ immer bekannt und $= 3{,}14159\cdots$ iſt, wenn von den 3 Stücken g, l, T, d. h. örtliche Schwere, Länge des Pendels und Dauer einer Schwingung, irgend zwele gegeben ſind, allemal ſogleich das dritte.

Nimmt man ein Pendel, deſſen Schwingungen gerade eine Sekunde dauern und welches man deshalb Sekunden-Pendel nennt, ſo folgt, wenn L deſſen Länge iſt, aus (10.)

$$g = \pi^2 \cdot L \quad \text{und} \quad L = \frac{1}{\pi^2} \cdot g.$$

Die Länge L eines Sekunden-Pendels wächſt daher proportional mit der örtlichen Schwere g, oder umgekehrt.

B. Integration der Gleichung (7.) in der zweiten Annäherung.

Statt der in (A.) ſo eben herbeigeführten erſten Annäherung wollen wir nun die Gleichung (7.) in einer zweiten Annäherung

---

*) Sucht man die Geſchwindigkeit $v'$ in E, und ſetzt man zu dem Ende in die Gleichung (9.) ſtatt t den eben für $T'$ gefundenen Werth, ſo ergiebt ſich

1′) $\quad v' = \theta' \cdot \sqrt{g \cdot l} = \sqrt{g \cdot l \cdot \theta'^2}$,

während die Formel (⊙) oder (1.) (da $y = 0$ und $z = OE$), oder die (5.) für $\theta = 0$,

2′) $\quad v' = \sqrt{2g \cdot BE} = \sqrt{2gl \cdot (1 - \cos\theta')}$

giebt. Dieſe Reſultate (1′. und 2′.), ſo verſchieden ſie ſind, ſtimmen unter den hier gemachten Vorausſetzungen, daß nämlich $\theta'$ ſehr klein und deshalb $\cos\theta' = 1 - \frac{1}{2}\theta'^2$ ſeyn ſoll, vollkommen mit einander überein.

integriren, dadurch, daß wir in den Reihen für $\cos\theta$ und $\cos\theta'$ auch noch die vierten Potenzen von $\theta$ und $\theta'$ beibehalten, so daß wir nehmen

$$\cos\theta - \cos\theta' = \tfrac{1}{2}(\theta'^2 - \theta^2) - \tfrac{1}{24}(\theta'^4 - \theta^4) = \tfrac{1}{2}(\theta'^2 - \theta^2)\cdot[1 - \tfrac{1}{12}(\theta'^2 + \theta^2)].$$

Die Gleichung (7.) geht dadurch über in

$$12)\quad t\cdot\sqrt{\frac{g}{l}} = \int_{\theta\div(-\theta')} \frac{1}{\sqrt{\theta'^2-\theta^2}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{12}(\theta'^2+\theta^2)}}\cdot d\theta.$$

Entwikkelt man hier

$$1:\sqrt{1-\tfrac{1}{12}(\theta'^2+\theta^2)},\ \text{d. h.}\ [1-\tfrac{1}{12}(\theta'^2+\theta^2)]^{-\frac{1}{2}}$$

nach dem binomischen Lehrsatze, läßt man aber dabei die zweiten und höheren Potenzen von $(\theta'^2+\theta^2)$ außer Acht, so findet sich sogleich

$$[1-\tfrac{1}{12}(\theta'^2+\theta^2)]^{-\frac{1}{2}} = 1+\tfrac{1}{24}(\theta'^2+\theta^2);$$

und die Gleichung (12.) wird nun, wenn man diesen Werth daselbst substituirt:

$$13)\quad t\cdot\sqrt{\frac{g}{l}} = \int_{\theta\div(-\theta')} \frac{(1+\frac{1}{24}\theta'^2)+\frac{1}{24}\theta^2}{\sqrt{\theta'^2-\theta^2}}\cdot d\theta.$$

Nun ist aber nach (§. 32. III. u. VII. Analys.)

$$\int\frac{1+\frac{1}{24}\theta'^2+\frac{1}{24}\theta^2}{\sqrt{\theta'^2-\theta^2}}\cdot d\theta = -\tfrac{1}{48}\theta\cdot\sqrt{\theta'^2-\theta^2}+(1+\tfrac{1}{16}\theta'^2)\cdot\int\frac{1}{\sqrt{\theta'^2-\theta^2}}\cdot d\theta$$

und

$$\int\frac{1}{\sqrt{\theta'^2-\theta^2}}\cdot d\theta = -\frac{1}{\cos}\frac{\theta}{\theta'}.$$

Also erhält man, wenn man in (13.) das Integral zwischen den Grenzen $-\theta'$ und 0 nimmt, die Zeit der ersten halben Schwingung T', und wenn man das Integral zwischen den Grenzen $-\theta'$ und $\theta''$ (= $\theta'$ nach 6.) nimmt, die Zeit T der ganzen Schwingung ohne weiteres und zwar

$$14)\quad T'\cdot\sqrt{\frac{g}{l}} = \tfrac{1}{2}\pi\cdot(1+\tfrac{1}{16}\theta'^2);$$

$$15)\quad T\cdot\sqrt{\frac{g}{l}} = \pi\cdot(1+\tfrac{1}{16}\theta'^2);$$

so daß, wie übrigens voraus zu sehen war, jetzt wieder $T' = \frac{1}{2}T$ wird.

Diese Gleichung (15.) muß also bei nicht unendlich-kleinen, sondern bloß sehr kleinen Schwingungen statt der (10.) genommen werden, wenn man noch größere Genauigkeit haben will. Bei dieser Genauigkeit ist also die Schwingungs-Zeit von der Weite $2\theta'$ der Schwingungen abhängig.

Ist also $n'$ die Anzahl der Schwingungen, welche ein Pendel von der Länge $l$ in einer Zeit $t'$ macht, bei sehr kleinen Schwingungen von der Weite $2\theta'$; und möchte man daraus die Anzahl $n$ der Schwingungen bestimmen, welche dasselbe Pendel in derselben Zeit bei unendlich-kleinen Schwingungen machen würde, so hat man nach (10.)

$$\frac{t'}{n} \cdot \sqrt{\frac{g}{l}} = \pi$$

und nach (15.)

$$\frac{t'}{n'} \cdot \sqrt{\frac{g}{l}} = \pi \cdot (1 + \tfrac{1}{16}\theta'^2);$$

Dividirt man diese Gleichungen durch einander, so erhält man

16) $$n = n' \cdot (1 + \tfrac{1}{16}\theta'^2).$$

Indem man also in den Resultaten der ersten Annäherung (A.) statt der bei sehr kleinen Schwingungen von der Weite $2\theta'$ wirklich beobachteten Anzahl $n'$ der Schwingungen in gegebener Zeit $t'$, die aus (16.) berechnete Zahl $n$ der Schwingungen substituirt, übrigens aber daraus die Schwingungs-Zeit $T = \frac{t'}{n}$ des Pendels von derselben Länge $l$ bei unendlich-kleinen Schwingungen berechnet, so erleidet dadurch die erste Annäherung in (A.) eine Korrektion, welche $g\left(= \frac{\pi^2}{T^2} \cdot l\right)$ mit hinreichender Genauigkeit liefert *).

*) Zählt man an irgend einem Orte die Anzahl $n'$ der Schwingungen in einer gegebenen Zeit von $t'$ Sekunden, so ist $\frac{t'}{n'} = T$ die Dauer einer Schwingung. Kennt man also die Länge $l$ des hier gedachten (mathematischen) einfachen Pendels, welches mit dem gebrauchten Pendel gleichzeitig schwingt, so giebt obige Formel (10.), nämlich $g \cdot T^2 = l \cdot \pi^2$, die

Wir müssen aber noch die vollständige Integration der Gleichung (7.) mittelst unendlicher Reihen hier beifügen, weil eigentlich aus ihr erst der Grad der Genauigkeit dieser in (A. und B.) gegebenen ersten beiden Annäherungen gehörig gewürdigt werden kann.

### C. Vollständige Integration der Gleichung (7.)

Um die Gleichung (7.) vollständig zu integriren, führe man einen neuen und in der Regel sehr kleinen Veränderlichen ein, z. B.

---

Größe der örtlichen Schwere g. Um aber noch größere Genauigkeit zu erzielen, muß man die Dauer T einer Schwingung auf die oben beschriebene Weise korrigiren, dadurch nämlich, daß man in der Formel $T = \frac{t'}{n'}$ statt n' die Zahl n setzt, wie sich solche nach der Formel (16.) aus der Weite ($2\theta'$ oder $\varphi'$) berechnet. Die Genauigkeit, mit welcher g sich dann bestimmt, ist kaum größer zu wünschen.

Auf diesem Wege hat man für den Parallel-Kreis, dessen Breite $\psi$ ist, gefunden

$$g = 30{,}10276 + 0{,}16354 \cdot \sin\psi^2 \text{ Pariser Fuß};$$

also nach der von uns hier angenommenen Längen-Einheit, nämlich dem preuß. oder rhnl. Fuße, wenn man 13913 Paris. Fuß = 14400 rhnl. rechnet,

$$g = 31{,}15645 + 0{,}16926 \cdot \sin\psi^2.$$

Also ist am Aequator $g = 31{,}15645$;
am Pole $g = 31{,}32571$;
unter der Breite von 45° $g = 31{,}24108$.

Man muß jedoch dabei nicht übersehen, daß $g \cdot dt$ die Schwere ist, und daß g diejenige angesammelte Kraft vorstellt, welche ein Atom als gewonnene Geschwindigkeit äußert, wenn diese Schwere $g \cdot dt$ stetig und unverändert eine Sekunde mittlerer Zeit hindurch auf den Atom wirkt. Und weil bei dem freien Fall nach (§. 33.) $v = g \cdot t$ und $s = \frac{1}{2} g \cdot t^2$ ist, so ist für $t = 1$, $v = g$ und $s = \frac{1}{2} g$; d. h. g ist auch das Doppelte des in der ersten Sekunde des freien Falles durchfallenen Raumes, so daß dieser Raum selbst unter der Breite von 45°, = 15,62054 preuß. Fuße ist.

Die Länge L des Sekunden-Pendels aber findet sich

$$= 3{,}050046 + 0{,}0165708 \cdot \sin\psi^2 \text{ Paris. Fuß},$$

also in den preuß. oder rhnl. Fuß ausgedrückt

in der Breite $\psi$, $= 3{,}156807 + 0{,}0171568 \cdot \sin\psi^2$,
also am Aequator, $= 3{,}156807$;
am Pol, $= 3{,}173957$;
unter der Breite von 45° $= 3{,}165382$ preuß. oder rhnl. Fuße.

$u = 1 - \cos\theta$, so daß $du = \sin\theta \cdot d\theta$ und $d\theta = \frac{du}{\sqrt{2u - u^2}}$

wird, und bezeichne durch $u'$ den Anfangs-Werth von u, so daß

$u' = 1 - \cos\theta'$ und $u'$ der Werth von u für $t = 0$

ist. Die Gleichung (7.) wird dadurch

$$17) \quad 2t \cdot \sqrt{\frac{g}{l}} = \int_{u}^{u'} \frac{1}{\sqrt{u' \cdot u - u^2} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{2}u}} \cdot du.$$

Da nun u in der Regel sehr klein ist, so wird man trachten, dieses Integral mittelst einer nach Potenzen von u fortlaufenden Reihe herzustellen. Zu dem Ende entwikkelt man zuerst $(1 - \frac{1}{2}u)^{-\frac{1}{2}}$ mittelst des binomischen Lehrsatzes in die Reihe

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}u}} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{u}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \left(\frac{u}{2}\right)^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \left(\frac{u}{2}\right)^3 + \cdots,$$

wo das allgemeine Glied $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2\nu - 1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2\nu} \cdot \left(\frac{u}{2}\right)^\nu$ ist. — Hernach sucht man für jede ganze Zahl $\nu$, so wie für $\nu = 0$, die Werthe des Integrals

$$18) \quad \int \frac{u^\nu}{\sqrt{u' \cdot u - u^2}} \cdot du,$$

in so ferne jetzt das Integral in (17.) zur Rechten auf eine unendliche Reihe solcher Integrale (18.) sich zurückzieht.

Zu dem Ende bildet man sich nach Anleitung der (Analys. §. 32. VII.) durch theilweise Integration, oder auch mittelst der Methode der unbestimmten Koeffizienten *), die Reduktions-Formel

---

*) Man übersieht nämlich bald, daß konstante Koeffizienten A, B existiren müssen, so daß

$$\int \frac{u^n}{\sqrt{u' \cdot u - u^2}} \cdot du = A \cdot u^{n-1} \cdot \sqrt{u' \cdot u - u^2} + B \cdot \int \frac{u^{n-1}}{\sqrt{u' \cdot u - u^2}} \cdot du$$

wird. Differenziirt man nun den Ausdruck zur Rechten, und vergleicht man das Resultat mit dem, was links unter dem Integralzeichen steht, so daß die Gleichung für jedes u besteht, so erhält man die Gleichungen zur Bestimmung der Koeffizienten A und B.

19) $$\int \frac{u^\nu}{\sqrt{u'\cdot u - u^2}}\cdot du =$$

$$-\frac{u^{\nu-1}}{\nu}\sqrt{u'\cdot u-u^2}+\frac{(2\nu-1)\cdot u'}{2\nu}\cdot\int\frac{u^{\nu-1}}{\sqrt{u'\cdot u-u^2}}\cdot du,$$

so kann man jedes folgende dieser Integrale auf das vorhergehende, und so nach und nach alle auf

20) $$\int\frac{1}{\sqrt{u'\cdot u-u^2}}\cdot du=-2\cdot\frac{1}{tg}\frac{u'-u}{\sqrt{u'\cdot u-u^2}}=-2\frac{1}{cos}\sqrt{\frac{u}{u'}}$$

zurückführen. Weil aber die Rechnungen sehr verwikkelt werden, so nimmt man lieber nur die Integrale zwischen den Grenz-Werthen $u'$ und 0 (von u), weil dafür in der Reduktions-Formel (19.) das vom Integral-Zeichen befreite Glied an beiden Grenzen verschwindet und die Reduktions-Formel selbst ganz einfach so:

21) $$\int_{0\div u'}\frac{u^\nu}{\sqrt{u'\cdot u-u^2}}\cdot du=\frac{(2\nu-1)\cdot u'}{2\nu}\cdot\int_{0\div u'}\frac{u^{\nu-1}}{\sqrt{u'\cdot u-u^2}}\cdot du,$$

oder, wenn man $\int_{u'\div 0}\frac{u^\nu}{\sqrt{u'\cdot u-u^2}}\cdot du$ durch $A_\nu$ bezeichnet, so:

22) $$A_\nu=\frac{(2\nu-1)\cdot u'}{2\nu}\cdot A_{\nu-1}$$

wird, während aus (20.)

23) $$A_0=2\frac{1}{cos}0=2\cdot\tfrac{1}{2}\pi=\pi$$

hervorgeht. — Die Gleichung (17.) giebt dann die Zeit $T'$ der ersten halben Schwingung, und zwar

24) $$2T'=\sqrt{\frac{1}{g}}\cdot\left(A_0+\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}A_1+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\tfrac{1}{4}A_2+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\tfrac{1}{6}A_3+\cdots\right);$$

die Gleichung (22.) dagegen giebt, wenn man in ihr nach und nach 1, 2, 3, 4, ··· $\nu$ statt $\nu$ schreibt, und alle entstehenden Gleichungen mit einander multiplizirt und aus (23.) $\pi$ statt $A_0$ schreibt,

25) $$A_\nu=\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2\nu-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots 2\nu}\cdot u'^\nu\cdot\pi.$$

Diese Werthe für $A_\nu$, d. h. für $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$, &c. &c. in (24.) substituirt, geben zuletzt

26) $T' = \frac{1}{4}\pi\cdot\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\left[1+(\tfrac{1}{2})^2\cdot\frac{u'}{2}+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\cdot\left(\frac{u'}{2}\right)^2+\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2\left(\frac{u'}{2}\right)^3+\cdots\right]$,

wo $T'$ die Zeit der ersten halben Schwingung (von A bis E) vorstellt. — Die Zeit der zweiten Hälfte der Schwingung ist dieselbe. — Also ist die Zeit T der ganzen Schwingung gegeben durch die Gleichung

27) $T = \pi\cdot\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\left[1+(\tfrac{1}{2})^2\cdot\frac{u'}{2}+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\cdot\left(\frac{u'}{2}\right)^2+\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2\cdot\left(\frac{u'}{2}\right)^3+\cdots\right]$ *).

III. Pendel-Schwingungen im vertikalen Kreise mit Beachtung des Luft-Widerstandes.

Betrachten wir nun dieselbe Pendel-Bewegung jedoch mit dem Unterschiede, daß der Luft-Widerstand $\varphi$ (in der Richtung der Tangente der Bahn, der Bewegung entgegen wirkend) noch in Rechnung gebracht werde. —

A. Es sey zuerst der Widerstand $\varphi$ mit der Geschwindigkeit $\frac{ds}{dt}$ oder $v$ proportional, also

---

*) Diese allgemeine Formel giebt die früheren Formeln (10.) und (15.) (zur Bestimmung sehr annähernder Werthe von T) wieder. Es ist nämlich

$$u' = 1-\cos\theta', \quad \text{also} \quad \frac{u'}{2} = \tfrac{1}{4}\theta'^2-\tfrac{1}{48}\theta'^4+\cdots$$

Setzt man diese Reihe statt $\frac{u'}{2}$ in die Gleichung (27.), und denkt man sich alle Potenzen von $\theta'$ außer Acht gelassen, so hat man die (10.); behält man aber die zweiten Potenzen von $\theta'$ noch bei, so erhält man die (15.); und behielte man auch noch die vierten Potenzen von $\theta'$ bei, aber keine höheren, so würde man erhalten

$$T = \pi\cdot\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\left[1+\tfrac{1}{16}\cdot\theta'^2+\tfrac{13}{3072}\cdot\theta'^4\right],$$

welche bei Schwingungs-Weiten von 2 — 3 Graden, eine Genauigkeit bis in die zehnte Decimal-Stelle geben würde.

$$\varphi = \mu \cdot \partial s \quad \text{oder} \quad = \frac{g}{k} \cdot \partial s,$$

indem man $k = \frac{g}{\mu}$ setzt.

Die Gleichung (§. 38. II.) der Bewegung ist dasmal

1) $$\partial^2 s = -g \cdot \sin\theta - \frac{g}{k} \cdot \partial s,$$

oder, weil

$$s = l(\theta' + \theta), \quad \partial s = l \cdot \partial\theta \quad \text{und} \quad \partial^2 s = l \cdot \partial^2\theta$$

ist,

2) $$\partial^2\theta + \frac{g}{k} \cdot \partial\theta + \frac{g}{l} \cdot \sin\theta = 0 \text{ *).}$$

Diese Gleichung ist in endlicher Form nicht zu integriren.

Annäherungs-Integration der Gleichung (2.)

Es ist

$$\sin\theta = \theta - \tfrac{1}{6}\theta^3 + \cdots;$$

lassen wir aber die dritten und höheren Potenzen von $\theta$ außer Acht, so ist $\sin\theta = \theta$, und die Gleichung (2.) wird jetzt

3) $$\partial^2\theta + \frac{g}{k} \cdot \partial\theta + \frac{g}{l} \cdot \theta = 0;$$

sie ist linear und giebt, nach (§. 53. Analys.) integrirt,

4) $$\theta = \left[C \cdot \cos\left(mt \cdot \sqrt{\frac{g}{l}}\right) + C' \cdot \sin\left(mt \cdot \sqrt{\frac{g}{l}}\right)\right] \cdot e^{-\frac{g}{2k} \cdot t},$$

wenn der Kürze wegen

5) $$\sqrt{\left(1 - \frac{gl}{4k^2}\right)} = m$$

gesetzt wird.

Setzen wir, wie früher, die Anfangs-Geschwindigkeit $v_1 = 0$ voraus, so wird für $t = 0$, $\theta = -\theta'$ und $\partial\theta = 0$. Differenzirt man daher die (4.) um $\partial\theta$ zu erhalten, und setzt man dann in (4.) und in deren Differenzial $t = 0$, $\theta = -\theta'$, $\partial\theta = 0$, so hat man zwei Gleichungen, welche

*) Das Integral (⊙ des §. 38. I.) findet dasmal nicht statt; daher auch nicht die Folgerungen des (§. 39.); also hat der Pendel jetzt in gleichen Höhen auch nicht immer gleiche Geschwindigkeiten.

$$C = -\theta' \quad \text{und} \quad C' = -\theta' \cdot \frac{\sqrt{gl}}{2mk}$$

liefern, so daß die Gleichung (4.) in

$$6) \quad \theta = -\theta' \left[ \cos\left(mt \cdot \sqrt{\frac{g}{l}}\right) + \frac{\sqrt{gl}}{2mk} \cdot \sin\left(mt \cdot \sqrt{\frac{g}{l}}\right) \right] \cdot e^{-\frac{gt}{2k}}$$

übergeht, und noch durch Differenziiren giebt

$$7) \quad \partial\theta = \frac{\theta'}{m} \cdot \sqrt{\frac{g}{l}} \cdot \sin\left(mt \cdot \sqrt{\frac{g}{l}}\right) \times e^{-\frac{gt}{2k}}.$$

Man hat also zu jeder Zeit t den Ort des Atoms und seine Winkel-Geschwindigkeit $\partial\theta$, also auch seine wahre Geschwindigkeit $l \cdot \partial\theta$ oder $\partial s$ oder v.

Hört die Schwingung auf, so ist $\partial\theta = 0$, also ist dann, wenn T die Dauer der ganzen Schwingung vorstellt,

$$8) \quad \sin\left(mT \cdot \sqrt{\frac{g}{l}}\right) = 0, \quad \text{d. h.} \quad mT \cdot \sqrt{\frac{g}{l}} = \pi,$$

oder

$$T = \frac{\pi}{m} \cdot \sqrt{\frac{l}{g}},$$

immer unter der gemachten Voraussetzung.

Auch geschehen die einzelnen Schwingungen wiederum gleichzeitig, weil sich T von der Weite der Schwingung unabhängig zeigt.

Der zu diesem Werth T von t gehörige Werth $\theta''$ von $\theta$, findet sich dazu aus (6.), nämlich

$$9) \quad \theta'' = \theta' \cdot e^{-\frac{g}{2k} \cdot T};$$

die Weite der (halben) Schwingungen nimmt also in dem geometrischen Verhältniß $1 : e^{-\frac{g}{2k} \cdot T}$, d. h. $1 : e^{-\frac{\pi \cdot \sqrt{gl}}{2mk}}$ ab *).

*) Ist $\theta'$ ungefähr einem Winkel von $\frac{1}{2}$ Grad zugehörig, so stimmen die Erfahrungen von Borda ziemlich genau mit diesem Gesetz der Abnahme der Weiten. Derselbe hat umgekehrt aus dem, mittelst der Erfahrung festgestellten Exponenten dieses Verhältnisses die Zahl m bestimmt, und gefunden, daß sie sehr wenig von 1 verschieden ist (erst in der neunten Decimal-Stelle) und daß daher die Dauer T der Schwingung ziemlich dieselbe bleibt, wie wenn gar kein Widerstand der Luft wäre. Nach 1800 Schwin-

Wäre der Widerstand der Luft sehr groß, so wäre k sehr klein; und wäre k so klein, daß m imaginär würde, so müßte man die Integrale umformen, statt der Sinus und Kosinus Exponential-Funktionen einführen, um reelle Ausdrücke zu bekommen, und dann könnte $\theta$ nie $= 0$ werden, sondern $\theta$ behielte immer einen negativen Werth. Der Atom würde dann in unendlich großer Zeit von A bis E kommen, und dabei E nie ganz erreichen, sondern nur dem E unendlich nahe kommen.

Bei den gewöhnlichen Pendeln und bei sehr geringer Elevation $\theta'$ stimmt die hier gemachte Annahme, „daß der Luft-Widerstand mit der Geschwindigkeit selbst proportional sey," mit der Erfahrung; und es zeigt sich dabei in jedesmal von k nur wenig verschieden, und also, um so mehr, immer reell.

B. Denken wir uns den Widerstand der Luft $\varphi$ mit dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional, also

$$\varphi = \frac{\mu}{2l} \cdot \partial s^2,$$

so wird die Gleichung der Bewegung des Pendels seyn:

1) $$\partial^2\theta + \frac{g}{l} \cdot \sin\theta + \tfrac{1}{2}\mu \cdot \partial\theta^2 = 0.$$

Da sich diese Gleichung integriren läßt, so oft $\mu = 0$ ist, wenn man sie mit $\partial\theta$ multiplizirt, so wird man bewogen, einen neuen Veränderlichen u einzuführen, so daß

2) $$\partial\theta^2 = \partial u_\theta, \quad \text{also} \quad 2\partial\theta \cdot \partial^2\theta = \partial^2 u_\theta$$

wird. Die Gleichung (1.) wird dann, wenn man integrirt, und die Konstante in u mit aufgenommen sich denkt,

3) $$\partial u_\theta - \frac{2g}{l} \cdot \cos\theta + \mu \cdot u = 0;$$

sie ist linear, und giebt, wenn sie nach (§. 53. Anal.) integrirt wird,

4) $$u = C \cdot e^{-\mu\theta} + \frac{2g \cdot (\sin\theta + \mu \cdot \cos\theta)}{(1+\mu^2) \cdot l}.$$

Dieser Werth, in die (2.) substituirt, giebt

gungen hatte sich die Weite der Schwingungen ungefähr um $\frac{1}{3}$ der anfänglichen Weite vermindert.

5) $\partial\theta'^2 = -\mu \cdot C \cdot e^{-\mu\theta'} + \frac{2g \cdot (\cos\theta - \mu \cdot \sin\theta)}{(1+\mu^2) \cdot l}$;

und diese Gleichung ist ein erstes Integral in endlicher Form von der Gleichung (1.) der zweiten Ordnung. Bestimmt man die Konstante C aus der Bedingung, daß $\partial\theta = 0$, wenn $\theta = \theta'$, d. h. daß die Anfangs-Geschwindigkeit $v = 0$ ist, so wird dieses Integral jetzt

6) $\partial\theta^2 =$

$$\frac{2g}{(1+\mu^2) \cdot l} \cdot [\cos\theta - \mu \cdot \sin\theta - (\cos\theta' + \mu \cdot \sin\theta') \cdot e^{-\mu(\theta'+\theta)}].$$

Durch diese Gleichung findet sich die Geschwindigkeit $l \cdot \partial\theta$ unten in E, wo $\theta = 0$ ist, augenblicklich; eben so auch der Werth $\theta''$ von $\theta$, für welchen $\partial\theta = 0$ ist, wo also die Schwingung beendigt ist. Man findet sehr nahe

$$\theta'' = \theta' - \frac{2\mu}{\sin\theta'} \cdot (\sin\theta' - \theta' \cdot \cos\theta')\ ^*);$$

und, wenn $\theta'$ sehr klein ist, auch bloß

$$\theta'' = \theta' - \tfrac{2}{3}\mu \cdot \theta'^2.$$

Dasmal bilden diese Schwingungs-Weiten keine geometrische Progression.

Man kann auch die Gleichung (6.) auf's neue integriren, da sie sogleich $\partial t$ in $\theta$ giebt. — Man integrirt jedoch bequemer die (1.) durch Reihen, sobald $\theta'$ sehr klein ist, wenn man

7) $\theta = \theta_1 \cdot \theta' + \theta_2 \cdot \theta'^2 + \theta_3 \cdot \theta'^3 + \ldots$ **)

setzt, diese Reihe statt $\theta$ in die Gleichung (1.) substituirt, und die einzelnen Koëffizienten der Potenzen von $\theta'$ der Null gleich nimmt,

*) Man erhält dies Resultat, wenn man die Gleichung $\partial\theta = 0$ mittelst der Gleichung (6.) auf die Form bringt:

$$(\cos\theta'' - \mu \cdot \sin\theta'') \cdot e^{\mu\cdot\theta''} = (\cos\theta' + \mu \cdot \sin\theta') \cdot e^{\mu\theta'}$$

dann nach Potenzen von $\mu$ entwikkelt, dagegen alle höheren Potenzen des (sehr kleinen) $\mu$ außer Acht läßt; zuletzt aber $\theta'' = \theta' - \delta$ setzt, und $\delta^2$ so wie $\mu \cdot \delta$ außer Acht läßt (da $\delta$ ebenfalls sehr klein ist).

**) Zu der Wahl dieser Form der Reihe wird man durch den Umstand veranlaßt, daß wenn $\theta'$ sehr klein ist, auch $\theta$ sehr klein seyn muß, daß also $\theta$ mit $\theta'$ zugleich 0 werden muß.

nimmt, aus den einzelnen Gleichungen aber die Koeffizienten $\theta_1$, $\theta_2$, $\theta_3$, ꝛc. bestimmt. — Soll dann für $t = 0$, $\theta = -\theta'$ und $\partial\theta = 0$ werden, so müssen für $t = 0$, alle Koeffizienten $\theta_2$, $\theta_3$, $\theta_4$, ꝛc. $= 0$, dagegen $\theta_1 = -1$ werden, so wie $\partial\theta_1 = \partial\theta_2 = \partial\theta_3 = $ ꝛc. $= 0$.

Begnügt man sich mit den zwei ersten Gliedern der Reihe (7.), so erhält man bald die beiden Gleichungen

8) $$\partial^2\theta_1 + \frac{g}{l}\cdot\theta_1 = 0,$$

und

9) $$\partial^2\theta_2 + \frac{g}{l}\cdot\theta_2 + \tfrac{1}{2}\mu\cdot\partial\theta_1^2 = 0.$$

Die (8.) nach (§. 53. Analys.) integrirt, giebt nach gehöriger Bestimmung der Konstante

10) $$\theta_1 = -\cos\left(t\cdot\sqrt{\frac{g}{l}}\right);$$

substituirt man daher diesen Werth statt $\theta_1$ in die Gleichung (9.), und integrirt man dann diese lineare Gleichung (wiederum nach §. 53. Analys.), so ergiebt sich noch, nach gehöriger Bestimmung der Konstante,

$$\theta_2 = \tfrac{1}{3}\mu\cdot\cos\left(t\cdot\sqrt{\frac{g}{l}}\right) - \tfrac{1}{4}\mu - \tfrac{1}{12}\mu\cdot\cos\left(2t\cdot\sqrt{\frac{g}{l}}\right).$$

Also wird nun aus (7.), wenn man die dritten und die höheren Potenzen von $\theta'$ außer Acht läßt,

11) $$\theta = -\left[\left(\theta' - \tfrac{1}{3}\mu\cdot\theta'^2\right)\cdot\cos\left(t\cdot\sqrt{\frac{g}{l}}\right) + \tfrac{1}{4}\mu\cdot\theta'^2 + \tfrac{1}{12}\mu\cdot\theta'^2\cdot\cos\left(2t\cdot\sqrt{\frac{g}{l}}\right)\right];$$

und daraus $l\cdot\partial\theta$ oder $v$, nämlich

12) $$v = \left(\theta' - \tfrac{1}{3}\mu\cdot\theta'^2\right)\cdot\sqrt{gl}\cdot\sin\left(t\cdot\sqrt{\frac{g}{l}}\right) + \tfrac{1}{6}\mu\cdot\theta'^2\cdot\sqrt{gl}\cdot\sin\left(2t\cdot\sqrt{\frac{g}{l}}\right).$$

Dieser Werth von $v$ wird $= 0$ gesetzt, um $t =$ der Schwingungs-Zeit $T$ daraus zu finden, und giebt

$$T = \pi\cdot\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Bei diesem Grade der Annäherung ist also die Dauer T einer Schwingung, wie die im luftleeren Raume. Es zeigt sich aber, wenn man aus (11.) den Werth $T'$ von t sucht für $\theta = 0$, daß die halbe Schwingungs-Zeit bei'm Heruntersteigen größer, als bei'm Hinaufsteigen ist; denn es findet sich

$$13) \qquad T' = \tfrac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\left(1+\tfrac{1}{3}\mu\cdot\frac{\theta'}{\pi}\right)\text{*)}.$$

Die Geschwindigkeit $v'$ in E, wo $\theta = 0$ ist, findet sich zu diesem Werth $T'$ von t aus der (12.) nämlich

$$14) \qquad v' = (1-\tfrac{1}{3}\mu\cdot\theta')\cdot\theta'\cdot\sqrt{gl};$$

sie ist also geringer, wie im luftleeren Raume **).

IV. Pendel-Schwingungen in einer vertikalen Cykloide.

A. Ohne Beachtung des Luft-Widerstandes. Denken wir uns nun einen Atom, der in einer Cykloide AEA' (Fig. 41.) seine Schwingungen macht, deren Erzeugungs-Kreis den Durchmesser OE = 2r, also den Halbmesser r hat. Setzen wir noch voraus, daß zu Anfang, wo t = 0 ist, der Atom in A sich befindet und die Anfangs-Geschwindigkeit v = 0 hat, daß er aber zu Ende der Zeit t in M ist; führen wir noch

---

*) Man findet dies, wenn man voraussetzt, daß

$$T'\cdot\sqrt{\frac{g}{l}} = \tfrac{1}{2}\pi+\delta$$

ist, dabei $\delta$ klein sich denkt, und dann $\delta^2$ so wie $\theta'\cdot\delta$ als sehr klein außer Acht läßt, zuletzt aber $\delta$ findet.

**) Die ganze Schwingungs-Zeit T zeigt sich also im luftleeren Raume, wie bei dem verschieden vorausgesetzten Widerstand der Luft (wenn man kleine $\theta'$ nur nimmt, und $\theta'^3$, $\theta'^4$ ꝛc. außer Acht läßt), jedesmal als eine und dieselbe.

Die Formel (II. 16.), nämlich $n = n'\cdot(1+\frac{1}{16}\theta'^2)$, welche nach (S. 456.) zur Korrektion der Dauer T einer Schwingung dient, erfordert den Werth der Weite $\theta'$. Weil aber diese Weite bei den wirklichen Schwingungen (in der Luft) abnimmt, so pflegt man in dieser Formel statt $\theta'$ das arithmetische Mittel zu setzen zwischen der ersten (halben) Weite, und der letzten.

DE = u ein, so wie BE = h; so ist vermöge der Gleichung (I. ⊙.) wiederum

$$v^2 = 2g\cdot(z-\zeta) = 2g\cdot(h-u);$$

oder, wenn man Bog. AE = s', Bog. AEM = s'+s, also Bog. EM = s setzt, so daß man die negativen Werthe von s, absolut genommen, von E nach M' hin zählen muß,

1) $$\partial s = \sqrt{2g\cdot(h-u)};$$

während nach (Geom. §. 9.) die Gleichung der Bahn

2) $$s^2 = 8r\cdot u$$

ist. Aus diesen beiden Gleichungen muß man also s und u in t ausgedrückt finden. Eliminirt man s und ∂s aus (1. u. 2.), so erhält man

3) $$\partial t_u\cdot\sqrt{\frac{g}{r}} = \frac{1}{\sqrt{h\cdot u-u^2}};$$

also, wenn man integrirt, so daß für t = 0, u = h wird,

4) $$t\cdot\sqrt{\frac{g}{r}} = \frac{1}{cos}\frac{2u-h}{h}.$$

Hieraus ergiebt sich die Zeit T', welche der Pendel braucht, um von A bis E, wo u = 0 ist, zu gelangen, nämlich

$$T' = \pi\cdot\sqrt{\frac{r}{g}} = \tfrac{1}{2}\pi\cdot\sqrt{\frac{4r}{g}},$$

und diese Zeit T' ist also, unter den gemachten Voraussetzungen, ganz unabhängig von der Weite der Schwingungen. Die Zeit T einer ganzen Schwingung ist daher

$$T = 2\pi\cdot\sqrt{\frac{r}{g}} = \pi\cdot\sqrt{\frac{4r}{g}},$$

d. h. gerade dieselbe, wie in (II. 10.), wenn eine Länge l gedacht wird, gleich dem vierfachen Halbmesser oder dem doppelten Durchmesser des Erzeugungs-Kreises der Cykloide *).

*) Nimmt man daher EF = 2EO, so ist nicht blos FE nach (§. 9. Geom.) der Krümmungs-Halbmesser der Cykloide in E, sondern zugleich auch die Länge des Pendels, welches im Kreise dieselben unendlich-kleinen Schwingungen macht, wie der Atom in der Cykloide um E herum. Bringt man nun in F zwei mit der gegebenen Cykloide kongruente Cykloiden FG,

B. Mit Beachtung des Luft-Widerstandes.

Nun denke man sich denselben Pendel aber unter der Voraussetzung eines Luft-Widerstandes $\varphi = \frac{g}{k} v = \frac{g}{k} \cdot \partial s$. Die Gleichung (§. 38. II.) der Bewegung wird dann, weil sich hier

$$T = -g \cdot \frac{\partial u}{\partial s} - \frac{g}{k} \cdot \partial s$$

findet,

1) $$\partial^2 s = -g \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial s}{k} \right),$$

während die Gleichung der Bahn

2) $$s^2 = 8r \cdot u \quad \text{oder} \quad s \cdot \partial s = 4r \cdot \partial u$$

ist. — Eliminirt man $\partial u$ aus (1. u. 2.), so erhält man

3) $$\partial^2 s + \frac{g}{k} \cdot \partial s + \frac{g}{4r} \cdot s = 0.$$

Am Anfange der Bewegung, wo $t = 0$ ist, sey die Anfangs-

---

FH an, wo jede die Hälfte der GEH ist, so bilden diese Kurven GF und HF, nach dem Anhang zu (§. 9. Geom. Kap. II. Ende), die Evolute der Cykloide GEH. Hängt man daher in F einen Faden von der Länge $FE = 4r$ auf, unschwer und biegsam, an dessen anderem Ende E ein schwerer Atom hängt; hebt man dieses Pendel beliebig weit auf, so wird sich der Faden um die festen Cykloiden GF und HE herum legen, und der Atom wird eben deshalb die Cykloide GEH durchlaufen müssen. Diese einfache Vorrichtung giebt also ein Cykloidal-Pendel.

Sucht man mittelst der Lehre vom Größten und Kleinsten die Kurve, auf welcher die Schwere (im luftleeren Raume) einen Atom allemal in einer und derselben Zeit bis zu ihrem niedrigsten Punkt hin bringt, von welchem höher liegenden Punkte derselben man ihn auch auf ihr herunter fallen lassen möge, — so findet man die Cykloide. — Die Cykloide ist also die einzige Kurve, auf welcher die Dauer der Schwingungen (im luftleeren Raume) von den Weiten derselben ganz unabhängig sind. — Die Cykloide wird deshalb auch die Tautochrone genannt.

Sucht man aber die Kurve zwischen zwei gegebenen Punkten A und B, von denen A höher als B liegen mag, auf welcher ein schwerer Atom im luftleeren Raume und ohne sonstigen Widerstand, von A nach B in der kürzesten Zeit gelangt, so findet man wieder die Cykloide. — Die Cykloide heißt deshalb auch die Brachystochrone.

Geschwindigkeit (also $\delta s$) $= 0$, während zugleich $s = -s'$ seyn muß. Man erhält daher, wenn diese lineäre Gleichung (3.) integrirt wird, und wenn man der Kürze wegen

4) $$\sqrt{\left(1-\frac{gr}{k^2}\right)} = m$$

setzt,

5) $$s = -s'\cdot\left[\cos\left(mt\cdot\sqrt{\frac{g}{4r}}\right)+\frac{\sqrt{gr}}{mk}\sin\left(mt\cdot\sqrt{\frac{g}{4r}}\right)\right]\cdot e^{-\frac{g}{2k}t};$$

und dies ist die Gleichung, welche zu jeder Zeit $t$ den Ort des Pendels giebt.

Sucht man hieraus die Zeit $T'$, zu welcher der Pendel in E ankommt, wo $s = 0$ ist, so findet sich solche wiederum von $s'$, also von der Weite der Schwingungen ganz unabhängig, d. h. sie bleibt dieselbe, die Weite der Schwingungen mag seyn, welche sie will; genau eben so, wie wir dies bei den Schwingungen im luftleeren Raume gefunden haben. Dagegen ist diese Zeit $T'$ allemal im luftleeren Raume etwas kleiner, als hier.

### V. Pendel-Bewegung in einer gegebenen Fläche.

Denken wir uns nun einen schweren Atom, der gezwungen ist auf einer durch die Gleichung

1) $$x^2+y^2+z^2-l^2 = 0$$

gegebenen Kugel-Fläche sich zu bewegen *). Weil dasmal die Kosinus der Winkel $\varepsilon$, $\varepsilon'$, $\varepsilon''$, welche die Normale mit den Axen macht, bezüglich $-\frac{x}{l}$, $-\frac{y}{l}$, $-\frac{z}{l}$ sind, so sind die 3 Gleichungen der Bewegung der (I.) dasmal

*) Dies ist der Fall, wenn ein schwerer Atom an dem einen Ende eines unschweren Fadens von der Länge $l$ befestigt ist, dessen anderes Ende an einem festen Punkt O hängt, und nun diesem Atom, während er nicht gerade vertikal unter O hängt, eine Anfangs-Geschwindigkeit $v$ gegeben wird, deren Richtung sich nicht in der durch ihn und durch O gelegten Vertikal-Ebene befindet.

$$2)\qquad \left.\begin{aligned} \partial^2 x + \frac{x}{l}\cdot Q &= 0 \\ \partial^2 y + \frac{y}{l}\cdot Q &= 0 \\ \partial^2 z + \frac{z}{l}\cdot Q - g &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Aus diesen 4 Gleichungen muß also nun, durch Integration, sowohl der Gegendruck Q, (welcher der jedesmaligen Spannung des Fadens gleich ist), als auch jeder der Koordinaten-Werthe x, y, z in t ausgedrückt, gefunden werden.

Das Integral (⊙), nämlich

$$v^2 = \partial s^2 \text{ oder } \partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2 = v^2 + 2g\cdot(z - z)$$

findet natürlich mit den Gleichungen (2.) zugleich statt.

Eliminirt man aus den zwei ersten Gleichungen der (2.) den Gegendruck Q, so erhält man

$$x\cdot\partial^2 y - y\cdot\partial^2 x = 0;$$

und diese Gleichung, integrirt, giebt

$$3)\qquad x\cdot\partial y - y\cdot\partial x = C.$$

Die Gleichungen (1. 3. und ⊙) sind nun diejenigen, welche x, y, z in t zu geben haben. Differenzirt man die (1.), so hat man noch überdies

$$4)\qquad x\cdot\partial x + y\cdot\partial y + z\cdot\partial z = 0,$$

und alle diese Gleichungen sind nur noch von der ersten Ordnung.

Suchen wir nun aus diesen 4 Gleichungen x, y, ∂x und ∂y zu eliminiren. Dies glückt auf folgendem Wege, ohne daß es nöthig wäre, zu Differenzial-Gleichungen der zweiten Ordnung seine Zuflucht zu nehmen. Man schafft in (4.) $z\cdot\partial z$ auf die andere Seite, quadrirt dann die Gleichung, quadrirt auch die (3.), und addirt die beiden Resultate, und man erhält

$$(x^2 + y^2)(\partial x^2 + \partial y^2) = z^2\cdot\partial z^2 + C^2.$$

In dieser Gleichung setzt man nun aus (1.) und (⊙) $l^2 - z^2$ und $v^2 + 2g(z - z) - \partial z^2$ statt der beiden Faktoren links, und man hat sogleich

5) $(l^2-z^2)\cdot(2gz+k-\partial z^2) = z^2\cdot\partial z^2+C^2$,

wenn der Kürze wegen

6) $v^2-2gz = k$

gesetzt wird. Aus dieser Gleichung findet man nun

7) $\partial t_z = \frac{1}{\sqrt{(l^2-z^2)(2gz+k)-C^2}}$,

so daß t durch Integration sogleich in z ausgedrückt sich sieht, und daher auch z in t ausgedrückt gefunden werden kann.

Um nun noch x und y zu finden, führe man statt dieser beiden Koordinaten $x = OP$ und $y = PM_1$ in der Horizontal-Ebene XOY (Fig. 15.) zwei Polar-Koordinaten ein, nämlich den Radius-Vektor $OM_1 = r$ (welcher die Projektion des Fadens $OM = l$ auf XOY ist) und den Winkel $\theta$, den solcher mit der Axe der x macht; dann hat man

8) $x = r\cdot\cos\theta, \quad y = r\cdot\sin\theta,$

also auch

9) $x^2+y^2 = r^2, \quad r^2 = l^2-z^2$

und

10) $x\cdot\partial y - y\cdot\partial x = r^2\cdot\partial\theta.$

Die Gleichung (3.) geht dadurch über in

11) $(l^2-z^2)\cdot\partial\theta = C.$

Und weil $\partial\theta_z = \partial\theta\cdot\partial t_z$ ist (Analys. §. 16.), so folgt aus (11. und 7.)

12) $\partial\theta_z = \frac{Cl}{(l^2-z^2)\cdot\sqrt{(l^2-z^2)(2gz+k)-C^2}}$,

so daß auch $\theta$ in z, also auch in t, durch direkte Integration gefunden werden kann. Beide Integrale (7. und 12.) gehören jedoch im Allgemeinen zu denen, von welchen (Analys. §. 32. III. D.) unter dem Namen der elliptischen Transcendenten Einiges gesagt worden ist.

Damit für $z = z_1$ nicht bloß $t = 0$, sondern auch $\theta = 0$ werde, muß man sich die Ebene XOZ durch den Punkt gelegt denken, von welchem der Pendel ausgeht. Dadurch bestimmen sich die bei der Bestimmung von $\theta$ eingehenden Konstanten leichter. Die Konstante C in (11. oder 3.) findet sich am leichte-

sten aus dem Werthe $(l^2 - z^2) \cdot \partial\theta$ für $t = 0$, oder aus dem Werthe $x \cdot \partial y - y \cdot \partial x$ für $t = 0$, in so ferne dann (wenn $t = 0$) $x = \xi$, $y = \eta$, $\partial x = v \cdot \cos a$ und $\partial y = v \cdot \cos b$ völlig bekannt sind *).

## Integration der Gleichungen (7. und 12.) für den Fall, daß der Pendel von der Vertikal-Ebene nur wenig sich entfernt.

Ist die Anfangs-Geschwindigkeit $v$ sehr klein und senkrecht auf die Ebene XOZ gerichtet (welche letztere durch die Anfangs-Stellung des Atoms gelegt ist), so hat man

$$a = \tfrac{1}{2}\pi, \quad b = 0 \quad \text{und} \quad c = \tfrac{1}{2}\pi;$$

also für $t = 0$

$$\partial x = 0, \quad \partial y = v \quad \text{und} \quad \partial z = 0.$$

Wird ferner, wenn A den Anfangs-Punkt (in der Ebene XOZ) vorstellt und M den Punkt, wo der Atom zu Ende der Zeit t seyn wird,

13) W. AOZ durch $w$
14) W. MOZ durch $\psi$

} im Bogen für den Radius $= 1$,

bezeichnet, so daß $w$ konstant, $\psi$ aber eine Funktion von t ist, die statt z eingeführt werden soll; nimmt man endlich $w$ und $v$ (also $\psi$) so klein, daß die vierten Potenzen von $w$ und $\psi$ außer Acht gelassen werden können, so findet sich, wenn noch überdies

15)

*) Ist die Anfangs-Geschwindigkeit $v = 0$, so ist für $t = 0$ auch $\partial x = 0$, $\partial y = 0$, also $C = 0$, folglich aus (11.) $\partial\theta = 0$, demnach $\theta =$ Konstante. Die Bewegung geschieht daher in einer Vertikal-Ebene, welche man zur Ebene XOZ nehmen kann, und die Bewegung des Pendels ist nun die in (II.) schon betrachtete. — Dasselbe ist natürlich nach (3. u. 11.) der Fall, so oft für $t = 0$, x und $\partial x$ zugleich 0 sind, oder y und $\partial y$ zugleich, also auch, wenn die Richtung der Anfangs-Geschwindigkeit v in der, durch die Anfangs-Stellung des Pendels und durch O gelegten Vertikal-Ebene liegt und diese zur Koordinaten-Ebene XOZ genommen wird. Auch kommen in diesem Falle die obigen Resultate alle mit denen in (II.) gefundenen überein.

15) $$\frac{\psi}{\sqrt{gl}} = m$$

gesetzt wird, so daß m eine sehr kleine Zahl ist;

16) $\zeta = l\cdot(1-\frac{1}{2}w^2)$; 17) $z = l\cdot(1-\frac{1}{2}\psi^2)$;

18) $k = -2gl + gl\cdot(w^2+m^2)$; 19) $C^2 = gl^2\cdot w^2\cdot m^2$;

und die Gleichungen (7. u. 11.) werden nun, weil

$$\partial t_\psi = \partial t_z \cdot \partial z_\psi,$$

und aus (17.) $\partial z_\psi = -l\cdot\psi$ ist, und wenn man im Nenner alle sechsten Dimensionen der sehr kleinen $\psi$, w und m außer Acht läßt,

(A)… $$\partial t_\psi = -\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\frac{\psi}{\sqrt{(w^2-\psi^2)\cdot(\psi^2-m^2)}};$$

(B)… $$\partial\theta_\psi = -\frac{mw}{\psi\cdot\sqrt{(w^2-\psi^2)\cdot(\psi^2-m^2)}}.$$

Diese Gleichungen, integrirt, geben $\psi$ und $\theta$ in t ausgedrückt, während $\theta$ der Winkel ist, den die Vertikal-Ebene MOZ mit der Ebene XOZ macht, und $\psi$ der Winkel MOZ in dieser Vertikal-Ebene, so daß $\theta$ und $\psi$ die Lage des Atoms zu jeder Zeit t bestimmen.

Dividirt man die Gleichungen (A.) und (B.) durch einander; so erhält man

(C)… $$\partial\theta_\psi = \frac{mw}{\psi^2}\cdot\sqrt{\frac{g}{l}}$$ *).

*) Da die Gleichung (A.) für $\partial\psi_t$ einen imaginären Werth liefern würde, wenn $w^2-\psi^2$ und $\psi^2-m^2$ verschiedene (+ oder −) Zeichen hätten, so muß $\psi$ allemal zwischen den Werthen w und m liegen; und wenn $m = w$ seyn sollte, so muß $\psi = m = w$ konstant seyn. — Bei dieser Anfangs-Geschwindigkeit, welche $m = w$ macht, giebt also die Gleichung (C)

$$\theta = t\cdot\sqrt{\frac{g}{l}}, \quad \text{oder} \quad t = \theta\cdot\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Weil $\psi$ konstant ist, so ist die Bahn des Atoms ein Kreis; und weil dann auch $\partial\theta$ konstant ist, so ist die Bewegung in diesem Kreise gleichförmig oder konstant. Sucht man den Werth 2T von t, für welchen $\theta = 2\pi$; d. h. die Umdrehung in diesem Kreise einmal vollendet ist, so erhält man

Führt man nun noch einen neuen Veränderlichen u dadurch ein, daß man

20) $2\psi^2 - w^2 - m^2 = (w^2 - m^2) \cdot u$

setzt, so geht die Gleichung (A.) über in

(D)... $\partial t_u = \mp\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{g}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$.

Diese giebt, integrirt, weil für $t = 0$, $\psi = w$ und $u = 1$ werden muß

(E)... $t = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{g}} \cdot \frac{1}{cos}u$, oder $u = cos\left(2t \cdot \sqrt{\frac{g}{l}}\right)$,

also

(F)... $\psi^2 = \frac{1}{2}(w^2+m^2) + \frac{1}{2}(w^2-m^2) \cdot cos\left(2t \cdot \sqrt{\frac{g}{l}}\right)$.

Diese letztere Gleichung zeigt, daß dieser Pendel in der sich drehenden Ebene MOZ gleichzeitige Schwingungen macht, von $\psi = w$ bis $\psi = m$ hin, deren Dauer $t'$ gegeben ist durch die Gleichung

21.) $t' = \frac{1}{2}\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$.

Substituirt man den Werth von $\psi$ aus (F.) in die Gleichung (C.), so erhält man noch

(G)... $\partial\theta_t = \sqrt{\frac{g}{l}} \cdot \frac{mw}{w^2 \cdot cos^2\left(t \cdot \sqrt{\frac{g}{l}}\right) + m^2 \cdot sin^2\left(t \cdot \sqrt{\frac{g}{l}}\right)}$;

und da für $t = 0$ auch $\theta = 0$ werden soll, so erhält man durch Integration nach (§. 32. Analys.)

(H)... $w \cdot tg\,\theta = m \cdot tg\left(t \cdot \sqrt{\frac{g}{l}}\right)$.

Aus dieser Gleichung folgt, daß dieser Pendel seinen Umschwung in 4 gleichen Vierteln, und letztere wieder in gleichen

---

$2T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$, oder $T = \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$,

also ist T gerade so groß, wie in (H.) bei den unendlich-kleinen Schwingungen im vertikalen Kreise.

Zeiten, nämlich in der oben in (21.) gefundenen Zeit $t'$, zurücklegt *).

Findet man endlich aus dieser Gleichung (H.), welche $tg\,\theta$ giebt, auch noch $\cos\theta^2$ und $\sin\theta^2$, und auch noch x und y in t ausgedrückt, und eliminirt man zuletzt t selbst, so erhält man eine Gleichung zwischen x und y, nämlich

$$\frac{x^2}{w^2} + \frac{y^2}{m^2} = l^2,$$

welches die Gleichung einer Ellipse ist. Der Pendel beschreibt also eine Bahn, die zwar doppelt gekrümmt, deren Projektion auf die Horizontal-Ebene XOY jedoch eine Ellipse ist.

### Schluß-Anmerkung.

Alle diese hier betrachteten Aufgaben erleiden im III. Theile dieses Werkes dadurch noch einige Modifikationen, daß in der Wirklichkeit nicht bloße Atome, sondern ganze Massen sich bewegen. Im Wesentlichen aber ziehen sich die Untersuchungen über die Bewegungen ganzer Massen allemal einfach und leicht auf die hier betrachteten Bewegungen eines Atoms zurück.

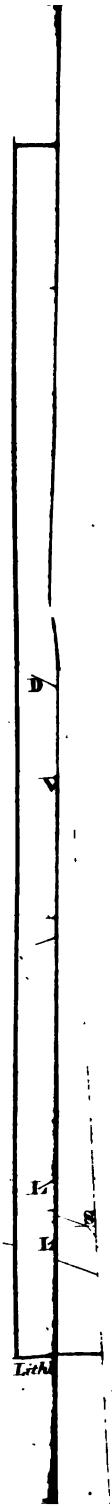
*) Es schwingt also dieser Pendel gleichzeitig mit dem einfachen Pendel (II.) im vertikalen Kreise, dessen Länge l ist.

Gedruckt bei A. W. Schade.

# Druckfehler.

Seite 10 Zeile 11 von unten statt 2,71828128 lese man 2,71828182.

- 14 Z. 11 v. oben ist für $\frac{hk}{2!}$ zu setzen $\frac{hk}{1!1!}$.
- 18 Z. 9 v. unt. ist für $\frac{x}{2!}$ zu setzen $\frac{x^2}{2!}$.
- 20 Z. 7 v. unt. ist für $\frac{1+itgx}{1+itgx}$ zu setzen $\frac{1+itgx}{1-itgx}$.
- 29 Z. 2 v. ob. ist in der Gleichung 4) für $\partial^2 y_t$ zu setzen $\partial^2 y_t$.
- 49 Die Gleichung. V, VI müssen mit resp. IV, V bezeichnet werden.
- 54 Z. 11 v. o. ist für $\partial^{1,1} f_{x,y}$ zu setzen $\partial^{1,1} f_{x,y}$.
- 54 Z. 15 v. o. ist für $2\frac{d^2f}{dx^2}$ zu setzen $2\frac{d^2f}{dx \cdot dy}$.
- 59 Z. 6 v. u. ist für $\varphi_x$ zu setzen $y_x$.
- 62 Z. 15 v. u. für $dx_n \cdot dx$ lese man $\partial x_n \cdot dx$.
- 65 Z. 5 v. u. ist für $\frac{a}{\sqrt{b}}$, $\frac{a}{b}$ zu lesen $\frac{1}{\sqrt{b}}$ und $\frac{1}{b}$.
- 65 Z. 7 v. u. ist für $-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-x}$ zu lesen $+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-x}$.
- 83 Z. 12 v. u. ist für $(px+q)_n$ zu lesen $(px+q)^n$.
- 128 Z. 5 v. u. ist für $2xy^2$ zu lesen $xy^2$.
- 135 Z. 10 v. u. ist anstatt „zu der Gleichung (5)" zu lesen „zu der letzten Gleichung."
- 160 Z. 14 v. o. ist für OX, OZ zu lesen OY, OZ
- 179 Z. 18 v. o. ist für $d\vartheta$ dreimal zu lesen $d\theta$.
- 188 Z. 12 v. u. ist für $(y'-b)\cdot\partial y'^2_x$ zu lesen $(y'-b)\cdot\partial y'_x$.
- 195 Z. 11 v. u. ist für O'Y zu lesen O'Y'.
- 220 Z. 5 v. u. ist für $(\partial y_x + \partial b_x)$ zu lesen $(\partial y_x - \partial b_x)$.
- 252 Z. 13 v. o. ist unter dem Wurzelzeichen für $\partial x_t$ zu lesen $\partial x^2_t$.
- 305 Z. 9 v. u. für „es" lese man „des".
- 307 Z. 1 v. o. für „welche OX" lese man „welche OX'".
- 340 Z. 14 v. o. für $t=0$ lese man $t=0$.
- 344 Z. 15 v. u. für $x=a-gt$ lese man $v=a-gt$.
- 382 Z. 13 v. o. für $\delta L_y \cdot \partial y$ lese man $\delta L_y \cdot \partial y$.
- 404 Z. 3 v. o. für $\partial^2 x = Y$, $\partial^2 y = X$ lese man $\partial^2 x = X$, $\partial^2 y = Y$.
- 409 Z. 3 v. o. für „in einer" lese man „in einem".
- 409 Z. 10 v. o. für „Geschwindigkeit v" lese man „Geschwindigkeit v".
- 412 Z. 13 v. o. für $\frac{\partial^4}{3!}$ lese man $\frac{\partial^4}{4!}$.
- 417 Z. 4 v. o. für „Krafte" lese man „Kraft".
- 442 Z. 7 v. o. für $g\cdot(1+p^2$ lese man $g\cdot(1+p^2)$.


D
L
L
Lith